Fractions continues : étude d'un algorithme sur une surface de Veech

T. LELIEVRE *

2 octobre 2001

Résumé

Dans une première partie, on rappelle et démontre des propriétés générales sur l'algorithme des fractions continues classique et sur l'algorithme des fractions continues au plus proche entier : convergence, notion de meilleures approximations, propriétés dynamiques, théorème de Lévy. Ceci nous permet de comparer les vitesses de convergence des deux algorithmes. On donne également des interprétations géométriques de l'algorithme classique. Dans une deuxième partie, on décrit un nouvel algorithme sur une surface de Veech (l'octogone régulier dont on a identifié les côtés opposés) récemment introduit par Pierre Arnoux et Pascal Hubert. On donne ensuite quelques éléments de réponse à un problème ouvert pour cet algorithme : déterminer les directions pour lesquelles l'algorithme se termine.

Abstract

In the first part, we give the main properties of the classical continued fraction algorithm and of the nearest integer continued fraction algorithm : convergence, best approximations results, dynamical properties, Levy theorem. Thus, we can draw a comparison between the two algorithms. We also give geometric interpretations of the classical algorithm. In the second part, we introduce a new continued fraction algorithm recently discovered by Pierre Arnoux and Pascal Hubert. This algorithm is defined on a Veech surface, namely the regular octogone on which opposite sides are identified. We finally give a few results about the research of the rational directions (i.e. the directions for which the algorithm ends) that is still an open question.

*Rapport du stage de fin d'étude de l'Ecole Polytechnique effectué à la Faculté des Sciences de Luminy (Marseille) sous la direction de Pierre Arnoux.

0 Introduction

La théorie des fractions continues constitue une branche importante des mathématiques. C'est un exemple d'objet mathématique qui intervient dans plusieurs domaines assez distincts. En arithmétique tout d'abord, elles permettent de mieux comprendre comment les rationnels approchent les irrationnels. Elles interviennent également dans des équations diophantiennes (équations de Pell) et permettent de caractériser de manière simple un nombre quadratique. En théorie de la mesure d'autre part, elles fournissent un exemple de système dynamique non trivial et ont permis de poser de nombreuses questions fructueuses.

Dans ce mémoire, on tente tout d'abord de montrer l'intérêt des algorithmes de fractions continues au travers de quelques propriétés arithmétiques, dynamiques et géométriques. On introduit l'algorithme classique des fractions continues et on démontre les principales propriétés arithmétiques. On explique ensuite en quoi le point de vue dynamique permet de préciser la vitesse de convergence. Ceci nous conduit à comparer l'algorithme classique avec l'algorithme des fractions continues au plus proche entier. L'interprétation géométrique de l'algorithme classique est très importante car elle permet de construire d'autres algorithmes. C'est en effet l'algorithme géométrique de Poincaré qui est à la base de la construction d'un nouvel algorithme de fractions continues, introduit par P. Arnoux et P. Hubert dans [ArHu]. La deuxième partie est consacrée à l'étude de cet algorithme. On montre qu'il permet d'approcher des réels par des éléments de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Cet algorithme termine pour un ensemble de directions que l'on appelle μ-rationnelles. Une question ouverte posée dans l'article [ArHu] (page 19) est d'identifier cet ensemble. On conjecture informatiquement que cet ensemble est $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ (ce qui permettrait de faire complètement le parallèle avec les directions rationnelles dans le cas de l'algorithme classique). On donne enfin quelques éléments pour tenter de démontrer cette conjecture.

Remarque : Les sections 1.1 et 1.2 sont très classiques. Les sections 1.3 et 1.4, même si elles présentent des résultats connus, sont plus personnelles (je n'ai notamment pas trouvé de références regroupant les résultats sur l'algorithme des fractions continues au plus proche entier). Les sections 2.1 et 2.2 reposent sur l'article [ArHu] : j'ai cependant redémontré et corrigé certains résultats (propositions 2.1 et 2.2) et j'en ai ajouté d'autres (théorème 2.3). La dernière section (2.3) est complètement personnelle.

