Méthodes Numériques Probabilistes

M2 Mathématiques de la Modélisation — Année 2019–2020

Corrigé de l'examen du mardi 14 janvier 2020

1. Exercice : algèbre bêta-gamma

(1) Soit C un borélien de $\mathbb{R}^2$. Puisque les variables X et Y sont indépendantes, la loi du couple (X, Y) possède la densité produit $p_a(x)p_b(y)$, d'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left((S,U) \in C\right) &= \mathbb{P}\left(\left(X+Y, \frac{X}{X+Y}\right) \in C\right) \\
&= \int_{x,y>0} \mathbb{1}_{\{(x+y, \frac{x}{x+y}) \in C\}} p_a(x)p_b(y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{x,y>0} \mathbb{1}_{\{(x+y, \frac{x}{x+y}) \in C\}} x^{a-1} y^{b-1} \mathrm{e}^{-(x+y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable

$$(s,u) = \left(x+y, \frac{x}{x+y}\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = su, \\ y = s(1-u), \end{cases}$$

qui est un C^1-difféomorphisme de $]0,+\infty[^2$ dans $]0,+\infty[\times]0,1[$, et dont le déterminant du jacobien vaut

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = s\mathrm{d}u\mathrm{d}s.$$

Nous obtenons

$$\mathbb{P}\left((S,U) \in C\right) = \frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{s=0}^{+\infty} \int_{u=0}^{1} \mathbb{1}_{\{(s,u) \in C\}} (su)^{a-1} (s(1-u))^{b-1} \mathrm{e}^{-s} s \mathrm{d}u\mathrm{d}s,$$

ce qui montre que le couple (S, U) possède la densité

$$\frac{1}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \mathbb{1}_{\{s>0\}} s^{a+b-1} \mathrm{e}^{-s} \mathbb{1}_{\{0<u<1\}} u^{a-1} (1-u)^{b-1}.$$

(2) On observe que la densité du couple (S, U) se réécrit

$$c p_{a+b}(s) q_{a,b}(u),$$

où

$$c = \frac{\beta(a,b)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}.$$

Puisque le produit $p_{a+b}(s)q_{a,b}(u)$ est une densité de probabilité, son intégrale sur $\mathbb{R}^2$ doit être égale à 1, ce qui impose que

$$1 = \mathbb{P}((S,U) \in \mathbb{R}^2) = c \int_{(s,u)\in\mathbb{R}^2} p_{a+b}(s) q_{a,b}(u) \mathrm{d}s\mathrm{d}u = c,$$

d'où la formule pour $\beta(a, b)$. On déduit alors que les variables S et U sont indépendantes, de lois respectives $\Gamma(a + b)$ et $\beta(a, b)$.

(3) Soient $X \sim \Gamma(a)$, $Y \sim \Gamma(b)$ et $Z \sim \Gamma(c)$ trois variables indépendantes. Posons $S = X + Y \sim \Gamma(a + b)$ et $U = X/(X + Y) \sim \beta(a, b)$. Puisque Z est indépendante du couple (X, Y), Z est également indépendante du couple (S, U), et comme S et U sont

elles-mêmes indépendantes, les trois variables S, U et Z sont indépendantes. La variable $V = S/(S+Z)$ est donc indépendante de U et suit la loi $\beta(a+b,c)$. Par ailleurs,

$$UV = \frac{X}{X+Y}\frac{X+Y}{X+Y+Z} = \frac{X}{X+Y+Z}$$

suit la loi $\beta(a,b+c)$ puisque $Y+Z \sim \Gamma(b+c)$ est indépendante de X.

2. **Problème : borne gaussienne sur la densité de transition**

2.1. **Préliminaire : densité de transition du mouvement brownien.**

(1) Pour $t>0$, $\widehat{X}_t \sim \mathcal{N}(x,t)$, de densité

$$\widehat{p}_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right).$$

(2) Puisque $\alpha \in]0,1[$, pour tous $t>0$ et $x,y \in \mathbb{R}$, on a

$$\widehat{p}_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-(y-x)^2/2t} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-\alpha(y-x)^2/2t} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\widehat{p}^{\alpha}_t(x,y),$$

ce qui définit c^α.

