Corrigé de l'examen du cours de M2 : Méthodes numériques probabilistes

Mardi 5 janvier 2021, 13h00-16h00.

Problème 1 : variance asymptotique pour des chaînes de Markov non réversibles

1. C'est évident puisque $\pi P = \pi$.
2. Comme P est supposé irréductible, l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1, et est constitué de l'ensemble des contantes. Par conséquent, $(I-P) : \pi^\perp \to \pi^\perp$ est injectif (car $\mathrm{Ker}(I-P) \cap \pi^\perp = \{0\}$) et donc inversible.
3. Comme P est apériodique, on a que le rayon spectral de $P : \pi^\perp \to \pi^\perp$ est strictement inférieur à 1 :

$$\rho(P) = \max\{|\lambda|, \lambda \neq 1 \text{ valeur propre de } P\} = \max\{|\lambda|, \lambda \text{ valeur propre de } P : \pi^\perp \to \pi^\perp\} < 1.$$

Par ailleurs, pour toute norme matricielle, on a par la formule de Gelfand

$$\lim_{k\to\infty} \|P^k\|^{1/k} = \rho(P).$$

Par conséquent, il existe k_0 tel que $\|P^{k_0}\| < 1$. En choisissant pour norme matricielle une norme d'opérateur (donc telle que $\|P^k\| \leq \|P\|^k$), ceci montre que la série $\sum_{k\geq 0} P^k$ est normalement convergente. Il suffit pour cela de noter que $\sum_{k\geq 0} \|P^k\| = \sum_{r=0}^{k_0-1} \sum_{m\geq 0} \|P^{k_0 m + r}\| \leq \sum_{r=0}^{k_0-1} \|P^r\| \sum_{m\geq 0} \|P^{k_0}\|^m < \infty$. On en déduit que $(I-P)^{-1} = \sum_{k\geq 0} P^k$. Et donc $g(x) = \sum_{k\geq 0} (P^k \tilde{f})(x) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}_x(\tilde{f}(X_k))$.

Pour prouver la convergence de la série, on peut aussi utiliser le théorème de Dunford, comme dans la preuve du cours de la convergence géométrique de la marginale en temps pour une chaîne irréductible et apériodique. Une autre preuve plus élémentaire utilisant ce résultat du cours consiste à noter que pour tout $k \geq 0$, $P^k g - P^{k+1} g = P^k \tilde{f}$ et donc, pour tout $x \in E$ et pour tout $n \geq 0$

$$g(x) - (P^{n+1} g)(x) = \sum_{k=0}^{n} (P^k \tilde{f})(x).$$

On note que $\lim_{n\to\infty} (P^{n+1} g)(x) = (\pi g)(x) = 0$ car P est irréductible apériodique et admet π comme mesure invariante. On a donc

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (P^k \tilde{f})(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (P^k \tilde{f})(x).$$

4. On utiliser le fait que $\mathrm{Var}_\pi(f(X_0^P)) = \langle \tilde{f}, \tilde{f} \rangle_\pi$ et $\mathrm{Cov}_\pi(f(X_0^P), f(X_k^P)) = \langle \tilde{f}, P^k \tilde{f} \rangle_\pi$. On a donc

$$\begin{aligned}
\sigma^2(f, P) &= \langle \tilde{f}, \tilde{f} \rangle_\pi + 2 \left(\sum_{k\geq 0} \langle \tilde{f}, P^k \tilde{f} \rangle_\pi - \langle \tilde{f}, \tilde{f} \rangle_\pi \right) \\
&= -\langle \tilde{f}, \tilde{f} \rangle_\pi + 2 \langle g, \tilde{f} \rangle_\pi.
\end{aligned}$$