1 Fractions continues classiques

Dans cette section, on appelle fraction continue une fraction, finie ou infinie, de la forme :

$$a_0 + \cfrac{\epsilon_1}{a_1 + \frac{\epsilon_2}{a_2 + \dots}}$$

avec pour $i > 0$, $a_i \in \mathbb{N}$, $a_i > 0$, $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ et $a_0 \in \mathbb{Z}$. On notera une fraction continue de la manière suivante : $[a_0, \epsilon_1 \backslash a_1, \epsilon_2 \backslash a_2, \dots]$. Les a_i sont appelés les *quotients partiels* et $[a_0, \epsilon_1 \backslash a_1, \epsilon_2 \backslash a_2, \dots, \epsilon_N \backslash a_N]$ est le *Nième convergent*. C'est, bien sûr, un rationnel. Dans le cas particulier où tous les ϵ_i valent 1, on parle alors de *fraction continue régulière* et on note : $[a_0, a_1, a_2, \dots]$.Dans cette première partie, nous allons nous intéresser tout d'abord à des propriétés arithmétiques de base des fractions continues classiques, puis à des propriétés dynamiques de la tranformation associée avant de donner des interprétations géométriques. Enfin, nous prolongerons ces résultats à un autre algorithme : l'algorithme des fractions continues au plus proche entier.

1.1 Propriétés arithmétiques des fractions continues régulières

Nous nous intéressons ici uniquement aux fractions continues régulières. On peut trouver les démonstrations des résultats donnés ici dans [HW] et [NZM]. Dans la suite, $p_N/q_N = [a_0, a_1, \dots, a_N]$ désigne le Nième convergent d'une fraction continue infinie $[a_0, \dots, a_n, \dots]$.

Proposition 1.1 *Les p_n et q_n vérifient :*

$$\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}$$

cette relation de récurrence étant valable pour tout n entier strictement positif avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} p_{-1} = 1 & p_0 = a_0 \\ q_{-1} = 0 & q_0 = 1 \end{cases}$$

Preuve : La preuve est immédiate par récurrence en remarquant que :

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} &= \left[a_0, a_1, \dots, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right] \\ &= \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) q_{n-1} + q_{n-2}} \\ &= \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1}} \end{aligned}$$

On peut donc bien choisir $p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1}$ et $q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}$ (on ne sait pas pour l'instant si la fraction est irréductible). $\square$

On remarque notamment que les suites (p_n) et (q_n) sont strictement croissantes (car $\forall n > 0$, $a_n > 0$) et donc vérifient $\forall n > 0$, $p_n \geq a_0 + n$ et $q_n \geq 1 + n$. On peut facilement obtenir une meilleure minoration de q_n en utilisant le fait que $\forall n > 0$, $a_n \geq 1$ et en comparant avec la suite de Fibonacci.

Corollaire 1.1 *Soit* $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *le nombre d'or. On a :*

$$\forall n \geq 0,\ q_n \geq \frac{\phi^n}{2}$$

Preuve : On démontre ce résultat par récurrence en utilisant :
$\forall n > 0,\ q_{n+1} \geq q_n + q_{n-1}$ (car les q_n sont positifs)
$1 + \phi = \phi^2$. □

Corollaire 1.2 *On a :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} = (-1)^n \frac{q_{n+2} - q_n}{q_n q_{n+1} q_{n+2}}$$

Preuve : Le premier résultat est immédiat par récurrence. Les deux autres s'en déduisent. □

Ce corollaire montre que pour tout n, p_n et q_n sont premiers entre eux (par Bezout). Il permet également d'établir le théorème suivant.

Théorème 1.1 *Pour toute suite a_n d'entiers telle que $\forall n > 0$, $a_n > 0$, la fraction continue infinie $[a_0, a_1, ..., a_n, ...]$ converge vers un réel x, c'est-à-dire :*

$$\lim_{n\to\infty}[a_0, a_1, ..., a_n] = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = x$$

La suite $(\frac{p_{2n}}{q_{2n}})$ (resp. la suite $(\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}})$) converge en croissant (resp. converge en décroissant) vers x.
De plus, on a les inégalités :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{q_n + q_{n+1}} < |q_n x - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}}$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \left|x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|$$

Enfin, $x \in]a_0, a_0 + 1[$ et est irrationnel.

