Corrigé de l'examen du cours de M2 : Méthodes numériques probabilistes

15 janvier 2019, 14h00-17h00.

Exercice 1 : Estimateur de quantile

1. C'est une conséquence du fait que F_X est croissante et continue à droite. Plus précisément, il est clair que $\alpha \leq F_X(x)$ implique $x \geq F_X^{-1}(\alpha)$ par définition de $F_X^{-1}(\alpha)$. Par ailleurs, comme F_X est croissante, si $F_X^{-1}(\alpha) \leq x$, alors $F_X(F_X^{-1}(\alpha)) \leq F_X(x)$. Il reste à montrer que $F_X(F_X^{-1}(\alpha)) \geq \alpha$. On considère une suite minimisante décroissante $x_n \to F_X^{-1}(\alpha)$ telle que $F_X(x_n) \geq \alpha$. Comme F_X est une fonction continue à droite, on a $F_X(x_n) \to F_X(F_X^{-1}(\alpha))$, et comme $F_X(x_n) \geq \alpha$, on a donc nécessairement $F_X(F_X^{-1}(\alpha)) \geq \alpha$.
2. On a $\mathbb{P}(F_X^{-1}(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F_X(x)) = F_X(x)$ et donc $F_X^{-1}(U)$ a même fonction de répartition que X, ce qui implique que $F_X^{-1}(U)$ a même loi que X.
3. D'après la première question, on a clairement $F_X(F_X^{-1}(\alpha)) \geq \alpha$. Soit maintenant x_n une suite qui tend vers $F_X^{-1}(\alpha)$ par valeurs inférieures. Comme $x_n < F_X^{-1}(\alpha)$, on a $F_X(x_n) < \alpha$ et donc $\lim_{x \xrightarrow{<} F_X^{-1}(\alpha)} F_X(x) \leq \alpha$ (la limite existe car F_X est croissante).
4. D'après la question 3, comme F_X est continue en x_α, on a $F_X(x_\alpha) = \alpha$. Comme $F_X'(x_\alpha) > 0$, on applique ensuite le théorème des fonctions implicites pour conclure.
5. Commençons par montrer que Y_n converge en probabilité vers a. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On a, pour tout $n \geq n_0 \geq 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|Y_n - a| \geq \varepsilon) &= \mathbb{P}(\sqrt{n}|Y_n - a| \geq \varepsilon\sqrt{n}) \\ &\leq \mathbb{P}(\sqrt{n}|Y_n - a| \geq \varepsilon\sqrt{n_0})\end{aligned}$$

et donc, en faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\mathbb{P}(|Y_n - a| \geq \varepsilon) \leq \int_{\{x \in \mathbb{R}^d,\, |x| \geq \varepsilon\sqrt{n_0}\}} \exp(-x^T \Gamma^{-1} x/2)((2\pi)^d \det \Gamma)^{-1/2} dx$$

qui tend bien vers 0 quand $n_0 \to \infty$. Ceci montre que Y_n converge en probabilité vers a.

On considère maintenant

$$\sqrt{n}(\varphi(Y_n) - \varphi(a)) = \sqrt{n}(Y_n - a) \cdot \int_0^1 \nabla\varphi(tY_n + (1-t)a)\, dt.$$

On note que le terme $\int_0^1 \nabla\varphi(tY_n + (1-t)a)\, dt$ converge vers $\nabla\varphi(a)$ en probabilité. En effet, pour tout $\eta > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|y - a| < \varepsilon \implies |\nabla\varphi(y) - \nabla\varphi(a)| < \eta$. On a alors :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(\left|\int_0^1 \nabla\varphi(tY_n + (1-t)a)\, dt - \nabla\varphi(a)\right| \geq \eta\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\left|\int_0^1 \nabla\varphi(tY_n + (1-t)a)\, dt - \nabla\varphi(a)\right| \geq \eta \text{ et } |Y_n - a| < \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(|Y_n - a| \geq \varepsilon\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\int_0^1 |\nabla\varphi(tY_n + (1-t)a) - \nabla\varphi(a)|\, dt \geq \eta \text{ et } |Y_n - a| < \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(|Y_n - a| \geq \varepsilon\right)\end{aligned}$$

Or, le premier évènement est vide car $|Y_n - a| < \varepsilon$ implique que $|\nabla\varphi(tY_n + (1-t)a) - \nabla\varphi(a)| < \eta$. On en déduit que