5. Soit $(x,y) \in E \times E$. Noter que nécessairement, $S(x,y) \geq 0$ et $P(x,y) \geq 0$. Si $S(x,y) > 0$, on a $|A(x,y)| < S(x,y)$ et donc $P(x,y) > 0$. Réciproquement, si $S(x,y) = 0$ alors $A(x,y) = 0$ et donc $P(x,y) = 0$.
6. On a bien $\forall (x,y) \in E \times E$, $P(x,y) \geq 0$, $\sum_{y\in E} P(x,y) = 1$ et $\sum_{x\in E} \pi(x)P(x,y) = \pi(y)$. De plus l'irréductibilité de S permet de montrer l'irréductibilité de P. En effet, pour tous points $(x,y) \in E \times E$, il existe un chemin dans $(x_0,\dots,x_n) \in E^{n+1}$ tel que $x_0 = x$, $x_n = y$ et $S(x_0,x_1)\dots S(x_{n-1},x_n) > 0$, et d'après la question précédente, nécessairement, $P(x_0,x_1)\dots P(x_{n-1},x_n) > 0$. Ceci implique que π est l'unique mesure invariante pour P. Enfin, la question précédente implique que $\{n \geq 1,\ S^n(x,x) > 0\} = \{n \geq 1,\ P^n(x,x) > 0\}$ et donc, l'apériodicité de S implique l'apériodicité de P.
7. Pour le produit scalaire $\langle \cdot,\cdot\rangle_\pi$, la matrice A est antisymétrique, et donc la matrice iA est hermitienne. En effet, pour toutes fonctions $u : E \to \mathbb{C}$ et $v : E \to \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\langle iAu, v\rangle_\pi &= \sum_{x\in E} \overline{i(Au)(x)}\, v(x)\, \pi(x) \\
&= -\sum_{x,y\in E^2} iA(x,y)\overline{u(y)}\, v(x)\, \pi(x) \\
&= \sum_{x,y\in E^2} iA(y,x)\overline{u(y)}\, v(x)\, \pi(y) \\
&= \sum_{y\in E} \overline{u(y)}\, (iAv)(y)\, \pi(y) \\
&= \langle u, iAv\rangle_\pi .
\end{aligned}$$

D'après le théorème spectral, la matrice A est donc diagonalisable, avec un spectre purement imaginaire. Soit $\lambda \in i\mathbb{R}$ une valeur propre et $u : E \to \mathbb{C}$ un vecteur propre associé : $\forall x \in E, \lambda u(x) = \sum_{y\in E} A(x,y)u(y)$. On peut supposer $\lambda \neq 0$ (car pour $\lambda = 0$, on a bien $|\lambda| < 1$). On a alors, pour tout $x \in E$ tel que $|u(x)| \neq 0$,

$$\begin{aligned}
|\lambda||u(x)| &= \left| \sum_{y\in E} A(x,y)u(y) \right| \\
&\leq \sum_{y\in E} |A(x,y)||u(y)| \\
&< \sum_{y\in E} S(x,y)|u(y)| \\
&\leq \left(\sum_{y\in E} S(x,y) \right) \max_{y\in E} |u(y)|.
\end{aligned}$$

A la deuxième inégalité, on a utilisé le fait qu'il existe nécessairement un $y \in E$ tel que $S(x,y)|u(y)| \neq 0$ (pour lequel on a ensuite écrit $|A(x,y)||u(y)| < S(x,y)|u(y)|$). En effet, si pour tout y, $S(x,y)|u(y)| = 0$, alors $|A(x,y)||u(y)| = 0$, et donc $\lambda = 0$ (car $|u(x)| \neq 0$). On considérant $x \in E$ tel que $|u(x)| = \max_{y\in E} |u(y)|$, on en déduit que $|\lambda| < 1$.
Remarquez que l'on peut affiner un peu cette inégalité en notant que (puisque $A(x,x) = 0$ pour

tout $x \in E$)

$$\begin{aligned}|\lambda||u(x)| &= \left|\sum_{y\neq x} A(x,y)u(y)\right| \\ &\leq \sum_{y\neq x} |A(x,y)||u(y)| \\ &< \sum_{y\neq x} S(x,y)|u(y)| \\ &\leq \left(\sum_{y\neq x} S(x,y)\right) \max_{y\in E} |u(y)|,\end{aligned}$$

ce qui montre que $|\lambda| < 1 - \min_{x\in E} S(x,x)$.