(3) *Calcul direct.* Commençons par remarquer que

$$\frac{(x'-x)^2}{t} + \frac{(y-x')^2}{T-t} = \frac{T}{t(T-t)}\left(x' - \left(\frac{T-t}{T}x + \frac{t}{T}y\right)\right)^2 + \frac{(y-x)^2}{T},$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\int_{x'\in\mathbb{R}} \widehat{p}^{\alpha}_t(x,x')\widehat{p}^{\alpha}_{T-t}(x',y)\mathrm{d}x' \\
&= \frac{\alpha}{2\pi\sqrt{t(T-t)}} \int_{x'\in\mathbb{R}} \exp\left(-\alpha\left(\frac{(x'-x)^2}{t} + \frac{(y-x')^2}{T-t}\right)\right)\mathrm{d}x' \\
&= \frac{\alpha}{2\pi\sqrt{t(T-t)}} \exp\left(-\alpha\frac{(y-x)^2}{T}\right) \int_{x'\in\mathbb{R}} \exp\left(-\alpha\frac{T}{t(T-t)}\left(x' - \left(\frac{T-t}{T}x + \frac{t}{T}y\right)\right)^2\right)\mathrm{d}x' \\
&= \frac{\alpha}{2\pi\sqrt{t(T-t)}} \exp\left(-\alpha\frac{(y-x)^2}{T}\right)\sqrt{2\pi\frac{t(T-t)}{T\alpha}} \\
&= \widehat{p}^{\alpha}_T(x,y).
\end{aligned}$$

Produit de convolution. Notons que $\widehat{p}^{\alpha}_T(x,y)$ est la densité de $x + B_{T/\alpha}$, qui s'écrit

$$\left(x + B_{t/\alpha}\right) + \left(B_{T/\alpha} - B_{t/\alpha}\right).$$

D'après la propriété de Markov les deux termes sont indépendants, de lois respectives $\mathcal{N}(x,t/\alpha)$ et $\mathcal{N}(0,(T-t)/\alpha)$. La densité de la somme de ces deux variables aléatoires est donc égale au produit de convolution de leurs densités, ce qui donne directement l'identité attendue.

2.2. **Processus de diffusion.**

(1) D'après le théorème d'Itô, il suffit que b soit globalement lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

2.3. **Formulation *mild* de l'équation de Fokker–Planck.**

(1) Soit $y \in \mathbb{R}$. Il est clair que les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial t}\widehat{p}_t(x,y)$, $\frac{\partial}{\partial x}\widehat{p}_t(x,y)$ et $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\widehat{p}_t(x,y)$ existent et sont continues sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$; de plus un calcul direct montre que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\widehat{p}_t(x,y) &= \left(-\frac{1}{2t}+\frac{(y-x)^2}{2t^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right),\\ \frac{\partial}{\partial x}\widehat{p}_t(x,y) &= \frac{y-x}{t}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right),\\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\widehat{p}_t(x,y) &= \left(-\frac{1}{t}+\left(\frac{y-x}{t}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right),\end{aligned}$$

d'où l'identité demandée.

(2) Posons $\theta = |y-x|/\sqrt{t}\geq 0$ de sorte que

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\widehat{p}_t(x,y)\right| = \frac{\theta}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{\theta^2}{2}\right)\leq\frac{c_1}{t},$$

où nous avons défini

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sup_{\theta\geq 0}\theta\mathrm{e}^{-\theta^2/2}.$$

De même,

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\widehat{p}_t(x,y)\right|\leq\left(\frac{1}{t}+\frac{\theta^2}{t}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{\theta^2}{2}\right)\leq\frac{c_2}{t^{3/2}},$$

avec

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sup_{\theta\geq 0}(1+\theta^2)\mathrm{e}^{-\theta^2/2}.$$