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_0^1 \nabla\varphi(tY_n + (1-t)a)\,dt - \nabla\varphi(a)\right| \geq \eta\right) \leq \mathbb{P}\left(|Y_n - a| \geq \varepsilon\right)$$

qui tend bien vers 0 quand $n \to \infty$. On peut maintenant appliquer le théorème de Slustsky au couple $\left(\sqrt{n}(Y_n - a), \int_0^1 \nabla\varphi(tY_n + (1-t)a)\,dt\right)$ pour conclure que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\varphi(Y_n) - \varphi(a)) = \mathcal{N}\left(0, [\nabla\varphi(a)]^T \Gamma \nabla\varphi(a)\right) \text{ en loi.}$$

6. La fonction $\hat{F}_n(x)$ est constante par morceaux avec $\hat{F}_n(x) = \frac{i}{n} \iff X_{(i)} \leq x < X_{(i+1)}$ pour tout $i \in \{0, \ldots n\}$, avec les conventions $X_{(0)} = -\infty$ et $X_{(n+1)} = \infty$. On vérifie donc que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, pour tout $\alpha \in (0,1)$, $\hat{F}_n^{-1}(\alpha) = X_{(i)} \iff \frac{i-1}{n} < \alpha \leq \frac{i}{n}$.
7. Par la méthode de la fonction muette, on a, en notant $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$, (noter que la probabilité que $U_i = U_j$ pour $i \neq j$ est nulle, ce qui justifie les inégalités strictes dans le raisonnement qui suit)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(U_{(1)}, \ldots, U_{(n)})) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathbb{E}(f(U_{(1)}, \ldots, U_{(n)}) 1_{U_{\sigma(1)} < \ldots < U_{\sigma(n)}}) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathbb{E}(f(U_{\sigma(1)}, \ldots, U_{\sigma(n)}) 1_{U_{\sigma(1)} < \ldots < U_{\sigma(n)}}) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathbb{E}(f(U_1, \ldots, U_n) 1_{U_1 < \ldots < U_n}) \\
&= n! \int_{0 < u_1 < \ldots < u_n < 1} f(u_1, \ldots, u_n) du_1 \ldots du_n
\end{aligned}$$

où on utilise le fait que pour toute permutation σ, $(U_{\sigma(1)}, \ldots, U_{\sigma(n)})$ a même loi que $(U_1, \ldots, U_n)$.
8. Le vecteur $(W_1, \ldots, W_{n+1})$ est un vecteur aléatoire de densité $\exp(-\sum_{i=1}^{n+1} w_i) 1_{w_1 > 0} \ldots 1_{w_{n+1} > 0}$. On obtient donc le résultat par le changement de variable $(w_1, \ldots, w_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \mapsto (w_1, w_1 + w_2, \ldots, \sum_{i=1}^{n+1} w_i) \in \{(s_1, \ldots, s_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1},\ 0 < s_1 < \ldots < s_{n+1}\}$ qui est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de jacobien 1.
9. Il suffit de considérer le changement de variable $(s_1, \ldots, s_{n+1}) \in \{(s_1, \ldots, s_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1},\ 0 < s_1 < \ldots < s_{n+1}\} \mapsto \left(\frac{s_1}{s_{n+1}}, \ldots, \frac{s_n}{s_{n+1}}, s_{n+1}\right) \in \{(v_1, \ldots, v_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1},\ 0 < v_1 < \ldots < v_n < 1,\ v_{n+1} > 0\}$ qui est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de jacobien $1/s_{n+1}^n$.
10. On note que V_{n+1} est indépendant de $(V_1, \ldots, V_n)$ car la densité de $(V_1, \ldots, V_{n+1})$ est une fonction de v_{n+1} multipliée par une fonction de $(v_1, \ldots, v_n)$, qui est à une constante multiplicative près la densité de $(U_{(1)}, \ldots, U_{(n)})$. Le résultat en découle.
11. On a $\hat{U}_{\alpha,n} = U_{(\lceil \alpha n \rceil)}$ qui a donc même loi que $V_{\lceil \alpha n \rceil} = \frac{A_n}{A_n + B_n}$.
12. On applique le théorème de Slutsky à A_n :