Preuve : La convergence des $\frac{p_n}{q_n}$ est équivalente à la convergence de la série de terme général $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}$. Or cette série est une série alternée (cf. le corollaire 1.2) donc converge. Le corollaire montre également les propriétés des suites $(\frac{p_{2n}}{q_{2n}})$ et $(\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}})$.
Notons $x'_n = [a_n, a_{n+1}, ...]$.On a $x = [a_0, a_1, ..., a_n, x'_{n+1}] = \frac{x'_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x'_{n+1}q_n + qn-1}$. Un simple calcul montre alors que $q_n x - p_n = \frac{(-1)^n}{x'_{n+1}q_n + q_{n-1}}$. En utilisant finalement les inégalités $a_{n+1} < x'_{n+1} < a_{n+1} + 1$, on obtient $\frac{1}{q_n + q_{n+1}} < |q_n x - p_n| < \frac{1}{q_{n+1}}$. Ceci permet de montrer que $|q_n x - p_n| < |q_{n-1}x - p_{n-1}|$ ce qui implique la dernière inégalité.
On démontre le dernier résultat par l'absurde. Supposons que x soit rationnel : $x = a/b$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Des inégalités précédentes, on déduit alors : $\forall n > 0,\ 0 < |q_n a - p_n b| < \frac{b}{q_{n+1}}$. En

prenant n suffisamment grand, on obtient alors un encadrement strict de l'entier $|q_n a - p_n b|$ par 0 et 1 d'où la contradiction. $\square$

Ce théorème montre notamment que $\forall n \in N \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ et donc que la convergence de la fraction continue vers sa limite est au moins en $\frac{4}{\phi^{2n+1}}$ (car $q_n > \frac{\phi^n}{2}$ cf. le corollaire 1.1). Ce résultat sera affiné dans la partie suivante consacrée au point de vue dynamique des fractions continues (cf. théorème 1.9).

La proposition suivante montre qu'un nombre irrationnel a un unique développement en fraction continue.

Proposition 1.2 *Soit* (a_n) *et* (b_n) *deux suites tel que* $\forall n > 0, a_n > 0$ *et* $b_n > 0$. *Si* $[a_0, a_1, ..., a_n, ...] = [b_0, b_1, ..., b_n, ...]$, *alors* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

Preuve : La preuve repose sur la remarque suivante : si $x = [a_0, a_1, ..., a_n, ...]$, alors $a_0 = E(x)$ (on désigne par $E(x)$ la partie entière de x). Donc, si $x = y$ avec $y = [b_0, b_1, ..., b_n]$, $a_0 = b_0 = E(x)$ et donc $x'_1 = y'_1$ (car $x = a_0 + \frac{1}{x'_1} = b_0 + \frac{1}{y'_1}$) c'est-à-dire $[a_1, a_2, ..., a_n, ...] = [b_1, b_2, ..., b_n, ...]$. Une récurrence permet alors de terminer la preuve. $\square$

Exemple : Le développement en fraction continue du nombre d'or $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est particulièrement simple car $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$. On a donc : $\phi = [1, 1, 1, 1, ...]$.
De même, le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$ est très simple. En effet, on remarque que $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ et que $\sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}$, d'où : $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, ...]$.

Nous avons donc montré que, étant donné une fraction continue régulière $[a_0, a_1, ...a_n, ...]$, elle converge vers un irrationnel x et qu'aucune autre fraction continue ne converge vers x. Réciproquement, soit x un nombre irrationnel, on peut construire une fraction continue infinine $[a_0, a_1, ..., a_n, ...]$ qui converge vers x en utilisant un algorithme, ébauché dans la preuve de la proposition précédente.

Algorithme classique des fractions continues

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $x_0 = x$. On pose $a_0 = E(x_0)$ et $x_1 = \frac{1}{x_0 - a_0}$. Puis on définit par récurrence $a_n = E(x_n)$ et $x_{n+1} = \frac{1}{x_n - a_n}$. Il est clair que $\forall n > 0$, $x = [a_0, a_1, ..., a_n, x_{n+1}]$ et donc que tous les x_n sont irrationnels. On en déduit que $\forall n > 0$, $a_n > 0$: l'algorithme ne s'arrête jamais et la fraction continue infinie $[a_0, a_1, .., a_n, ...]$ converge. De plus, le même calcul que dans la preuve du théorème 1.1 (en remplaçant x'_n par x_n) montre que $\forall n > 0$, $x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(x_{n+1}q_n + q_{n-1})}$ et donc, en utilisant le fait que $\forall n > 0$, $x_n > 0$, on voit que $[a_0, a_1, ..., a_n, ...] = x$ et donc que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = x'_n$.

Corollaire 1.3 *L'algorithme des fractions continues établit une bijection entre* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *et* $\Sigma^+ = \left\{(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \forall n > 0,\, a_n > 0\right\}$.

