Récurrence et transience du mouvement Brownien

On s'intéresse aux propriétés de récurrence et de transience du mouvement Brownien en fonction de la dimension. Plus précisément, on montre que le mouvement Brownien est récurrent en dimensions 1 et 2, et qu'il est transient en dimensions supérieures.

On considère un mouvement Brownien standard $d-$dimensionnel W, qui sous la probabilité $\mathbb{P}_x$ est issu de x. L'espérance sous $\mathbb{P}_x$ est notée $\mathbb{E}_x$.

1. Dans cette question, G est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, $x \in G$ et on définit $T_G = \inf\{t \geq 0, W_t \notin G\}$ le temps de sortie de G.

   (a) Montrer que T_G est presque sûrement fini.

   (b) Soit $\varphi : G \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ harmonique sur G (*i.e.* telle que $\Delta\varphi \equiv 0$) se prolongeant en une fonction continue sur $\bar{G}$. Montrer que

   $$\mathbb{E}_x\varphi(W_{T_G}) = \varphi(x).$$

   (On commencera par utiliser le temps d'arrêt borné $T_G \wedge n$).

   (c) En déduire que si le problème de Dirichlet

   $$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & \text{sur } G \\ \varphi(x) = f(x) & \text{sur } \partial G \end{cases},$$

   avec une condition aux bords continue f donnée admet une solution au sens classique, cette solution est la fonction $\varphi(x) = \mathbb{E}_x f(W_{T_G})$.

2. **Dimension 1 :** Soit $G =]a, b[$, et x un élément de G. Montrer que

   $$\mathbb{P}_x(W_{T_G} = a) = \frac{b-x}{b-a}, \quad \mathbb{P}_x(W_{T_G} = b) = \frac{x-a}{b-a}$$

   (chercher une fonction harmonique sur G valant 0 en a et 1 en b, et réciproquement).

   En déduire que pour $G = \mathbb{R} \setminus \{a\}$, le temps T_{G_a} est presque sûrement fini. Le mouvement Brownien est donc *récurrent* en dimension 1.

3. On suppose $d \geq 2$. Montrer que les fonctions harmoniques de la forme $\varphi(x) = f(\|x\|^2)$ sur une "couronne" $G_{R,r} = \{x \in \mathbb{R}^d, r \leq \|x\| \leq R\}$ sont de la forme

   $$\begin{cases} a\log(\|x\|) + b & \text{si } d = 2 \\ a\|x\|^{2-d} + b & \text{si } d \geq 3 \end{cases}.$$

4. **Dimension 2 et plus :** Soit x un élément de $\mathbb{R}^d$, et $r < \|x\| < R$. On note S_r et S_R les temps d'atteinte respectif des sphères de rayons r et R.

   (a) Montrer qu'on a, en dimension 2 :

   $$\mathbb{P}_x(\|W_{T_{G_{R,r}}}\| = r) = \frac{\log R - \log\|x\|}{\log R - \log r}, \quad \mathbb{P}_x(\|W_{T_{G_{R,r}}}\| = R) = \frac{\log\|x\| - \log r}{\log R - \log r},$$

   et en dimension 3 :

   $$\mathbb{P}_x(\|W_{T_{G_{R,r}}}\| = r) = \frac{R^{2-d} - \|x\|^{2-d}}{R^{2-d} - r^{2-d}}, \quad \mathbb{P}_x(\|W_{T_{G_{R,r}}}\| = R) = \frac{\|x\|^{2-d} - r^{2-d}}{R^{2-d} - r^{2-d}},$$

   En remarquant que $\mathbb{P}_x(\|W_{T_{G_{R,r}}}\| = r) = \mathbb{P}_x(S_r < S_R)$, déduire $\mathbb{P}_x(S_0 < \infty) = 0$. La probabilité pour que le mouvement Brownien touche un point fixé est donc nulle.

   (b) En dimension 2, montrer que $\mathbb{P}_x(S_r < \infty) = 1$ pour tout $r > 0$. Le mouvement Brownien plan est donc *récurrent en un sens faible.*

   (c) En dimension 3 ou plus, montrer que $\mathbb{P}_x(S_r < \infty) = \left(\frac{r}{\|x\|}\right)^{d-2}$. Le mouvement Brownien est donc *transient.*