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\,(A_n - \alpha) &= \sqrt{\frac{\lceil \alpha n \rceil}{n}} \sqrt{\lceil \alpha n \rceil} \left(\frac{n}{\lceil \alpha n \rceil} A_n - \frac{n}{\lceil \alpha n \rceil} \alpha\right) \\
&= \sqrt{\frac{\lceil \alpha n \rceil}{n}} \sqrt{\lceil \alpha n \rceil} \left(\frac{1}{\lceil \alpha n \rceil} \sum_{i=1}^{\lceil \alpha n \rceil} W_i - 1\right) + \frac{\lceil \alpha n \rceil - \alpha n}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

qui converge donc en loi vers $\mathcal{N}(0,\alpha)$, car $\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n W_i - 1\right)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$. De même, on a que $\sqrt{n}\,(B_n-\alpha)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,(1-\alpha))$. On conclut en notant que A_n et B_n sont indépendants pour tout n.

13. On applique la méthode delta au couple (A_n, B_n) auquel on applique la fonction $\phi : (a,b) \mapsto \frac{a}{a+b}$.On note que $\nabla\phi(a,b) = \frac{1}{(a+b)^2}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ et donc
$$[\nabla\phi(\alpha,1-\alpha)]^T \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha \end{pmatrix} \nabla\phi(\alpha,1-\alpha) = \alpha(1-\alpha).$$
14. On note que $\hat{X}_{\alpha,n}$ a même loi que $F_X^{-1}(\hat{U}_{\lceil \alpha n\rceil})$ (car $(X_1,\dots,X_n)$ a même loi que $(F_X^{-1}(U_1),\dots F_X^{-1}(U_n))$, et F_X est croissante). Le résultat est donc une conséquence de la méthode delta, et du fait que $(F_X^{-1})'(\alpha) = \frac{1}{F_X'(x_\alpha)}$, cf. Question 4.
15. On a
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > X_{(k)}) &= \mathbb{P}(X > X_{(k)}, X_{(k)} \geq x_\alpha) + \mathbb{P}(X > X_{(k)}, X_{(k)} < x_\alpha) \\ &\leq \mathbb{P}(X > x_\alpha) + \mathbb{P}(X_{(k)} < x_\alpha) \\ &\leq (1-\alpha) + (1-\beta).\end{aligned}$$
16. On cherche à calculer la probabilité que exactement j tirages parmi $(X_1,\dots,X_n)$ dépassent le seuil x. On note que $1_{X_i > x}$ sont des Bernoulli i.i.d. de paramètre $(1-F_X(x))$. Le résultat est donc trivial en notant que $\sum_{i=1}^n 1_{X_i>x}$ est une binomiale de paramètre $(n, 1-F_X(x))$.
17. On a $X_{(k)} > x_\alpha$ si et seulement si au moins $n-k+1$ des $(X_1,\dots,X_n)$ dépassent le seuil x_α :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{(k)} > x_\alpha) &= \sum_{j=n-k+1}^{n} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n 1_{X_i > x_\alpha} = j\right) = 1 - \sum_{j=0}^{n-k} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n 1_{X_i > x_\alpha} = j\right) \\ &= 1 - \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{j} (1-F_X(x_\alpha))^j F_X(x_\alpha)^{n-j} = 1 - \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n}{j} (1-\alpha)^j \alpha^{n-j} \\ &= 1 - \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (1-\alpha)^{n-j} \alpha^j.\end{aligned}$$
18. On note que $k \mapsto \mathbb{P}(X_{(k)} > x_\alpha)$ est croissante. Donc il existe un $k \in \{1,\dots,n\}$ tel que $\mathbb{P}(X_{(k)} > x_\alpha) \geq \beta$ si et seulement si $\mathbb{P}(X_{(n)} > x_\alpha) \geq \beta$ ce qui est équivalent à $1-\alpha^n \geq \beta$, soit
$$n \geq \frac{\ln(1-\beta)}{\ln\alpha}.$$
On considère souvent en pratique le cas $\alpha = \beta$. Dans ce cas, on vérifie que l'on a bien $\frac{\ln(1-\alpha)}{\ln\alpha} > (1-\alpha)^{-1}$ pour $\alpha \in (\alpha_0, 1)$ avec $\alpha_0 \sim 0.7$, et donc on a bien $n > \lceil \alpha n \rceil$ si $n \geq \frac{\ln(1-\alpha)}{\ln\alpha}$. Pour $\alpha = \beta = 0.95$ on vérifie que $n = 59$ convient par exemple, et que dans ce cas $k_0 = 59$.