Preuve : Il suffit de regrouper les résultats du théorème 1.1, de la proposition 1.2 et de l'algorithme qui précède. $\square$

Nous avons donc construit une application bijective de l'ensemble des irrationnels $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dans l'ensemble des suites à valeurs entières admissibles Σ^+. L'algorithme décrit ci-dessus permet de prolonger cette application à l'ensemble des rationnels (et donc à $\mathbb{R}$ tout entier) tant que x_n est non nul. Soit $x = \alpha/\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, $\beta \neq 0$. On se convainc aisément qu'appliquer l'algorithme des fractions continues à x, ce n'est rien d'autre qu'appliquer l'algorithme d'Euclide à α et β, les quotients étant les a_i et les restes vérifiant $r_0 = \frac{\beta}{x_1}$, $r_n = \frac{r_{n-1}}{x_{n+1}}$. On rappelle que l'algorithme d'Euclide s'écrit :

$$\begin{cases} r_{-2} = \alpha \\ r_{-1} = \beta \end{cases}$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ r_{n-2} = r_{n-1}a_n + r_n$$

où a_n et r_n sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de r_{n-2} par r_{n-1}. (r_n) est donc une suite d'entiers positifs décroissants strictement. On a donc $\exists N,\ r_N = 0$ (l'algorithme s'arrête) et alors $(\alpha, \beta) = r_{N-1}$. On a vu que $x_{n+2} = \frac{r_n}{r_{n+1}}$ et donc $x_{N+2} = 0$. On en déduit que $x = [a_0, a_1, ..., a_{N+1}]$. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème 1.2 *Tout nombre réel x a un développement en fraction continue. Ce développement est fini si et seulement si $x \in \mathbb{Q}$.*

<u>Remarque :</u> Le développement d'un nombre rationnel n'est pas unique. En effet, si $a_n > 1$, $[a_0, a_1, ..., a_n] = [a_0, a_1, ..., a_n - 1, 1]$ et si $a_n = 1$, $[a_0, a_1, ..., a_{n-1}, 1] = [a_0, a_1, ..., a_{n-2}, a_{n-1} + 1]$. Mais c'est la seule ambiguïté possible. En reprenant la preuve de la proposition 1.2, on montre que si $[a_0, a_1, ..., a_N] = [b_0, b_1, ..., b_M]$ et $a_N > 1$, $b_M > 1$ (ce qui est la convention classique en cas de développement fini), alors $N = M$ et $\forall n,\ a_n = b_n$.

L'algorithme des fractions continues permet donc d'approcher n'importe quel nombre réel par une suite de rationnels. La proposition suivante montre que les convergents sont des *meilleures approximations* de x.

Proposition 1.3 *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n > 1$.*
Alors, $\forall a \in \mathbb{Z}$, $\forall b \in \mathbb{N}$, $b > 0$,

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \Longrightarrow b > q_n$$

On parle de meilleure approximation de première espèce.
En fait, on montre le résultat suivant, plus fort :
$\forall a \in \mathbb{Z}$, $\forall b \in \mathbb{N}$, $b > 0$

$$|bx - a| < |q_n x - p_n| \Longrightarrow b \geq q_{n+1}$$

On parle de meilleure approximation de deuxième espèce.

<u>Remarque :</u> On utilise ici le vocabulaire proposé par Khinchin dans [Khi] : $\frac{p}{q}$ est une meilleure approximation de première espèce de x si et seulement si, $\forall a \in \mathbb{Z}$, $\forall b \in \mathbb{N}$, $0 < b \leq q$, on a $\left|x - \frac{a}{b}\right| \geq \left|x - \frac{p}{q}\right|$; $\frac{p}{q}$ est une meilleure approximation de deuxième espèce de x si et seulement si, $\forall a \in \mathbb{Z}$, $\forall b \in \mathbb{N}$, $0 < b \leq q$, on a $|bx - a| \geq |qx - p|$.

Preuve : Tout d'abord, le deuxième résultat est plus fort car si $\left|x - \frac{a}{b}\right| < \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right|$ et $b \leq q_n$, alors $|bx - a| < \frac{b}{q_n}|q_n x - p_n| < |q_n x - p_n|$ et donc $b \geq q_{n+1} > q_n$ d'où la contradiction.
On prouve le deuxième résultat par l'absurde. Supposons donc $|bx - a| < |q_n x - p_n|$ et

$b < q_{n+1}$. Soit r et s les solutions du système suivant : $\begin{bmatrix} p_n & p_{n+1} \\ q_n & q_{n+1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Comme $|p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1}| = 1$, r et s sont entiers.

