Loi du temps d'occupation d'un demi-espace par le mouvement Brownien : corrigé

1. Soit $T < \tau$. On applique la formule d'Itō au processus

$$X_t = u(T-t, x+W_t)e^{-\int_0^t g(x+W_s)\mathrm{d}s},$$

ce qui donne

$$\mathrm{d}X_t = e^{-\int_0^t g(x+W_s)\mathrm{d}s}\left[\left(-\partial_t u + \frac{1}{2}\Delta u - g\cdot u\right)(T-t, x+W_t)\mathrm{d}t + \partial_x u(T-t, x+W_t)\mathrm{d}W_t\right].$$

La partie à variations bornées est nulle car la fonction u vérifie l'équation (1). On a donc, en intégrant de 0 à $T_n = (T - \frac{1}{n}) \wedge \inf\{t,\ |W_t| \geq n\}$

$$u(T-T_n, x+W_{T_n})e^{-\int_0^{T_n} g(x+W_s)\mathrm{d}s} - u(T,x) = \int_0^{T_n} \partial_x u(T-t, x+W_t)e^{-\int_0^t g(x+W_s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}W_t$$

(on ne peut pas intégrer de 0 à T car $\partial_x u(T-t, x+W_t)$ n'est pas forcément $\mathbb{L}^2$ pour $t \to T$). Comme l'intégrale stochastique est de moyenne nulle, on trouve, en passant à l'espérance

$$u(T,x) = \mathbb{E}\left[u(T-T_n, x+W_{T_n})e^{-\int_0^{T_n} g(x+W_s)\mathrm{d}s}\right].$$

On obtient le résultat voulu en passant à la limite $n \to \infty$, par convergence dominée : en effet, par l'hypothèse de croissance sur u, on a la domination, pour une certaine constante K',

$$\begin{aligned}|u(T-T_n, x+W_{T_n})| \leq \sup_{t\leq T}|u(T-t, x+W_t)| &\leq \sup_{t\leq T} Ke^{(W_t+x)^2/2\tau}\\ &\leq \sup_{t\leq T} K'e^{W_t^2/2\tau}\\ &= K'e^{(\sup_{t\leq T} W_t)^2/2\tau}.\end{aligned}$$

De plus, la variable aléatoire $\sup_{t\leq T} W_t$ a même loi que $\sqrt{T}|G|$, où G est une gaussienne centrée réduite. Par conséquent,

$$\mathbb{E}\sup_{t\leq T} e^{W_t^2/2\tau} = \mathbb{E}e^{\frac{T}{\tau}G^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{\left(\frac{T}{\tau}-1\right)x^2/2}\mathrm{d}x < \infty,$$

puisque $T < \tau$.

2. La fonction φ vérifie formellement

$$\frac{1}{2}\Delta\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \Delta u(t,x)\mathrm{d}t = \int_0^\infty (\partial_t u(t,x) + g(x)u(t,x))\,\mathrm{d}t = u(\infty, t) - f(x) + g(x)\varphi(x),$$

ce qui donne le résultat si $u(t,x)$ tend vers 0 pour $t \to \infty$.

3. Après une intervertion d'intégrales, il suffit de montrer que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-Ct}e^{-y^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{d}t = \frac{e^{-|y|\sqrt{2C}}}{\sqrt{2C}}.$$

Le changement de variables $\tilde{t} = 2Ct$ nous ramène au cas $C = 1/2$. Il suffit donc de montrer que la fonction

$$\psi(y) = \int_0^\infty \frac{e^{-t/2}e^{-y^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{d}t$$

vaut $\psi(y) = e^{-|y|}$. Or, par les théorème de continuité et dérivabilité sous l'intégrale, ψ est continue sur $[0,\infty[$ et dérivable sur $]0,\infty[$. De plus, pour $y > 0$

$$\psi'(y) = -\int_0^\infty \frac{ye^{-t/2}e^{-y^2/2t}}{t^{3/2}\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}t = -\psi(y)$$

(faire le changement de variables $\tilde{t} = \frac{y^2}{t}$), et

$$\psi(0) = \int_0^\infty \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{2\pi t}}\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty \frac{e^{-s^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}s = 1$$

(poser $t = s^2$), d'où $\psi(y) = e^{-y}$, pour $y \geq 0$. On conclut par parité de ψ.

4. La question précédente montre

$$\Re h(x)=\mathbb{E}\left[\int_0^\infty h(x+W_t)e^{-Ct}\mathrm{d}t\right]=\frac{1}{\sqrt{2C}}\int_{\mathbb{R}}h(y)e^{-|x-y|\sqrt{2C}}\mathrm{d}y.$$

En adaptant la preuve du théorème de dérivation sous l'intégrale (prendre une suite $\varepsilon_n\to 0$, considérer $\frac{\Re h(x+\varepsilon_n)-\Re h(x)}{\varepsilon_n}$ et apliquer le théorème de convergence dominée), on voit que $\Re h$ est dérivable en tout point et que

$$(\Re h)'(x)=-\int_{-\infty}^x h(y)e^{(y-x)\sqrt{2C}}\mathrm{d}y+\int_x^\infty h(y)e^{(x-y)\sqrt{2C}}\mathrm{d}y.$$