Les résultats présentés dans cet exercice peuvent se prolonger dans de nombreuses directions :
- On peut par exemple chercher à montrer que l'estimateur de Wilks de même que le quantile empirique converge bien presque sûrement vers le quantile exact.

— Une autre approche (plus robuste que ce que nous avons fait dans la partie B) pour construire un intervalle de confiance autour du quantile exact consiste à partir de l'inégalité $\mathbb{P}(X_{(k)} > x_\alpha) = 1 - C_\alpha(n,k)$ et d'en déduire que

$$\mathbb{P}\left(x_\alpha \in (X_{(l)}, X_{(r)}]\right) = 1 - C_\alpha(n,l) + C_\alpha(n,r)$$

et de choisir ensuite r, l tels que $1 \leq r < l \leq n$ tels que $1 - C_\alpha(n,l) + C_\alpha(n,r) \geq \beta$ pour un niveau de confiance β proche de 1. Cela permet par exemple de couvrir également le cas où $F'_X(x_\alpha) = 0$. Une version asymptotique ($n \to \infty$) de cette approche consiste à utiliser d'abord le théorème central limite sur $\hat{F}_n(x_\alpha)$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\hat{F}_n(x_\alpha) - \alpha) = \mathcal{N}(0, \alpha(1-\alpha))$$

pour ensuite prouver que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(x_\alpha \in \left[\hat{F}_n^{-1}\left(\alpha - \beta\sqrt{\frac{\alpha(1-\alpha)}{n}}\right), \hat{F}_n^{-1}\left(\alpha + \beta\sqrt{\frac{\alpha(1-\alpha)}{n}}\right)\right]\right) = C(\beta)$$

avec $C(1.96) \approx 0.95$ et $C(2.58) \approx 0.99$.

Exercice 2 : Approximation particulaire d'une EDS « non-linéaire »

1. Si ϕ est une fonction de classe C^1 bornée et telles que ϕ' et $x\phi'(x)$ sont bornées, alors ϕ et $x \mapsto x\phi(x)$ sont bien des fonctions Lipschitz. On peut par exemple considérer ϕ une fonction C^1 à support compact.
2. C'est le Lemme de Gronwall. Rappelons la démonstration. Soit $r(t) = \int_0^t q(s)\mathrm{d}s$. On a $r'(t) \leq \alpha r(t) + C$ et donc $\frac{d}{dt}(\exp(-\alpha t)r(t)) \leq \exp(-\alpha t)C$. En intégrant on obtient $\exp(-\alpha t)r(t) \leq \frac{C}{\alpha}(1 - \exp(-\alpha t))$ et donc $q(t) \leq \alpha r(t) + C \leq C\exp(\alpha t)$.
3. Il s'agit d'une EDO avec un second membre $x \mapsto \phi(x)x$ qui est globalement Lipschitz. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous donne donc l'existence d'une solution globale en temps.
4. Si (X_t) est solution de $(*)$, alors, $\forall t \geq 0$,
$$X_t = \xi + \int_0^t \phi(\mathbb{E}[X_s])X_s\mathrm{d}s + W_t.$$
En prenant l'espérance de cette équation, on obtient : $\forall t \geq 0$,
$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\xi) + \int_0^t \phi(\mathbb{E}[X_s])\mathbb{E}(X_s)\mathrm{d}s$$
en utilisant Fubini. On en déduit que $t \mapsto \mathbb{E}(X_t)$ est la solution de l'EDO introduite à la questions précédente.
5. C'est un résultat du cours, car le drift $(t,x) \mapsto \phi(m(t))x$ est continu, Lipschitz en la variable x et à croissance au plus linéaire à l'infini en x car ϕ est bornée.
6. Pour l'existence, on considère la solution (X_t) construite à la question 5, en prenant l'espérance, on note que $\mathbb{E}(X_t)$ est solution de
$$n'(t) = \phi(m(t))n(t), \qquad n(0) = \mathbb{E}(\xi).$$
Or cette EDO admet une unique solution, et comme m est solution de cette EDO, nécessairement $n(t) = m(t)$. Ceci montre que $m(t) = \mathbb{E}(X_t)$ et donc conclut la preuve de l'existence.
Pour l'unicité, si on a deux solutions X_t et Y_t de $(*)$, alors par la question 4, $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(Y_t) = m(t)$ la solution de l'EDO de la question 3. Mais alors, (X_t) et (Y_t) sont deux solutions fortes de l'EDS de la question 5, et donc sont égales.

