Loi du temps d'occupation de la demi-droite par le mouvement Brownien

Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien unidimensionnel issu de 0. On s'intéresse à la loi de la variable aléatoire

$$\Pi_t = \int_0^t \mathbf{1}_{W_s \geq 0} \mathrm{d}s,$$

qui est le temps passé par W_t sur la demi-droite $x \geq 0$ entre 0 et t.

Dans tout l'exercice, les fonctions f et g sont mesurables à valeurs réelles et la fonction g est minorée par une constante $C > 0$.

1. Soit τ un réel strictement positif et u une solution de l'équation parabolique suivante

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \frac{1}{2}\Delta u(t,x) - g(t,x)u(t,x) & \text{pour } (t,x) \in]0,\tau[\times\mathbb{R} \text{ ;} \\ u(0,x) = f(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

de classe $\mathcal{C}^{1,2}$ sur $]0,\tau[\times\mathbb{R}$ et continue sur $[0,\tau[\times\mathbb{R}$ vérifiant $|u(t,x)| \leq Ke^{|x|^2/2\tau}$ pour $t < \tau$. Montrer que u est donnée par l'expression

$$u(t,x) = \mathbb{E}\left[f(x+W_t)e^{-\int_0^t g(x+W_s)\mathrm{d}s}\right].$$

2. Montrer que si u est une solution de (1), alors la moyenne temporelle de u définie par

$$\varphi(x) = \int_0^\infty u(t,x)\mathrm{d}t$$

vérifie, au moins formellement, l'équation elliptique

$$\frac{1}{2}\Delta\varphi(x) - g(x)\varphi(x) + f(x) = 0, \text{ pour } x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

La représentation probabiliste naturelle de la solution de (2) est donc

$$\varphi(x) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty f(x+W_t)e^{-\int_0^t g(x+W_s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t\right]. \tag{3}$$

3. Montrer que la condition

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty |f(x+W_t)|e^{-Ct}\mathrm{d}t\right] < \infty$$

est équivalente à la condition

$$\int_{-\infty}^\infty |f(x+y)|e^{-|y|\sqrt{2C}}\mathrm{d}y < \infty.$$

4. Montrer que si une fonction h continue par morceaux vérifie la condition donnée en question 3, alors la fonction définie par

$$\Re h(x) = \int_0^\infty h(x+W_t)e^{-Ct}\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux et de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie

$$(\Re h)''(x) = 2C\Re h(x) - 2h(x)$$

en tout point où elle est deux fois dérivable.

5. Montrer que si f et g sont continues par morceaux et vérifient la condition énoncée en question 3 (on rappelle que $0 < C \leq g(x)$ sur $\mathbb{R}$) alors la fonction φ définie par (3) est deux fois dérivable, avec φ'' continue par morceaux et vérifie l'équation (2) au sens classique aux points de continuités de f et g. (On pourra montrer que $\Re f - \varphi = \Re(g\varphi) - C\Re\varphi$).

6. Soient α et β deux réels strictement positifs. Montrer que la fonction z définie par la formule

$$z(x) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\int_0^t \alpha \mathbf{1}_{x+W_s>0}+\beta \mathbf{1}_{x+W_s<0}\mathrm{d}s}\mathrm{d}t\right]$$

est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et satisfait l'équation

$$\frac{1}{2}z''(x) - (\alpha \mathbf{1}_{x>0} + \beta \mathbf{1}_{x<0})\, z(x) + 1 = 0$$

pour $x \neq 0$, avec les conditions au bord

$$z(0^+) = z(0^-) \text{ et } z'(0^+) = z'(0^-).$$

7. En déduire que

$$z(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{\alpha\sqrt{\beta}} e^{-x\sqrt{2\alpha}} + \frac{1}{\alpha} & \text{pour } x > 0 \\ \frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\beta\sqrt{\alpha}} e^{x\sqrt{2\beta}} + \frac{1}{\beta} & \text{pour } x < 0 \end{cases}.$$

8. Établir l'égalité

$$\int_0^\infty e^{-at} \int_0^t \frac{e^{-bs}\mathrm{d}s}{\sqrt{s(t-s)}}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{a(a+b)}}.$$

9. En déduire que la loi de Π_t admet pour densité

$$\frac{1}{\pi}\frac{\mathbf{1}_{[0,t]}(s)}{\sqrt{s(t-s)}}$$

On pourra étudier la quantité $\int_0^\infty e^{-at}\mathbb{E}\left[e^{-b\Pi_t}\right]\mathrm{d}t$.