(3) Soit $T'\in[0,T[$. Les estimations obtenues à la question précédente montrent que les dérivées de $\widehat{p}_{T-t}(x,y)$ sont bornées sur $[0,T']\times\mathbb{R}$, on peut donc écrire que Φ est de classe $C^{1,2}$ et vérifie

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,x) &= -\int_{y\in\mathbb{R}}\phi(y)\frac{\partial}{\partial t}\widehat{p}_{T-t}(x,y)\mathrm{d}y,\\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}(t,x) &= \int_{y\in\mathbb{R}}\phi(y)\frac{\partial}{\partial x}\widehat{p}_{T-t}(x,y)\mathrm{d}y,\\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(t,x) &= \int_{y\in\mathbb{R}}\phi(y)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\widehat{p}_{T-t}(x,y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la première question, on conclut que

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,x)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(t,x)=0.$$

pour tout $(t,x)\in[0,T']\times\mathbb{R}$.

(4) Pour $T'<T$, la fonction Φ est de classe $C^{1,2}$ sur $[0,T']\times\mathbb{R}$, la formule d'Itô donne donc

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Phi(t,X_t) &= \frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,X_t)\mathrm{d}t+\frac{\partial\Phi}{\partial x}(t,X_t)\mathrm{d}X_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(t,X_t)\mathrm{d}\langle X\rangle_t\\ &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right)(t,X_t)\mathrm{d}t+\frac{\partial\Phi}{\partial x}(t,X_t)\left(b(X_t)\mathrm{d}t+\mathrm{d}B_t\right).\end{aligned}$$

D'après la question précedente,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=0,$$

d'où en intégrant sur $[0,T']$,

$$\Phi(T',X_{T'}) = \Phi(0,x) + \int_{t=0}^{T'} \frac{\partial\Phi}{\partial x}(t,X_t)b(X_t)\mathrm{d}t + \int_{t=0}^{T'} \frac{\partial\Phi}{\partial x}(t,X_t)\mathrm{d}B_t.$$

Sur l'intervalle de temps $[0,T']$, on a

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(t,X_t)\right| \leq \int_{y\in\mathbb{R}} |\phi(y)|\frac{c_1}{T-t}\mathrm{d}y \leq \frac{c_1}{T-T'}\int_{y\in\mathbb{R}}|\phi(y)|\mathrm{d}y < +\infty,$$

ce qui assure que le processus $(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(t,X_t))_{t\in[0,T']}$ est dans $\mathbf{M}^2([0,T'])$ et donc que l'intégrale stochastique est dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{P})$ et d'espérance nulle ; de même, le théorème de Fubini permet de réécrire

$$\mathbb{E}\left[\int_{t=0}^{T'} \frac{\partial\Phi}{\partial x}(t,X_t)b(X_t)\mathrm{d}t\right] = \int_{t=0}^{T'} \mathbb{E}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}(t,X_t)b(X_t)\right]\mathrm{d}t,$$

d'où le résultat.

(5) Réécrivons, en utilisant la définition de $\widehat{p}_t(x,y)$,

$$\Phi(T',x) = \int_{y\in\mathbb{R}} \phi(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-T')}}\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2(T-T')}\right)\mathrm{d}y,$$

puis posons $u=(y-x)/\sqrt{T-T'}$ pour obtenir

$$\Phi(T',x) = \int_{u\in\mathbb{R}} \phi\left(x+u\sqrt{T-T'}\right)\frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}u.$$

Remarquons maintenant que $X_{T'}+u\sqrt{T-T'}$ converge presque sûrement vers X_T lorsque $T'\to T$, et que la fonction ϕ étant continue et à support compact, le théorème de convergence dominée (appliqué « oméga par oméga » dans l'intégrale en u) montre que

$$\lim_{T'\to T}\int_{u\in\mathbb{R}} \phi\left(X_{T'}+u\sqrt{T-T'}\right)\frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}u = \int_{u\in\mathbb{R}}\phi(X_T)\frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}u = \phi(X_T),$$

presque sûrement. Puisque cette intégrale est également bornée par $\|\phi\|_\infty$, une nouvelle application du théorème de convergence dominée, cette fois-ci dans l'espérance, permet de conclure que

$$\lim_{T'\to T}\mathbb{E}\left[\Phi(T',X_{T'})\right] = \mathbb{E}\left[\phi(X_T)\right].$$