7. On note que $\forall t \geq 0$,

$$X_t^2 \leq 3\xi^2 + 3\left(\int_0^t \phi(\mathbb{E}(X_s))X_s\,ds\right)^2 + 3W_t^2$$
$$\leq 3\xi^2 + 3t\|\phi\|_{L^\infty}\int_0^t X_s^2\,ds + 3W_t^2.$$

En prenant l'espérance, on a donc : $\forall t \in [0, T]$,

$$\mathbb{E}(X_t^2) \leq 3\mathbb{E}(\xi^2) + 3T\|\phi\|_{L^\infty}\int_0^t \mathbb{E}(X_s^2)\,ds + 3T.$$

En utilisant ensuite le Lemme de Gronwall (Question 2), on obtient le résultat demandé. On peut aussi conclure directement en utilisant le fait que $\int_0^T \mathbb{E}(X_s^2)\,ds < \infty$ par la Question 5.

8. On remarque que $(\overline{W}_t^n)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien comme combinaison linéaire de processus gaussiens indépendants. De plus, $\mathbb{E}(\overline{W}_t^n) = 0$ et pour tout $(s,\, t) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\mathbb{E}(\overline{W}_t^n\overline{W}_s^n) = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n W_t^i \sum_{j=1}^n W_s^j\right) = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n \mathbb{E}\left(W_t^i W_s^j\right)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n s\wedge t = s\wedge t$$

qui est bien la fonction de covariance d'un mouvement brownien. Ceci conclut la preuve.

9. Il s'agit d'une EDS pour un processus à valeurs réelles, avec un drift $x \mapsto \phi(x)x$ qui est globalement Lipschitz par hypothèse, et un coefficient de diffusion $1/\sqrt{n}$ constant. Par conséquent le résultat du cours s'applique et donne l'existence et l'unicité d'une unique solution forte.

10. On a $\forall t \geq 0$,

$$M_t - \widetilde{M}_t = \overline{\xi}^n + \int_0^t \phi(M_s)M_s \mathrm{d}s + \frac{1}{\sqrt{n}}\overline{W}_t^n - \left(\overline{\xi}^n + \int_0^t \phi(M_s)\widetilde{M}_s \mathrm{d}s + \frac{1}{\sqrt{n}}\overline{W}_t^n\right)$$
$$= \int_0^t \phi(M_s)(M_s - \widetilde{M}_s)\mathrm{d}s.$$

En utilisant le fait que ϕ est bornée, on a donc : $\forall t \geq 0$,

$$|M_t - \widetilde{M}_t| \leq \|\phi\|_{L^\infty}\int_0^t |M_s - \widetilde{M}_s|\mathrm{d}s.$$

En appliquant le Lemme de Gronwall (cf. Question 2), on en déduit que $M_t = \widetilde{M}_t$ pour tout $t \geq 0$.

11. On note $Y_t = (Y_t^1, \ldots, Y_t^n) \in \mathbb{R}^n$, $W_t = (W_t^1, \ldots, W_t^n) \in \mathbb{R}^n$ et $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$. L'EDS considérée n'est pas exactement du type de celle rencontrée en cours, car la fonction de drift $(t, y) \mapsto \phi(M_t)y$ est aléatoire. Ceci dit, on vérifie facilement que l'argument de point fixe sur la fonction

$$\begin{cases} \mathcal{E} \to \mathcal{E} \\ Y_t \mapsto \xi + \displaystyle\int_0^t \phi(M_s)Y_s\,ds + W_t \end{cases}$$

où $\mathcal{E} = \left\{(Y_t)_{t\geq 0}\ (\mathcal{F}_t)\text{-adapté et tel que } \mathbb{E}\int_0^T Y_s^2 ds < \infty\right\}$, s'applique également dans ce cas, en utilisant le fait que la fonction ϕ est bornée. Noter en particulier que (M_t) est bien un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté.

12. Existence : Soit Y_t le processus construit à la question précédente. On remarque que $\overline{Y}_t = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_t^i$ est solution de l'équation introduite dans la question 10, et donc $\overline{Y}_t = M_t$, ce qui montre que Y_t est bien solution de l'EDS $(**)$.