Montrons que $r \neq 0$ et $s \neq 0$. Si $r = 0$, $q_{n+1}s = b$ et donc $s > 0$ ce qui implique $b \geq q_{n+1}$ ce qui est interdit par hypothèse. De même, si $s = 0$, $|bx - a| = |r||q_n x - p_n|$ et donc $|r| > 0$ ce qui implique $|q_n x - p_n| \leq |bx - a|$ ce qui est interdit par hypothèse.
D'autre part, d'après le théorème 1.1, $(q_n x - p_n)$ et $(q_{n+1}x - p_{n+1})$ sont de signe opposé. Prouvons qu'il en est de même pour r et s. Si $r > 0$, comme $q_n r + q_{n+1}s = b < q_{n+1}$ et $q_n r > 0$, on a nécessairement $s < 0$. Si $r < 0$, comme $q_{n+1}s = b - q_n r$, on obtient $s > 0$. Ceci montre que $r(q_n x - p_n)$ et $s(q_{n+1}x - p_{n+1})$ sont de même signe.
On a donc finalement :

$$\begin{aligned} |bx - a| &= |r(q_n x - p_n) + s(q_{n+1}x - p_{n+1})| \\ &= |r(q_n x - p_n)| + |s(q_{n+1}x - p_{n+1})| \\ &> |r(q_n x - p_n)| \\ &> |q_n x - p_n| \end{aligned}$$

d'où la contradiction.

□

Remarque : Contrairement à la condition de meilleure approximation de première espèce, la condition de meilleure approximation de deuxième espèce est en fait une caractérisation des convergents : si $|xq - p| = \min_{a \in \mathbb{Z},\, 0<b\leq q} |xb - a|$, alors $\frac{p}{q}$ est un convergent de x. La preuve se calque sur celle du corollaire suivant.

Donnons un corollaire simple, connu sous le nom du théorème de Legendre.

Corollaire 1.4 *Soit x un nombre irrationnel, $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ la suite de ses convergents, a et b deux entiers, avec $b > 0$. Alors,*

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2b^2} \Longrightarrow \exists n,\ \frac{a}{b} = \frac{p_n}{q_n}$$

Preuve : Soit n tel que $q_n \leq b < q_{n+1}$. On va montrer que $\frac{a}{b} = \frac{p_n}{q_n}$. D'après le théorème précédent, $|xq_n - p_n| \leq |xb - a| < \frac{1}{2b}$. On en déduit $\left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{a}{b}\right| \leq \left|\frac{p_n}{q_n} - x\right| + \left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2bq_n} + \frac{1}{2b^2}$. Or, $\frac{1}{2bq_n} + \frac{1}{2b^2} = \frac{1}{2b}\left(\frac{1}{q_n} + \frac{1}{b}\right) \leq \frac{1}{2b}\frac{2}{q_n} = \frac{1}{bq_n}$. On obtient donc $|p_n b - q_n a| < 1$, ce qui implique $p_n b = q_n a$ et termine la preuve. □

Remarque : $\frac{1}{2}$ est la meilleure constante possible. C'est-à-dire que $\forall \epsilon > 0$, $\exists x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $\exists a, b \in \mathbb{Z}$, $b > 0$ tel que $\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{(2+\epsilon)b^2}$ et $\frac{a}{b}$ n'est pas un convergent de x.

Les deux théorèmes suivants sont des résultats classiques d'approximations des nombres réels. Le premier (connu sous le nom théorème de Vahlen) précise le corollaire précédent en montrant que pour x irrationnel donné, il existe un infinité de rationnel $\frac{a}{b}$ vérifiant $\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2b^2}$. Le second théorème (connu sous le nom théorème de Borel) affine le résultat précédent en remplaçant la constante $\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Théorème 1.3 *Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $n > 1$. Alors, des deux convergents consécutifs $\frac{p_n}{q_n}$ et $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, un au moins vérifie :* $\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2b^2}$.