8. On conserve le fait que P est une matrice stochastique qui admet π comme mesure invariante. On note par ailleurs que $P(x,y) > 0 \Rightarrow S(x,y) > 0$. Cependant, puisqu'on peut avoir $A(x,y) = -S(x,y)$, il est possible que $P(x,y) = 0$ alors que $S(x,y) > 0$. Cependant, on a encore l'irréducibilité en utilisant un argument basé sur la forme de Dirichlet. Soit f_0 tel que $Pf_0 = f_0$, on veut montrer que f_0 est une fonction constante. On considère la forme de Dirichlet associée à P :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(f) &= -\sum_{x\in E} f(x)(P-I)f(x)\pi(x) \\ &= -\sum_{x\in E} f(x)(S-I)f(x)\pi(x) - \sum_{x\in E} f(x)Af(x)\pi(x) \\ &= -\sum_{x\in E} f(x)(S-I)f(x)\pi(x)\end{aligned}$$

la dernière égalité étant une conséquence du fait que par la propriété d'antisymétrie de A, $\langle f, Af\rangle_\pi = -\langle Af, f\rangle_\pi = 0$. Par conséquent, la forme de Dirichlet associée à P est égale à la forme de Dirichlet associée à S. Hors, comme S est supposée irréductible, on en déduit que f est nécessairement une constante. Par ailleurs, en reprenant l'argument de la question précédente, A est une matrice diagonalisable avec des valeurs propres purement imaginaires de module inférieur ou égale à 1.

Il reste deux questions non triviales : Est-ce que P est apériodique ? Est-ce que les valeurs propres de A peuvent être de module 1 ?

9. Dans la base orthonormée $(f_1, \ldots, f_{\mathsf{m}-1})$, S est une matrice diagonale de coefficients diagonaux $(d_1, \ldots, d_{\mathsf{m}-1})$, qui sont les valeurs propres de S sur $\pi^\perp$. Par définition, dans cette même base, $(I-S)^\alpha$ est une matrice diagonale de coefficients diagonaux $((1-d_1)^\alpha, \ldots, (1-d_{\mathsf{m}-1})^\alpha)$. Noter que cette définition fait sens pour tout α car les coefficients $(1-d_i)_{1\leq i\leq \mathsf{m}-1}$ sont non nuls, puisque S est supposée irréductible, et donc 1 est valeur propre simple et donc S n'a que des valeurs propres différentes de 1 sur $\pi^\perp = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_{\mathsf{m}-1})$. En fait, on a $d_i \in (-1, 1)$ puisque S est par ailleurs apériodique. La relation $(I-S)^\alpha (I-S)^\beta = (I-S)^{\alpha+\beta}$ est ensuite une conséquence directe de la définition. Comme $(I-S)^\alpha$ est une matrice diagonale dans une base orthonormée pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_\pi$, alors $(I-S)^\alpha$ est un opérateur symétrique sur $\pi^\perp$ pour ce même produit scalaire.

10. Noter que Q est un endomorphisme de $\pi^\perp$, bien défini grâce à la question précédente. De plus, Q est antisymétrique pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_\pi$ (car A est antisymétrique et $(I-S)^{-1/2}$

est symétrique). On en déduit par le théorème spectral qu'elle est diagonalisable dans une base orthonormale pour ce même produit scalaire, avec des valeurs propres imaginaires pures. Puisque les valeurs propres de Q sont purement imaginaires, les valeurs propres de $I-Q$ ne peuvent pas s'annuler, et donc $I-Q$ est inversible.

