Méthodes Numériques Probabilistes

M2 Mathématiques de la Modélisation — Année 2019–2020

Examen du mardi 14 janvier 2020

Le sujet est prévu pour durer 3 heures. Tous les documents sont autorisés. Aucun appareil électronique n'est autorisé.

Préliminaires

On rappelle que la fonction Gamma d'Euler est définie par

$$\forall a > 0, \qquad \Gamma(a) = \int_{x=0}^{\infty} x^{a-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x,$$

et vérifie la formule de Stirling :

$$\Gamma(a) \sim a^{a-1/2} \mathrm{e}^{-a} \sqrt{2\pi} \qquad \text{lorsque } a \to +\infty.$$

On définit également la fonction Bêta par

$$\forall a, b > 0, \qquad \beta(a,b) = \int_{u=0}^{1} u^{a-1}(1-u)^{b-1} \mathrm{d}u,$$

et on donne $\beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$.

1. Exercice : algèbre bêta-gamma

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi Gamma de paramètre $a > 0$, ce que l'on note $X \sim \Gamma(a)$, lorsque X possède la densité

$$p_a(x) = \mathbb{1}_{\{x>0\}} \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} \mathrm{e}^{-x}.$$

De même, on dit qu'une variable aléatoire U suit la loi Bêta de paramètres $a, b > 0$, ce que l'on note $U \sim \beta(a,b)$, lorsque U possède la densité

$$q_{a,b}(u) = \mathbb{1}_{\{0<u<1\}} \frac{1}{\beta(a,b)} u^{a-1}(1-u)^{b-1}.$$

Soient $a, b > 0$ et $X \sim \Gamma(a), Y \sim \Gamma(b)$ deux variables aléatoires indépendantes. On pose

$$S = X + Y, \qquad U = \frac{X}{X+Y}.$$

(1) Calculer la densité du couple (S, U).

(2) Montrer que

$$\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

puis que les variables S et U sont indépendantes et donner leurs lois marginales.

(3) Soient $U \sim \beta(a,b)$ et $V \sim \beta(a+b, c)$, où $a, b, c > 0$. En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que le produit UV suit une loi Bêta et donner ses paramètres.

2. Problème : borne gaussienne sur la densité de transition

2.1. **Préliminaire : densité de transition du mouvement brownien.** Soient $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \geq 0$, on pose $\widehat{X}_t = x + B_t$.

(1) Pour tout $t > 0$, écrire la densité $\widehat{p}_t(x,y)$ de la variable aléatoire $\widehat{X}_t$.

(2) Pour $\alpha \in]0,1[$, $t > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$, on pose

$$\widehat{p}_t^\alpha(x,y) = \widehat{p}_{t/\alpha}(x,y).$$

Montrer qu'il existe une constante $c^\alpha \in]1,+\infty[$, ne dépendant que de α, telle que pour tous $t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{p}_t(x,y) \leq c^\alpha \widehat{p}_t^\alpha(x,y).$$

(3) Montrer que $\widehat{p}^\alpha$ vérifie la relation de *Chapman–Kolmogorov*

$$\forall 0 < t < T, \qquad \widehat{p}_T^\alpha(x,y) = \int_{x'\in\mathbb{R}} \widehat{p}_t^\alpha(x,x')\widehat{p}_{T-t}^\alpha(x',y)\mathrm{d}x'.$$

On pourra effectuer un calcul direct ou bien invoquer sans démonstration le fait que la densité d'une somme de variables aléatoires indépendantes est donnée par le produit de convolution de leurs densités.

2.2. **Processus de diffusion.** Soit $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle stochastique

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t$$

possède une unique solution $(X_t)_{t\geq 0}$ telle que $X_0 = x$.

(1) Donner une condition suffisante sur b pour que cette hypothèse soit vérifiée.