Preuve : Supposons le résultat faux. D'après le théorème 1.1, $\left(x - \frac{p_n}{q_n}\right)$ et $\left(x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right)$ sont de signes opposés. Donc, $\frac{1}{q_n q_{n+1}} = \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \left|\frac{p_n}{q_n} - x\right| + \left|x - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q_n^2} + \frac{1}{q_{n+1}^2}\right)$ d'où $(q_{n+1} - q_n)^2 \leq 0$: contradiction. □

Théorème 1.4 *Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $n > 1$. Alors, des trois convergents consécutifs $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, $\frac{p_n}{q_n}$ et $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, un au moins vérifie :* $\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}b^2}$.

Preuve : Démontrons de même ce théorème par l'absurde. En reprenant le premier point de la démonstration précédente, on arrive à $\frac{1}{q_n q_{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{q_n^2} + \frac{1}{q_{n+1}^2}\right)$, ce qui s'écrit aussi : $\frac{q_n}{q_{n+1}} + \frac{q_{n+1}}{q_n} \leq \sqrt{5}$. De même, on a : $\frac{q_{n-1}}{q_n} + \frac{q_n}{q_{n-1}} \leq \sqrt{5}$. En fait, ces deux inégalités sont strictes puisque le membre de gauche est rationnel. En étudiant le signe du trinôme $x^2 - \sqrt{5}x + 1$, et en utilisant le fait que $q_{n-1} < q_n < q_{n+1}$, on obtient : $1 < \frac{q_{n+1}}{q_n} < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ et $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{q_{n-1}}{q_n} < 1$. Enfin, on sait que $a_{n+1} = \frac{q_{n+1}}{q_n} - \frac{q_{n-1}}{q_n}$ d'où $0 < a_{n+1} < 1$: contradiction. □

Remarque : Les constantes $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{5}}$ dans les deux théorème précédents sont les meilleures possibles. Ainsi, si on considère une constante $\alpha > \sqrt{5}$, alors il exite un irrationnel x tel qu'il n'y a qu'un nombre fini de rationnels $\frac{a}{b}$ vérifiant $\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{\alpha b^2}$. Ces rationnels $\frac{a}{b}$ sont nécessairement des convergents de x d'après le corollaire 1.4. On peut prendre $x = \phi$.

Une autre propriété arithmétique importante des fractions continues est le théorème suivant, connu sous le nom du théorème de Lagrange.

Définition 1.1 *On dit qu'une fraction continue régulière infinie $[a_0, .., a_n, ...]$ est périodique si la suite des (a_n) est prépériodique. On note alors $[a_0, ..., a_n, ...] = [a_0, ..., a_k, \overline{b_0, ..., b_{l-1}}]$.*

Théorème 1.5 *Une fraction continue régulière est périodique si et seulement si elle représente un nombre irrationnel quadratique.*

Preuve : On rappelle qu'on dit d'un nombre α qu'il est quadratique s'il est solution d'une équation pôlynomiale à coefficients entiers de degré deux, ou encore, de manière équivalente, si l'extension de corps $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\alpha]$ est de degré deux.
Une des implications est très simple. Si $x = [a_0, ..., a_k, \overline{b_0, ..., b_{l-1}}]$, on note $y = [\overline{b_0, ..., b_{l-1}}]$. Pour montrer que x est quadratique, il suffit de montrer que y l'est. Or, $y = [b_0, ..., b_{l-1}, y]$, ce qui s'écrit $y = \frac{yp_{l-1}+p_{l-2}}{yq_{l-1}+q_{l-2}}$ et montre bien que y est solution d'un trinôme à coefficients entiers.
L'autre implication est nettement plus difficile à établir.
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ un nombre quadratique et $[a_0, ..., a_n, ...]$ son développement en fraction continue. $\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$, $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ et $\beta^2 - 4\alpha\gamma \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. On sait que $x = \frac{p_{n-1}x_n + p_{n-2}}{q_{n-1}x_n + q_{n-2}}$ où $x_n = [a_n, ...]$. x_n est donc également un nombre quadratique et un petit calcul donne les coefficients $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ tel que $\alpha_n x_n^2 + \beta_n x_n + \gamma_n = 0$:

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \alpha p_{n-1}^2 + \beta p_{n-1}q_{n-1} + \gamma q_{n-1}^2 \\
\beta_n &= 2\alpha p_{n-1}p_{n-2} + \beta(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2\gamma q_{n-1}q_{n-2} \\
\gamma_n &= \alpha p_{n-2}^2 + \beta p_{n-2}q_{n-2} + \gamma q_{n-2}^2
\end{aligned}$$