(6) Dans l'intégrale

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial x}(t,x) &= \int_{y\in\mathbb{R}}\phi(y)\frac{\partial}{\partial x}\widehat{p}_{T-t}(x,y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{y\in\mathbb{R}}\phi(y)\frac{y-x}{T-t}\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2(T-t)}\right)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

posons également $u=(y-x)/\sqrt{T-t}$ pour obtenir

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(t,x) = \int_{u\in\mathbb{R}}\phi\left(x+u\sqrt{T-t}\right)\frac{u}{\sqrt{T-t}}\frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}u,$$

de sorte que

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(t,x)\right| \leq \|\phi\|_\infty\frac{\mathbb{E}[|G|]}{\sqrt{T-t}}, \qquad G\sim\mathcal{N}(0,1).$$

Ainsi, presque sûrement, pour tout $t\in[0,T[$,

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}(t,X_t)b(X_t)\right| \leq \|\phi\|_\infty\|b\|_\infty\frac{\mathbb{E}[|G|]}{\sqrt{T-t}},$$

ce qui assure l'intégrabilité sur $[0,T]$ de l'espérance de cette quantité.

(7) En passant à la limite $T' \to T$ dans l'identité obtenue à la question (4), on obtient

$$\mathbb{E}\left[\phi(X_T)\right] = \Phi(0,x) + \int_{t=0}^{T} \mathbb{E}\left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}(t,X_t)b(X_t)\right] \mathrm{d}t,$$

qui se réécrit

$$\int_{y\in\mathbb{R}} \phi(y)\mu_T(x,\mathrm{d}y) = \int_{y\in\mathbb{R}} \phi(y)\widehat{p}_T(x,y)\mathrm{d}y + \int_{t=0}^{T}\int_{x'\in\mathbb{R}} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t,x')b(x')\mu_t(x,\mathrm{d}x')\mathrm{d}t.$$

Le second terme du membre de droite est égal à

$$\int_{t=0}^{T}\int_{x'\in\mathbb{R}}\left(\int_{y\in\mathbb{R}} \phi(y)\frac{\partial}{\partial x}\widehat{p}_{T-t}(x',y)\mathrm{d}y\right) b(x')\mu_t(x,\mathrm{d}x')\mathrm{d}t.$$

À $t \in [0,T[$ fixé, le produit $\phi(y)\frac{\partial}{\partial x}\widehat{p}_{T-t}(x',y)b(x')$ est $\mu_t(x,\mathrm{d}x') \otimes \mathrm{d}y$-intégrable car ϕ est à support compact en y, le produit $\frac{\partial}{\partial x}\widehat{p}_{T-t}(x',y)b(x')$ est borné et $\mu_t(x,\mathrm{d}x')$ est une mesure de probabilité. Le théorème de Fubini permet donc d'écrire

$$\int_{x'\in\mathbb{R}}\left(\int_{y\in\mathbb{R}} \phi(y)\frac{\partial}{\partial x}\widehat{p}_{T-t}(x',y)\mathrm{d}y\right) b(x')\mu_t(x,\mathrm{d}x') = \int_{y\in\mathbb{R}} \phi(y)g(t,y)\mathrm{d}y,$$

avec $g(t,y)$ défini par l'énoncé.