Par le théorème de continuité sous l'intégrale, $(\Re h)'$ est bien une fonction continue. De plus, si h est continue en x,

$$(\Re h)''(x)=\sqrt{2C}\left(\int_{-\infty}^x h(y)e^{(y-x)\sqrt{2C}}\mathrm{d}y+\int_x^\infty h(y)e^{(x-y)\sqrt{2C}}\mathrm{d}y\right)-2h(x)=2C\Re h(x)-2h(x).$$

5. On peut écrire

$$1-e^{-\int_0^t g(x+W_s)-C\mathrm{d}s}=\int_0^t(g(x+W_s)-C)e^{-\int_s^t g(x+W_\tau)-C\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s,$$

ce qui donne, en intervertissant les intégrales (les variables aléatoires considérées ont été supposées intégrables) et en utilisant la propriété de Markov,

$$\begin{aligned}\Re f(x)-\varphi(x)&=\mathbb{E}\left[\int_0^\infty f(x+W_t)\left(e^{-Ct}-e^{-\int_0^t g(x+W_s)\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}t\right]\\&=\mathbb{E}\left[\int_0^\infty f(x+W_t)e^{-Ct}\int_0^t(g(x+W_s)-C)e^{-\int_s^t g(x+W_\tau)-C\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right]\\&=\mathbb{E}\left[\int_0^\infty(g(x+W_s)-C)\int_s^\infty f(x+W_t)e^{-Ct}e^{-\int_s^t g(x+W_\tau)-C\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}t\mathrm{d}s\right]\\&=\mathbb{E}\left[\int_0^\infty(g(x+W_s)-C)\int_0^\infty f(x+W_{t+s})e^{-C(t+s)}e^{-\int_s^{t+s} g(x+W_\tau)-C\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}t\mathrm{d}s\right]\\&=\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-Cs}(g(x+W_s)-C)\int_0^\infty f(x+W_{t+s})e^{-\int_0^t g(x+W_{\tau+s})\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}t\mathrm{d}s\right]\\&=\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-Cs}(g(x+W_s)-C)\mathbb{E}\left[\int_0^\infty f(x+W_{t+s})e^{-\int_0^t g(x+W_{\tau+s})\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}t\,\middle|\,W_s\right]\mathrm{d}s\right]\\&=\mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-Cs}(g(x+W_s)-C)\varphi(x+W_s)\mathrm{d}s\right]\\&=\Re(g\varphi)(x)-C\Re\varphi(x).\end{aligned}$$

Cette équation, avec la question 4, jusitifie le calcul suivant aux points de continuité de f et g,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\varphi''(x)&=\frac{1}{2}\left(\Re\left(f-g\varphi+C\varphi\right)\right)''(x)\\&=C\Re\left(f-g\varphi+C\varphi\right)(x)-\left(f-g\varphi+C\varphi\right)(x)\\&=C\varphi(x)-\left(f(x)-g(x)\varphi(x)+C\varphi(x)\right)\\&=-f(x)+g(x)\varphi(x),\end{aligned}$$

ce qui montre que φ vérifie l'équation (2).

6. C'est une application de la question précédente avec $f=1$ et $g=\alpha\mathbf{1}_{x>0}+\beta\mathbf{1}_{x<0}$ qui est discontinue en 0. Les conditions en 0^+ et 0^- viennent du fait que z est de classe $\mathcal{C}^1$.

7. Sur $]0,\infty[$ et sur $]-\infty,0[$, la fonction z est solution d'une équation différentielle linéaire avec second membre. Sur $]0,\infty[$, la constante $\frac{1}{\alpha}$ est solution particulière. Sur $]0,\infty[$, la solution générale de l'équation sans second membre est $Ae^{-\sqrt{2\alpha}x}+Be^{\sqrt{2\alpha}x}$. Comme z est bornée (au vu de sa définition), on a $B=0$. La fonction z prend donc la forme $Ae^{-\sqrt{2\alpha}x}+\frac{1}{\alpha}$ sur $]0,\infty[$. Un raisonnement symétrique sur $]-\infty,0[$ donne une expression $\tilde{A}e^{\sqrt{2\beta}x}+\frac{1}{\beta}$. On calcule les coefficients A et $\tilde{A}$ en utilisant la condition au bord qui donne un système linéaire inversible satisfait par A et $\tilde{A}$.

8. On intervertit les deux intégrales par Fubini, puis on fait le changement de variables $(\tilde{s}, \tilde{t}) = (s, t-s)$ pour séparer les variables. Enfin, on calcule

$$\int_0^\infty \frac{e^{-at}}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

par le changement de variables $u = \sqrt{t}$ (comme en question 3).

9. Par la question 7, appliquée au cas $\alpha = a$, $\beta = a + b$, on a

$$\int_0^\infty e^{-at} \mathbb{E}\left[e^{-b\Pi_t}\right] \mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^t a + b\mathbf{1}_{W_s \geq 0} \mathrm{d}s}\right] \mathrm{d}t = z(0) = \frac{1}{\sqrt{a(a+b)}}.$$

L'injectivité de la transformée de Laplace permet alors de conclure, puisque la loi μ_t de Π_t satisfait

$$\int_0^\infty e^{-at} \int_0^t e^{-bs} \mu_t(\mathrm{d}s) \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{a(a+b)}} = \int_0^\infty e^{-at} \int_0^t \frac{e^{-bs} \mathrm{d}s}{\pi \sqrt{s(t-s)}} \mathrm{d}t.$$