On va maintenant montrer que les coefficients entiers α_n, β_n et γ_n sont uniformément bornés en n. Tout d'abord, un calcul donne :

$$\begin{aligned}\beta_n^2 - 4\alpha_n\gamma_n &= (\beta^2 - 4\alpha\gamma)(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})^2 \\ &= (\beta^2 - 4\alpha\gamma)\end{aligned}$$

D'autre part, le théorème 1.1 montre que $p_n - q_n x = \frac{\delta_n}{q_n}$ avec $|\delta_n| < 1$. On trouve ainsi :

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \alpha\left(q_{n-1}x + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}\right)^2 + \beta\left(q_{n-1}x + \frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}\right)q_{n-1} + \gamma q_{n-1}^2 \\ &= (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)q_{n-1}^2 + (2\alpha x + \beta)\delta_{n-1} + \alpha\left(\frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}\right)^2 \\ &= (2\alpha x + \beta)\delta_{n-1} + \alpha\left(\frac{\delta_{n-1}}{q_{n-1}}\right)^2\end{aligned}$$

D'où les majorations (en remarquant que $\gamma_n = \alpha_{n-1}$) :

$$\begin{aligned}|\alpha_n| &\leq |2\alpha x + \beta| + |\alpha| \\ |\gamma_n| &\leq |2\alpha x + \beta| + |\alpha| \\ |\beta_n| &\leq 4(|2\alpha x + \beta| + |\alpha|)^2 + |\beta^2 - 4\alpha\gamma|\end{aligned}$$

Ainsi, parmi l'infinité des triplets $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$, trois au moins sont égaux : $\exists p < q < r$, $(\alpha_p, \beta_p, \gamma_p) = (\alpha_q, \beta_q, \gamma_q) = (\alpha_r, \beta_r, \gamma_r)$. Et donc, au moins deux des trois valeurs x_p, x_q et x_r sont égales (un trinôme a en effet au plus deux racines). Mais si par exemple $x_p = x_q$, alors, $a_p = a_q$, $a_{p+1} = a_{q+1}$, ... $a_{p+(q-1-p)} = a_{q+(q-1-p)}$ et la fraction continue est donc périodique : $x = [a_0, ..., a_{p-1}, \overline{a_p, ..., a_{q-1}}]$. Ceci termine la preuve. □

Exemple : Soit α et β deux entiers positifs avec $\alpha|\beta$ et $x = [\overline{\beta, \alpha}]$. Alors, $x = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\gamma}}{2}$ où $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$.

1.2 Propriétés dynamiques de l'algorithme des fractions continues

On va maintenant étudier l'algorithme des fractions continues (cf. page 5) d'un point de vue dynamique. Il faut tout d'abord remarquer que lors de l'itération de l'algorithme, la première étape (définition de a_0) est un peu particulière puisque $x \notin [0,1[$ contrairement à tous les $x_i - a_i$, $i \geq 0$. Dans la suite, on supposera donc que $x \in [0,1[$ ce qui implique $a_0 = 0$. D'autre part, pour étudier un système dynamique, il faut pouvoir itérer l'algorithme autant de fois que l'on veut. C'est pourquoi, on choisit désormais $x \in [0,1[\backslash\mathbb{Q}$ (cf. théorème 1.2). On pose dans la suite $\Omega = [0,1[\backslash\mathbb{Q}$. Remarquons dès maintenant qu'étant donné que l'on recherche désormais des propriétés vraies presque partout, le fait de retirer $\mathbb{Q}$ (de mesure nulle) à $[0,1[$ est sans importance. Enfin, quand il y aura ambiguïté, on notera $a_n(x)$ pour désigner le nième quotient partiel de x (et de même $p_n(x)$ et $q_n(x)$).
On peut maintenant définir l'application T que l'on itère lors de l'algorithme :

$$T\left\{\begin{array}{ccc}[0,1[& \longrightarrow & [0,1[\\ x & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ll}\left\{\frac{1}{x}\right\} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\end{array}\right.\end{array}\right.$$