On note $(i\lambda_k, u_k)_{k=1,\ldots,\mathsf{m}-1}$ les valeurs propres et vecteurs propres associés de Q, avec $\lambda_k \in \mathbb{R}$ et $u_k : E \to \mathbb{C}$. Noter que $(u_1, \ldots, u_{\mathsf{m}-1})$ constitue une base orthonormée de $\pi^\perp$: pour $(i,j) \in \{1, \ldots, \mathsf{m}-1\}^2$, $\langle u_i, u_j\rangle_\pi = \delta_{i,j}$. On a bien sûr

$$\langle g, g\rangle_\pi = \sum_{k=1}^{\mathsf{m}-1} |g_k|^2$$

avec $g_k = \langle g, u_k\rangle_\pi \in \mathbb{C}$. De plus, on a $(I-Q)^{-1}g = \sum_{k=1}^{\mathsf{m}-1} \frac{g_k}{1-i\lambda_k} u_k$ et donc

$$\langle (I-Q)^{-1}g, g\rangle_\pi = \sum_{k=1}^{\mathsf{m}-1} \frac{|g_k|^2}{1+i\lambda_k}.$$

Comme $(I-Q)^{-1}g$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a $\langle (I-Q)^{-1}g, g\rangle_\pi \in \mathbb{R}$ et donc

$$\begin{aligned}
\langle (I-Q)^{-1}g, g\rangle_\pi &= \sum_{k=1}^{\mathsf{m}-1} |g_k|^2 \mathrm{Re}((1+i\lambda_k)^{-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{\mathsf{m}-1} \frac{|g_k|^2}{1+\lambda_k^2} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\mathsf{m}-1} |g_k|^2 \\
&= \langle g, g\rangle_\pi.
\end{aligned}$$

On a l'égalité $\langle (I-Q)^{-1}g, g\rangle_\pi = \langle g, g\rangle_\pi$ si et seulement si $\lambda_k \neq 0 \implies g_k = 0$ ce qui est équivalent à $g \in \ker(Q)$.

11. On écrit :

$$\begin{aligned}
I - P &= I - S - A \\
&= (I-S)^{1/2}(I-Q)(I-S)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Noter que puisque $I-P$ et $(I-S)^{1/2}$ (toujours vus comme des endomorphismes de $\pi^\perp$) sont inversibles, on retrouve le fait que $(I-Q)$ est inversible. On en déduit :

$$(I-P)^{-1} = (I-S)^{-1/2}(I-Q)^{-1}(I-S)^{-1/2}$$

et finalement (puisque $\tilde{f} \in \pi^\perp$) :

$$\begin{aligned}
\langle (I-P)^{-1}\tilde{f}, \tilde{f}\rangle_\pi &= \langle (I-S)^{-1/2}(I-Q)^{-1}(I-S)^{-1/2}\tilde{f}, \tilde{f}\rangle_\pi \\
&= \langle (I-Q)^{-1}(I-S)^{-1/2}\tilde{f}, (I-S)^{-1/2}\tilde{f}\rangle_\pi
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $(I-S)^{-1/2}$ est symétrique pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot\rangle_\pi$.

12. On a, en utilisant successivement les résultats de la question 4, 11, 10, 9 puis 4 à nouveau :

$$\begin{aligned}\sigma^2(f,P) &= 2\langle (I-P)^{-1}\tilde{f}, \tilde{f}\rangle_\pi - \langle \tilde{f}, \tilde{f}\rangle_\pi \\ &= 2\langle (I-Q)^{-1}(I-S)^{-1/2}\tilde{f}, (I-S)^{-1/2}\tilde{f}\rangle_\pi - \langle \tilde{f}, \tilde{f}\rangle_\pi \\ &\le 2\langle (I-S)^{-1/2}\tilde{f}, (I-S)^{-1/2}\tilde{f}\rangle_\pi - \langle \tilde{f}, \tilde{f}\rangle_\pi \\ &= 2\langle (I-S)^{-1}\tilde{f}, \tilde{f}\rangle_\pi - \langle \tilde{f}, \tilde{f}\rangle_\pi \\ &= \sigma^2(f,S).\end{aligned}$$

D'après la question 10, on a égalité si et seulement si $(I-S)^{-1/2}\tilde{f} \in \ker(Q)$ ce qui est équivalent à $(I-S)^{-1}\tilde{f} \in \ker(A)$.