    Unicité : Par ailleurs, soit Y_t et Z_t deux solutions de l'EDS $(**)$. On note que $\overline{Y}_t$ et $\overline{Z}_t$ sont solutions de l'EDS de la Question 9, et donc $\overline{Y}_t = \overline{Z}_t = M_t$. On en déduit que (Y_t) et (Z_t) sont deux solutions fortes de l'EDS de la question 11, donc sont égales.

13. Les processus $(X_t^1)_{t\geq 0}, \dots, (X_t^n)_{t\geq 0}$ sont indépendants car ils voient des conditions initiales et des mouvements browniens indépendants. En revanche les processus $(Y_t^1)_{t\geq 0}, \dots, (Y_t^n)_{t\geq 0}$ (cf. la construction à la Question 11) ne sont pas indépendants : la fonction M_t dépend en effet de l'ensemble des mouvements browniens $(W_t^1, \dots, W_t^n)_{t\geq 0}$.

14. On a : $\forall t \geq 0$,

$$M_t - m(t) = \overline{\xi}^n + \int_0^t \phi(M_s)M_s\,ds + \frac{1}{\sqrt{n}}\overline{W}_t^n - \left(\mathbb{E}(\xi) + \int_0^t \phi(m(s))m(s)\,ds\right).$$

    On en déduit que : $\forall t \geq 0$,

$$(M_t - m(t))^2 \leq 3(\overline{\xi}^n - \mathbb{E}(\xi))^2 + 3\left(\int_0^t \phi(M_s)M_s - \phi(m(s))m(s)\,ds\right)^2 + \frac{3}{n}\left(\overline{W}_t^n\right)^2.$$

    Par conséquent, en utilisant le fait que $x \mapsto x\phi(x)$ est L-Lipschitz : $\forall t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}(M_t - m(t))^2 &\leq 3(\overline{\xi}^n - \mathbb{E}(\xi))^2 + 3T\int_0^t \left(\phi(M_s)M_s - \phi(m(s))m(s)\right)^2\,ds + \frac{3}{n}\left(\overline{W}_t^n\right)^2\\ &\leq 3(\overline{\xi}^n - \mathbb{E}(\xi))^2 + 3TL^2\int_0^t (M_s - m(s))^2\,ds + \frac{3}{n}\left(\overline{W}_t^n\right)^2.\end{aligned}$$

    En prenant l'espérance, on a : $\forall t \in [0, T]$,

$$\mathbb{E}\left((M_t - m(t))^2\right) \leq 3\mathbb{E}\left((\overline{\xi}^n - \mathbb{E}(\xi))^2\right) + 3TL^2\int_0^t \mathbb{E}\left((M_s - m(s))^2\right)\,ds + \frac{3}{n}\mathbb{E}\left(\overline{W}_t^n\right)^2.$$

    On remarque que $\mathbb{E}\left((\overline{\xi}^n - \mathbb{E}(\xi))^2\right) = \frac{\mathrm{Var}(\xi)}{n}$ et $\mathbb{E}\left(\overline{W}_t^n\right)^2 = t \leq T$. On a donc $\forall t \in [0, T]$,

$$\mathbb{E}\left((M_t - m(t))^2\right) \leq \frac{\widetilde{C}_T}{n} + 3TL^2\int_0^t \mathbb{E}\left((M_s - m(s))^2\right)\,ds$$

    pour une constante $\widetilde{C}_T$. On conclut alors par le Lemme de Gronwall (cf. Question 2).

15. On a, $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned}X_t^i - Y_t^i &= \xi^i + \int_0^t \phi(m(s))X_s^i\,ds + W_t^i - \left(\xi^i + \int_0^t \phi(M_s)Y_s^i\,ds + W_t^i\right)\\ &= \int_0^t \left(\phi(m(s))X_s^i - \phi(M_s)Y_s^i\right)\,ds.\end{aligned}$$

    Par conséquent, $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned}|X_t^i - Y_t^i| &\leq \int_0^t \left|\phi(m(s))X_s^i - \phi(M_s)Y_s^i\right|\,ds\\ &\leq \int_0^t |\phi(m(s)) - \phi(M_s)|\,|X_s^i|\,ds + \int_0^t |\phi(M_s)|\,\left|X_s^i - Y_s^i\right|\,ds.\end{aligned}$$