Dans toute la suite, on suppose b **bornée** sur $\mathbb{R}$ et on note $\|b\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |b(x)|$. L'objectif de ce problème est de montrer que pour tout $t > 0$, la variable aléatoire X_t possède une densité, notée $p_t(x,y)$, et que pour tout $\alpha \in]0,1[$, il existe $\overline{C}^\alpha(t) \in]1,+\infty[$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$p_t(x,y) \leq \overline{C}^\alpha(t)\widehat{p}_t^\alpha(x,y).$$

2.3. **Formulation *mild* de l'équation de Fokker–Planck.**

(1) Vérifier que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $(t,x) \mapsto \widehat{p}_t(x,y)$ est de classe $C^{1,2}$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et que, pour tout $(t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{p}_t(x,y) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\widehat{p}_t(x,y) = 0.$$

(2) Montrer qu'il existe deux constantes universelles [1] $c_1, c_2 \in]0,+\infty[$ telles que, pour tous $t > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\widehat{p}_t(x,y)\right| \leq \frac{c_1}{t}, \qquad \left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\widehat{p}_t(x,y)\right| \leq \frac{c_2}{t^{3/2}}.$$

(3) Fixons $T > 0$, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue à support compact, et posons

$$\Phi(t,x) = \int_{y\in\mathbb{R}} \phi(y)\widehat{p}_{T-t}(x,y)\mathrm{d}y,$$

pour tous $t \in [0,T[$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $T' \in [0,T[$, Φ est de classe $C^{1,2}$ sur $[0,T'] \times \mathbb{R}$ et y vérifie

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(t,x) = 0.$$

1. C'est-à-dire qui ne dépendent d'aucun paramètre introduit dans cet énoncé.

(4) Déduire que pour tout $T' \in [0,T[$,
$$\mathbb{E}\left[\Phi(T', X_{T'})\right] = \Phi(0,x) + \int_{t=0}^{T'} \mathbb{E}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, X_t) b(X_t)\right] \mathrm{d}t.$$

(5) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\Phi(T', x) = \int_{u\in\mathbb{R}} \phi\left(x + u\sqrt{T-T'}\right) \frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}u,$$
et en déduire la limite, lorsque $T' \to T$, de $\mathbb{E}[\Phi(T', X_{T'})]$.

(6) En utilisant un raisonnement similaire, justifier que, la fonction
$$t \mapsto \mathbb{E}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, X_t) b(X_t)\right]$$
est intégrable sur $[0,T]$.

(7) Pour tout $t \geq 0$, notons $\mu_t(x, \mathrm{d}y)$ la loi de la variable aléatoire X_t. Montrer que, pour tout $T > 0$,
$$\int_{y\in\mathbb{R}} \phi(y) \mu_T(x, \mathrm{d}y) = \int_{y\in\mathbb{R}} \phi(y) \widehat{p}_T(x,y) \mathrm{d}y + \int_{t=0}^{T} \left(\int_{y\in\mathbb{R}} \phi(y) g(t,y) \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}t,$$
où
$$g(t,y) = \int_{x'\in\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} \widehat{p}_{T-t}(x', y) b(x') \mu_t(x, \mathrm{d}x').$$

(8) Montrer que $\phi(y)g(t,y)$ est intégrable sur $[0,T] \times \mathbb{R}$ et en conclure que X_T possède une densité $p_T(x, \cdot)$ qui vérifie l'identité
$$p_T(x,y) = \widehat{p}_T(x,y) + \int_{t=0}^{T} \int_{x'\in\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} \widehat{p}_{T-t}(x', y) b(x') p_t(x, x') \mathrm{d}x' \mathrm{d}t,$$
$\mathrm{d}y$-presque partout, que l'on appelle formulation *mild* de l'équation de Fokker–Planck. *On pourra admettre que si $\mu(\mathrm{d}y)$ est une mesure de probabilité telle qu'il existe une fonction mesurable q qui vérifie $\int_{y\in\mathbb{R}} \phi(y)\mu(\mathrm{d}y) = \int_{y\in\mathbb{R}} \phi(y) q(y) \mathrm{d}y$ pour toute fonction continue ϕ à support compact, alors μ possède une densité p qui coïncide avec q, $\mathrm{d}y$-presque partout.*