13. C'est une conséquence de l'irréductibilité, qui permet pour tout éléments distincts x et y de E de construire un chemin de probabilité strictement positive pour S de x à y, puis de y à x, et donc un cycle de x à x pour S.

14. On a bien $\alpha > 0$ par hypothèse et donc il existe bien des $t \in (-\alpha, \alpha)$. Tout d'abord, on vérifie immédiatement que pour tout $x \in E$, $\sum_{y \in E} A_t(x,y) = 0$. Ensuite, en utilisant la définition de α, on a pour tout $x \in \{1, \ldots, \ell\}$, (avec la convention $\ell + 1 = 1$),

$$|A_t|(x,x+1) = \frac{|t|}{\pi(x)} < \frac{\alpha}{\pi(x)} \le \frac{\pi(x)S(x,x+1)}{\pi(x)} = S(x,x+1).$$

De même, en utilisant de plus la réversibilité de S, pour tout $x \in \{1, \ldots, \ell\}$, (avec la convention $0 = \ell$),

$$|A_t|(x,x-1) = \frac{|t|}{\pi(x)} < \frac{\alpha}{\pi(x)} \le \frac{\pi(x-1)S(x-1,x)}{\pi(x)} = \frac{\pi(x)S(x,x-1)}{\pi(x)} = S(x,x-1).$$

On en déduit que (2) est vérifié. Finalement, pour tout $x \in \{1, \ldots, \ell\}$, (avec la convention $\ell + 1 = 1$), $\pi(x)A_t(x,x+1) = t = -\pi(x+1)A_t(x+1,x)$ ce qui montre que $\forall (x,y) \in E \times E, \pi(x)A(x,y) = -\pi(y)A(y,x)$.

Problème 2 : une méthode d'échantillonnage d'importance pour des diffusions

1. C'est la formule de Feynman–Kac, vue dans le Théorème 8.2.1 du cours.
2. On peut simuler N trajectoires indépendantes $(X_s^{t,x,i})_{s\in[t,T]}$, $1 \le i \le N$, de l'EDS (4), en utilisant par exemple le schéma d'Euler–Maruyama vu en cours, puis approcher $u(t,x)$ par la moyenne empirique $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N f(X_T^{t,x,i})$.
3. On a (en supposant par convention que ∇ est un vecteur colonne et donc $\nabla^2 = \nabla\nabla^\top$)

$$\begin{aligned}L(\Phi\Psi) &= \frac{1}{2}a : \nabla^2(\Phi\Psi) + b^\top\nabla(\Phi\Psi) \\ &= \frac{1}{2}a : \nabla(\Psi\nabla^\top\Phi + \Phi\nabla^\top\Psi) + b^\top(\Psi\nabla\Phi + \Phi\nabla\Psi) \\ &= \frac{1}{2}a : \Big((\nabla\Psi)(\nabla^\top\Phi) + (\nabla\Phi)(\nabla^\top\Psi)\Big) + \Psi L\Phi + \Phi L\Psi.\end{aligned}$$

   On vérifie ensuite que $\frac{1}{2}a : \big((\nabla\Psi)(\nabla^\top\Phi) + (\nabla\Phi)(\nabla^\top\Psi)\big) = \sigma^\top\nabla\Phi \cdot \sigma^\top\nabla\Psi$.

4. Pour $0 \leq t \leq s \leq T$, la formule d'Itô donne

$$\begin{aligned} \mathrm{d}v(s, Y_s^{t,x}) &= \frac{\partial v}{\partial s}(s, Y_s^{t,x})\mathrm{d}s + M_s^\psi v(s, Y_s^{t,x})\mathrm{d}s + \nabla v(s, Y_s^{t,x}) \cdot \sigma(Y_s^{t,x})\mathrm{d}B_s \\ &= k(s, Y_s^{t,x})v(s, Y_s^{t,x})\mathrm{d}s + \sigma^\top(Y_s^{t,x})\nabla v(s, Y_s^{t,x}) \cdot \mathrm{d}B_s. \end{aligned}$$