En utilisant le fait que ϕ est borné, on obtient donc : pour tout $t \geq 0$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_t^i - Y_t^i| \leq \int_0^t |\phi(m(s)) - \phi(M_s)|\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_s^i|\,ds + \|\phi\|_{L^\infty}\int_0^t \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|X_s^i - Y_s^i\right|\,ds.$$

16. En prenant l'espérance de l'inégalité précédente : on obtient :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_t^i - Y_t^i|\right) \leq \int_0^t \mathbb{E}\left(|\phi(m(s)) - \phi(M_s)|\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_s^i|\right)ds + \|\phi\|_{L^\infty}\int_0^t \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|X_s^i - Y_s^i\right|\right)ds.$$

Par ailleurs, en utilisant le fait que ϕ est L-Lipschitz et le fait que les X_s^i ont même loi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(|\phi(m(s)) - \phi(M_s)|\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_s^i|\right) &\leq \sqrt{\mathbb{E}\left(|\phi(m(s)) - \phi(M_s)|^2\right)}\sqrt{\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_s^i|\right)^2\right]}\\
&\leq L\sqrt{\mathbb{E}\left(|m(s) - M_s|^2\right)}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}|X_s^i|^2}\\
&= L\sqrt{\mathbb{E}\left(|m(s) - M_s|^2\right)}\sqrt{\mathbb{E}\left(|X_s|^2\right)}.
\end{aligned}$$

En utilisant les résultats des Questions 7 et 14, on obtient donc que pour $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_t^i - Y_t^i|\right) &\leq L\sqrt{\frac{C_T}{n}}\sup_{t\in[0,T]}\sqrt{\mathbb{E}\left(|X_t|^2\right)} + \|\phi\|_{L^\infty}\int_0^t \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|X_s^i - Y_s^i\right|\right)ds\\
&= \frac{\widetilde{C}_T}{\sqrt{n}} + \|\phi\|_{L^\infty}\int_0^t \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|X_s^i - Y_s^i\right|\right)ds
\end{aligned}$$

pour une constante $\widetilde{C}_T$. On en déduit par le Lemme de Gronwall que pour tout $t \in [0,T]$,

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_t^i - Y_t^i|\right) \leq \frac{\widetilde{C}_T}{\sqrt{n}}\exp(\|\phi\|_{L^\infty}t)$$

ce qui donne le résultat demandé avec $D_T = \widetilde{C}_T\exp(\|\phi\|_{L^\infty}T)$. On conclut en remarquant que les $(X_t^i, Y_t^i)_{1\leq i\leq n}$ sont identiquement distribués, et donc :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_t^i - Y_t^i|\right) = \mathbb{E}\left(|X_t^1 - Y_t^1|\right).$$

Le lecteur pourra se convaincre qu'on peut en fait assez facilement obtenir la convergence suivante, plus forte :

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sup_{t\in[0,T]}|X_t^i - Y_t^i|\right] \leq \frac{D_T}{\sqrt{n}}.$$

17. Pour une fonction test ψ, on a, par un calcul d'Itô : $\forall t \geq 0$

$$\psi(X_t) = \psi(\xi) + \int_0^t \psi'(X_s)\phi(\mathbb{E}(X_s))X_s\,ds + \int_0^t \psi'(X_s)dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \psi''(X_s)ds.$$

En prenant l'espérance, on a donc :

$$\mathbb{E}\psi(X_t) = \mathbb{E}\psi(\xi) + \int_0^t \phi(\mathbb{E}(X_s))\mathbb{E}\left(\psi'(X_s)X_s\right)\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t \mathbb{E}\left(\psi''(X_s)\right) ds$$

soit

$$\int \psi(x)\mu_t(dx) = \int \psi(x)\mu_0(dx) + \int_0^t \phi\left(\int x\mu_s(dx)\right) \int \psi'(x)x\mu_s(dx)\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t \int \psi''(x)\mu_s(dx)ds.$$

Ceci montre que μ_t est solution faible de l'équation de Fokker Planck :

$$\partial_t\mu = -\phi\left(\int x\mu(dx)\right)\partial_x(x\mu) + \frac{1}{2}\partial_{x,x}\mu$$

qui est une équation non linéaire en μ, du fait de la présence du terme $\phi\left(\int x\mu(dx)\right)$.