2.4. **Opérateur $\mathcal{G}$ et borne gaussienne.** Pour toute fonction mesurable $q : (t,x,y) \mapsto q_t(x,y)$, définissons l'opérateur $\mathcal{G}$ par
$$(\mathcal{G}q)_T(x,y) = \int_{t=0}^{T} \int_{x'\in\mathbb{R}} q_t(x,x') b(x') \frac{\partial}{\partial x} \widehat{p}_{T-t}(x', y) \mathrm{d}x' \mathrm{d}t,$$
de sorte que la formulation *mild* de l'équation de Fokker–Planck obtenue à la section précédente se réécrit symboliquement
$$p = \widehat{p} + \mathcal{G}p.$$

(1) Montrer qu'il existe une constante d^α, ne dépendant que de α, telle que pour tous $t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$,
$$\left|\frac{\partial}{\partial x} \widehat{p}_t(x,y)\right| \leq \frac{d^\alpha}{\sqrt{t}} \widehat{p}_t^\alpha(x,y).$$

(2) On définit la suite de fonctions $(\varphi_\ell)_{\ell\geq 0}$ sur $[0, +\infty[$ par $\varphi_0(T) = 1$ pour tout $T \geq 0$, et pour tout $\ell \geq 0$,
$$\varphi_{\ell+1}(T) = \int_{t=0}^{T} \frac{\varphi_\ell(t)}{\sqrt{T-t}} \mathrm{d}t.$$
Pour tous $T \geq 0$ et $\ell \geq 0$, exprimer $\varphi_\ell(T)$ en fonction de T et de la fonction β définie en introduction.

(3) Montrer que, pour tout $\ell \geq 0$, pour tous $T > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$,
$$\left|(\mathcal{G}^\ell \widehat{p})_T(x,y)\right| \leq c^\alpha \left(\|b\|_\infty d^\alpha\right)^\ell \varphi_\ell(T) \widehat{p}^\alpha_T(x,y),$$
où l'on convient que $(\mathcal{G}^0 \widehat{p})_T(x,y) = \widehat{p}_T(x,y)$. *On pourra utiliser les résultats préliminaires de la Section 2.1.*

(4) Montrer que pour tout $T > 0$, il existe $\overline{C}^\alpha(T) \in [0, +\infty[$ (qui dépend de b, α et T) tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \left|(\mathcal{G}^\ell \widehat{p})_T(x,y)\right| \leq \overline{C}^\alpha(T) \widehat{p}^\alpha_T(x,y).$$
On pourra utiliser le résultat de l'Exercice 1, ainsi que la formule de Stirling rappelée en introduction.

2.5. **Représentation *parametrix* et conclusion.** En itérant l'égalité
$$p = \widehat{p} + \mathcal{G}p,$$
on observe que pour tout $L \geq 1$,
$$p = \sum_{\ell=0}^{L-1} \mathcal{G}^\ell \widehat{p} + \mathcal{G}^L p.$$
Dans cette dernière section, nous vérifions que pour tous $T > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, $(\mathcal{G}^L p)_T(x,y)$ tend vers 0 lorsque $L \to +\infty$. Cela permet d'écrire la densité de transition sous la forme
$$p_T(x,y) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} (\mathcal{G}^\ell \widehat{p})_T(x,y),$$
appelée *représentation parametrix*, et d'obtenir la borne gaussienne annoncée à partir des résultats de la section précédente.

(1) Montrer que, pour tous $T > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$,
$$\left|(\mathcal{G}^2 p)_T(x,y)\right| \leq \pi(\|b\|_\infty d^\alpha)^2 \int_{s=0}^{T} \int_{x'' \in \mathbb{R}} p_s(x, x'') \widehat{p}^\alpha_{T-s}(x'', y) \mathrm{d}x'' \mathrm{d}s.$$
En déduire qu'il existe une constante $Q^\alpha \in [0, +\infty[$, indépendante de T, telle que pour tous $T > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$,
$$|(\mathcal{G}^2 p)_T(x,y)| \leq Q^\alpha \varphi_1(T).$$

(2) En conclure que, pour tout $T > 0$,
$$\lim_{L \to +\infty} \sup_{x,y \in \mathbb{R}} \left|(\mathcal{G}^L p)_T(x,y)\right| = 0.$$