5. Le processus $(Z_s^{t,x})_{s\in[t,T]}$ est à variation bornée, la formule d'intégration par parties donne donc

$$\mathrm{d}\left(v(s, Y_s^{t,x})Z_s^{t,x}\right) = \mathrm{d}v(s, Y_s^{t,x})Z_s^{t,x} + v(s, Y_s^{t,x})\mathrm{d}Z_s^{t,x} = Z_s^{t,x}\sigma^\top(Y_s^{t,x})\nabla v(s, Y_s^{t,x}) \cdot \mathrm{d}B_s$$

   d'après le résultat de la question précédente. En intégrant cette identité sur $[t, T]$ et en utilisant le fait que $Y_t^{t,x} = x$ d'une part et $v(T, Y_T^{t,x}) = g(Y_T^{t,x})$ d'autre part, on obtient le résultat annoncé.
6. Il suffit de montrer que, dans la formule de la question précédente, l'espérance de l'intégrale stochastique est bien définie, et nulle. Pour cela, on remarque que le processus $s \mapsto Z_s^{t,x}\sigma^\top(Y_s^{t,x})\nabla v(s, Y_s^{t,x})$ est borné, car les fonctions k, σ et ∇v le sont, ce qui permet d'appliquer l'isométrie d'Itô.
7. Par définition de M_t^ψ et en utilisant la question 3,

$$\begin{aligned} M_t^\psi v^\psi &= (L + a\nabla\psi \cdot \nabla)\left(u^\psi \mathrm{e}^{-\psi}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-\psi}Lu^\psi + u^\psi L\mathrm{e}^{-\psi} + \Gamma(u^\psi, \mathrm{e}^{-\psi}) + \mathrm{e}^{-\psi}a\nabla\psi \cdot \nabla u^\psi + u^\psi a\nabla\psi \cdot \nabla\mathrm{e}^{-\psi}. \end{aligned}$$

   Puisque

$$\Gamma(u^\psi, \mathrm{e}^{-\psi}) = \sigma^\top\nabla u^\psi \cdot \sigma^\top\nabla\mathrm{e}^{-\psi} = -\mathrm{e}^{-\psi}a\nabla u^\psi \cdot \nabla\psi,$$

   on obtient

$$M_t^\psi v^\psi = \mathrm{e}^{-\psi}Lu^\psi + u^\psi L\mathrm{e}^{-\psi} + u^\psi a\nabla\psi \cdot \nabla\mathrm{e}^{-\psi}.$$

   Explicitons maintenant

$$a\nabla\psi \cdot \nabla\mathrm{e}^{-\psi} = -\mathrm{e}^{-\psi}\left|\sigma^\top\nabla\psi\right|^2$$

   d'une part, et

$$\begin{aligned} L\mathrm{e}^{-\psi} &= \frac{1}{2}a : \nabla^2\mathrm{e}^{-\psi} + b \cdot \nabla\mathrm{e}^{-\psi} \\ &= \frac{1}{2}a : \nabla\left(-\nabla\psi\mathrm{e}^{-\psi}\right) + b \cdot \left(-\nabla\psi\mathrm{e}^{-\psi}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-\psi}\left(-L\psi + \frac{1}{2}\left|\sigma^\top\nabla\psi\right|^2\right) \end{aligned}$$

   d'autre part, d'où le résultat.
8. Si g^ψ et k^ψ vérifient les hypothèses de la section précédente, alors d'après la question 6, la fonction v^ψ est de classe $C^{1,2}$ sur $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ et vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v^\psi}{\partial t} + M_t^\psi v^\psi = k^\psi v^\psi, & t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ v^\psi(T, x) = g^\psi(x). \end{cases}$$

   On en déduit que u^ψ est de classe $C_b^{1,2}$ et vérifie

$$\frac{\partial u^\psi}{\partial t} = \mathrm{e}^\psi\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}v^\psi + \frac{\partial v^\psi}{\partial t}\right) = \mathrm{e}^\psi\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}v^\psi - M_t^\psi v^\psi + k^\psi v^\psi\right).$$