(8) Pour tout $(t,y) \in [0,T[\times\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}|\phi(y)g(t,y)| &= \left|\phi(y)\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial x}\widehat{p}_{T-t}(X_t,y)b(X_t)\right]\right| \\ &\leq \|b\|_\infty \mathbb{E}\left[\left|\phi(y)\frac{|y-X_t|}{T-t}\frac{\mathrm{e}^{-(y-X_t)^2/2(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\right|\right],\end{aligned}$$

d'où, d'après le théorème de Fubini–Tonelli,

$$\int_{y\in\mathbb{R}} |\phi(y)g(t,y)|\mathrm{d}y \leq \|b\|_\infty \mathbb{E}\left[\int_{y\in\mathbb{R}}\left|\phi(y)\frac{|y-X_t|}{T-t}\frac{\mathrm{e}^{-(y-X_t)^2/2(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\right|\mathrm{d}y\right].$$

Posons à nouveau $u = (y-X_t)/\sqrt{T-t}$ dans l'intégrale, de sorte que

$$\begin{aligned}\int_{y\in\mathbb{R}}\left|\phi(y)\frac{|y-X_t|}{T-t}\frac{\mathrm{e}^{-(y-X_t)^2/2(T-t)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\right|\mathrm{d}y &= \int_{u\in\mathbb{R}}\left|\phi\left(X_t+u\sqrt{T-t}\right)\frac{|u|}{\sqrt{T-t}}\frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\right|\mathrm{d}u \\ &\leq \|\phi\|_\infty \frac{\mathbb{E}[|G|]}{\sqrt{T-t}},\end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\int_{t=0}^{T}\int_{y\in\mathbb{R}} |\phi(y)g(t,y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}t < +\infty,$$

et montre donc que $\phi(y)g(t,y)$ est intégrable sur $[0,T]\times\mathbb{R}$.

Nous pouvons donc appliquer le théorème de Fubini et déduire que

$$\int_{t=0}^{T}\left(\int_{y\in\mathbb{R}}\phi(y)g(t,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t = \int_{y\in\mathbb{R}}\phi(y)G_T(y)\mathrm{d}y,$$

avec

$$G_T(y) = \int_{t=0}^{T} g(t,y)\mathrm{d}t.$$

Ainsi,

$$\int_{y\in\mathbb{R}} \phi(y)\mu_T(x,\mathrm{d}y) = \int_{y\in\mathbb{R}} \phi(y)\left(\widehat{p}_T(x,y) + G_T(y)\right)\mathrm{d}y,$$

pour toute fonction continue et à support compact ϕ. Ceci montre que la mesure $\mu_T(x,\mathrm{d}y)$ possède une densité $p_T(x,y)$ qui coïncide avec $\widehat{p}_T(x,y) + G_T(y)$, $\mathrm{d}y$-presque partout. La fonction G_T se réécrit enfin

$$G_T(y) = \int_{t=0}^{T}\int_{x'\in\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x}\widehat{p}_{T-t}(x',y)b(x')p_t(x,x')\mathrm{d}x'\mathrm{d}t,$$

ce qui conclut.

2.4. **Opérateur $\mathcal{G}$ et borne gaussienne.**

(1) Puisque $\alpha \in]0,1[$, pour tous $t > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial}{\partial x}\widehat{p}_t(x,y)\right| &= \frac{|y-x|}{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{e}^{-(y-x)^2/2t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\frac{|y-x|\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-(1-\alpha)(y-x)^2/2t}\widehat{p}^{\alpha}_t(x,y) \\
&\le \frac{d^{\alpha}}{\sqrt{t}}\widehat{p}^{\alpha}_t(x,y),
\end{aligned}$$

avec

$$d^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\sup_{\theta\ge 0}\theta\mathrm{e}^{-\theta^2/2}.$$

(2) Le changement de variable $u = t/T$ montre que

$$\varphi_{\ell+1}(T) = \sqrt{T}\int_{u=0}^{1}\frac{\varphi_\ell(uT)}{\sqrt{1-u}}\mathrm{d}u.$$

Par récurrence sur $\ell \ge 0$, on obtient alors que

$$\varphi_\ell(T) = T^{\ell/2}\prod_{m=1}^{\ell}\beta\left(\frac{m+1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