D'après la définition de k^ψ et le résultat de la question précédente,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^\psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} v^\psi - M_t^\psi v^\psi + k^\psi v^\psi \right) \\
&= \frac{\partial \psi}{\partial t} u^\psi - \left(L u^\psi - u^\psi L\psi - \frac{1}{2} u^\psi \left| \sigma^\top \nabla \psi \right|^2 \right) + \left(- \frac{\partial \psi}{\partial t} - L\psi - \frac{1}{2} \left| \sigma^\top \nabla \psi \right|^2 \right) u^\psi \\
&= -L u^\psi.
\end{aligned}$$

9. On a $u^\psi(T,x) = \mathrm{e}^{\psi(T,x)} v^\psi(T,x) = \mathrm{e}^{\psi(T,x)} g^\psi(x) = f(x)$.
10. Puisque u^ψ est de classe $C_b^{1,2}$ et vérifie (7), la formule de Feynman–Kac implique que $u^\psi = u$. On en déduit que, pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$,
$$u(t,x) = u^\psi(t,x) = \mathbb{E}\left[f(Y_T^{t,x}) W_\psi^{t,x} \right],$$
avec
$$W_\psi^{t,x} = \exp\left(-\psi(T, Y_T^{t,x}) + \psi(t,x) - \int_{s=t}^T k^\psi(s, Y_s^{t,x}) \mathrm{d}s \right).$$
11. Le théorème central limite donne
$$\mathcal{I}_N^\pm = \hat{u}_N(t,x) \pm \phi_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{V^\psi(t,x)}{N}},$$
avec ϕ_r le quantile d'ordre r de la loi normale standard.
12. Puisque $u(t,x) = \mathbb{E}[f(X_T^{t,x})]$ on a $u(t,x) \geq c$ pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$.
13. Puisque $u \geq c > 0$ et est de classe $C_b^{1,2}$, ψ est également de classe $C_b^{1,2}$. On a alors
$$\nabla \psi = \nabla \ln u = \frac{\nabla u}{u},$$
puis
$$\nabla^2 \psi = \nabla \frac{\nabla u}{u} = \frac{\nabla^2 u}{u} - \frac{\nabla u (\nabla u)^\top}{u^2}.$$
Ainsi,
$$L\psi = \frac{Lu}{u} - \frac{1}{2u^2} \left| \sigma^\top \nabla u \right|^2.$$
On en déduit que
$$\begin{aligned}
k^\psi &= -\frac{\partial \psi}{\partial t} - L\psi - \frac{1}{2} \left| \sigma^\top \nabla \psi \right|^2 \\
&= -\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{Lu}{u} + \frac{1}{2u^2} \left| \sigma^\top \nabla u \right|^2 - \frac{1}{2} \left| \sigma^\top \frac{\nabla u}{u} \right|^2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$
puisque $\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = 0$. Ainsi,
$$W_\psi^{t,x} = \exp\left(-\psi(T, Y_T^{t,x}) + \psi(t,x) \right) = \exp\left(-\ln u(T, Y_T^{t,x}) + \ln u(t,x) \right) = \frac{u(t,x)}{f(Y_T^{t,x})}.$$
14. Avec le choix $\psi = \ln u$, on a finalement $f(Y_T^{t,x}) W_\psi^{t,x} = u(t,x)$, presque sûrement. L'estimateur $\hat{u}^n(t,x)$ est donc de variance nulle. Bien sûr, comme pour le cas vu en cours, pour simuler la trajectoire $(Y_s^{t,x})_{s \in [t,T]}$ correspondant à ce choix, il est nécessaire de connaître u, or c'est cette quantité que l'on souhaite estimer. L'estimateur optimal $\hat{u}^n(t,x)$ n'est donc pas calculable en pratique. Néanmoins il donne une indication de comment choisir une « bonne » fonction d'importance : si l'on dispose d'une approximation $\tilde{u}$ de u alors $\tilde{\psi} := \ln \tilde{u}$ a des chances de donner un estimateur de u avec une variance réduite.