(3) Pour $\ell = 0$, l'estimation obtenue à la première section et la définition de φ_0 donnent immédiatement $\widehat{p}_T(x,y) \le c^{\alpha}\varphi_0(T)\widehat{p}^{\alpha}_T(x,y)$. Procédons maintenant par récurrence et supposons l'inégalité vérifiée pour $\mathcal{G}^{\ell}\widehat{p}$. Alors

$$\begin{aligned}
\left|(\mathcal{G}^{\ell+1}\widehat{p})_T(x,y)\right| &= \left|\int_{t=0}^{T}\int_{x'\in\mathbb{R}}(\mathcal{G}^{\ell}\widehat{p})_t(x,x')b(x')\frac{\partial}{\partial x}\widehat{p}_{T-t}(x',y)\mathrm{d}x'\mathrm{d}t\right| \\
&\le \|b\|_\infty\int_{t=0}^{T}\int_{x'\in\mathbb{R}}\left|(\mathcal{G}^{\ell}\widehat{p})_t(x,x')\right|\left|\frac{\partial}{\partial x}\widehat{p}_{T-t}(x',y)\right|\mathrm{d}x'\mathrm{d}t \\
&\le c^{\alpha}\left(\|b\|_\infty d^{\alpha}\right)^{\ell+1}\int_{t=0}^{T}\int_{x'\in\mathbb{R}}\varphi_\ell(t)\widehat{p}^{\alpha}_t(x,x')\widehat{p}^{\alpha}_{T-t}(x',x)\mathrm{d}x'\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

La relation de Chapman–Kolmogorov permet d'obtenir

$$\int_{x'\in\mathbb{R}}\widehat{p}^{\alpha}_t(x,x')\widehat{p}^{\alpha}_{T-t}(x',x)\mathrm{d}x' = \widehat{p}^{\alpha}_T(x,y),$$

d'où

$$\left|(\mathcal{G}^{\ell+1}\widehat{p})_T(x,y)\right| \le c^{\alpha}\left(\|b\|_\infty d^{\alpha}\right)^{\ell+1}\varphi_{\ell+1}(T)\widehat{p}^{\alpha}_T(x,y).$$

(4) Commençons par remarquer que l'expression obtenue à la question (3) se réécrit, grâce au résultat de l'exercice 1,

$$\prod_{m=1}^{\ell} \beta\left(\frac{m+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \prod_{m=1}^{\ell} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} = \Gamma\left(1/2\right)^{\ell} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{\ell+2}{2}\right)},$$

pour tout $\ell \geq 1$. Puisque $\Gamma(1) = 1$, nous pouvons désormais réécrire le résultat de la question précédente sous la forme

$$\left|(\mathcal{G}^{\ell}\widehat{p})_T(x,y)\right| \leq c^{\alpha} \frac{\kappa(T)^{\ell}}{\Gamma\left(\frac{\ell+2}{2}\right)} \widehat{p}_T^{\alpha}(x,y),$$

où $\kappa(T) = \|b\|_{\infty} d^{\alpha} \sqrt{T}\Gamma(1/2)$. Notons que cette identité est également valable pour $\ell = 0$. Nous déduisons de la formule de Stirling que la série de terme général $\frac{\kappa(T)^{\ell}}{\Gamma\left(\frac{\ell+2}{2}\right)}$ converge, ce qui permet de poser

$$\overline{C}^{\alpha}(T) = c^{\alpha} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\kappa(T)^{\ell}}{\Gamma\left(\frac{\ell+2}{2}\right)}$$

et conclut.

2.5. **Représentation *parametrix* et conclusion.**

(1) Écrivons

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{G}^2 p)_T(x,y) \\
&= \int_{t=0}^{T} \int_{x'\in\mathbb{R}} \left(\int_{s=0}^{t} \int_{x''\in\mathbb{R}} p_s(x,x'') b(x'') \frac{\partial}{\partial x} \widehat{p}_{t-s}(x'',x') \mathrm{d}x'' \mathrm{d}s \right) b(x') \frac{\partial}{\partial x} \widehat{p}_{T-t}(x',y) \mathrm{d}x' \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
&\left|(\mathcal{G}^2 p)_T(x,y)\right| \\
&\leq (\|b\|_{\infty} d^{\alpha})^2 \int_{s=0}^{T} \int_{x''\in\mathbb{R}} p_s(x,x'') \int_{t=s}^{T} \frac{1}{\sqrt{(T-t)(t-s)}} \int_{x'\in\mathbb{R}} \widehat{p}_{t-s}^{\alpha}(x'',x') \widehat{p}_{T-t}^{\alpha}(x',y) \mathrm{d}x' \mathrm{d}t \mathrm{d}x'' \mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

La relation de Chapman–Kolmogorov permet à nouveau d'écrire

$$\int_{x'\in\mathbb{R}} \widehat{p}_{t-s}^{\alpha}(x'',x') \widehat{p}_{T-t}^{\alpha}(x',y) \mathrm{d}x' = \widehat{p}_{T-s}^{\alpha}(x'',y),$$

ce qui permet de sortir ce terme de l'intégrale en t. En posant $u = \frac{t-s}{T-s}$ dans celle-ci, on obtient

$$\int_{t=s}^{T} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(T-t)(t-s)}} = \int_{u=0}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u(1-u)}} = \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi.$$

Ainsi,

$$\left|(\mathcal{G}^2 p)_T(x,y)\right| \leq \pi(\|b\|_{\infty} d^{\alpha})^2 \int_{s=0}^{T} \int_{x''\in\mathbb{R}} p_s(x,x'') \widehat{p}_{T-s}^{\alpha}(x'',y) \mathrm{d}x'' \mathrm{d}s.$$

Écrivons maintenant

$$\widehat{p}_{T-s}^{\alpha}(x'',y) \leq \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi(T-s)}},$$

et utilisons le fait que $p_s(x,\cdot)$ est une densité de probabilité pour en déduire

$$\int_{s=0}^{T} \int_{x''\in\mathbb{R}} p_s(x,x'') \widehat{p}_{T-s}^{\alpha}(x'',y) \mathrm{d}x'' \mathrm{d}s \leq \int_{s=0}^{T} \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi(T-s)}} \mathrm{d}s = \sqrt{\frac{2\alpha T}{\pi}},$$

d'où le résultat.

(2) Commençons par écrire

$$\begin{aligned}\left|(\mathcal{G}^3 p)_T(x,y)\right| &\leq \|b\|_\infty d^\alpha \int_{t=0}^{T}\int_{x'\in\mathbb{R}} \left|(\mathcal{G}^2 p)_t(x,x')\right| \frac{1}{\sqrt{T-t}} \widehat{p}^\alpha(x',y)\mathrm{d}x'\mathrm{d}t \\ &\leq \|b\|_\infty d^\alpha Q^\alpha \int_{t=0}^{T} \frac{\varphi_1(T)}{\sqrt{T-t}} \int_{x'\in\mathbb{R}} \widehat{p}^\alpha(x',y)\mathrm{d}x'\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Puisque $\widehat{p}^\alpha(x',y)$ est symétrique en x' et y, on a

$$\int_{x'\in\mathbb{R}} \widehat{p}^\alpha(x',y)\mathrm{d}x' = \int_{x'\in\mathbb{R}} \widehat{p}^\alpha(y,x')\mathrm{d}x' = 1,$$

d'où

$$\left|(\mathcal{G}^3 p)_T(x,y)\right| \leq \|b\|_\infty d^\alpha Q^\alpha \varphi_2(T).$$

On déduit par récurrence, pour $L \geq 2$,

$$\left|(\mathcal{G}^L p)_T(x,y)\right| \leq Q^\alpha \left(\|b\|_\infty d^\alpha\right)^{L-2} \varphi_{L-1}(T).$$

D'après les questions précédentes, le membre de droite, qui ne dépend pas de x, y, converge vers 0 lorsque $L \to +\infty$.