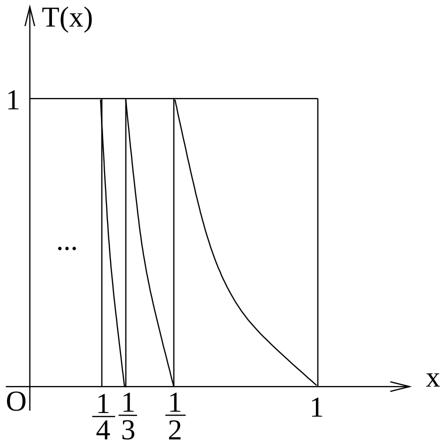

FIG. 1 – Représentation de T

Cette application est une application homographique par morceaux, décroissante par morceaux, surjective mais non injective (cf. la figure 1). L'ensemble des points de discontinuité est $\left\{\frac{1}{k},\, k \in \mathbb{N},\, k \geq 2\right\}$. Sur l'intervalle $\left]\frac{1}{k+1},\, \frac{1}{k}\right]$, on a $T(x) = \frac{1}{x} - k$.

Lemme 1.1 *Soit $x \in [0,1[\backslash\mathbb{Q}$. On applique l'algorithme des fractions continues à x et on reprend les notations de la page 5 : $x = [0, a_1, a_2, ..., a_n, ...]$ et $x_n = [a_n, ...]$.*
Alors, $\forall n > 0$,
$a_n = E\left(\frac{1}{T^{n-1}(x)}\right)$
$x_n = \frac{1}{T^{n-1}(x)}$
$T^n(x) = x_n - a_n$
avec la convention $T^0 = Id$.

Preuve : Tous ces résultats se vérifient facilement par récurrence. □

Les trois corollaires suivants en découlent sans difficulté.

Corollaire 1.5 *Soit $x \in [0,1[$*
$x \in \mathbb{Q} \iff \exists k \in N,\, T^k(x) = 0.$

Corollaire 1.6 *Soit $x \in [0,1[$:*

$$\begin{aligned} x &= [0, a_1, ..., a_n + T^n(x)] \\ &= \frac{(a_n + T^n(x))p_{n-1} + pn - 2}{(a_n + T^n(x))q_{n-1} + qn - 2} \\ &= \frac{p_n + T^n(x)p_{n-1}}{q_n + T^n(x)q_{n-1}} \end{aligned}$$

Corollaire 1.7 *Soit $x \in [0,1[$*
$\forall n > 0,\, p_{n+1}(x) = q_n(T(x)).$

Preuve : Etant donné que $x \in [0,1[$, $a_0 = 0$ et les conditions initiales pour les suites (p_n) et (q_n) s'écrivent donc $\left\{\begin{array}{ll} p_{-1} = 1 & p_0 = 0 \\ q_{-1} = 0 & q_0 = 1 \end{array}\right.$. D'autre part, si $x = [0, a_1, ..., a_n, ...]$, alors

$T(x) = [0, a_2, ..., a_n, ...]$ (puisque si $x = [0, a_1, ..., a_n, ...]$, alors $[0, a_2, ..., a_n, ...] = \frac{1}{x_2} = T(x)$). On en déduit que $p_{n+1}(x) = q_n(T(x))$. $\square$

Pour pouvoir définir un système dynamique mesuré, il faut pouvoir définir une mesure invariante par l'application T. Nous allons essayer ci-dessous d'introduire cette mesure (découverte déjà par Gauss) de manière naturelle. Pour cela, nous allons construire explicitement une *extension naturelle* (cf. la définition ci-dessous) de T, bijective et trouver une mesure invariante pour cette extension ce qui nous permettra, par projection, de trouver une mesure invariante par T.

Définition 1.2 *Soit (X, T, μ) un système mesuré. On appelle* une extension naturelle *de (X, T, μ) un système mesuré $(\tilde{X}, \tilde{T}, \tilde{\mu})$ tel que $\tilde{T} : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ est bijective et tel que $\exists \pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ une projection avec : $\pi \circ \tilde{T} = T \circ \pi$ et $\pi * \tilde{\mu} = \mu$.*

Remarque : On peut en fait définir **l**'extension naturelle, objet universel unique à unique isomorphisme près.

L'algorithme des fractions continues pemet de définir une bijection Θ entre Ω et l'ensemble des suites $\Sigma^+ = \{(a_n)_{n>0}, \forall n > 0,\ a_n > 0\}$ (cf. le corollaire 1.3). D'autre part, le lemme 1.1 montre que $T([0, a_1, a_2, ..., a_n, ...]) = [0, a_2, a_3, ..., a_n, ...]$. Plus généralement, $a_n\left(T^k(x)\right) = a_{n+k}(x)$. On a donc la proposition suivante :

Proposition 1.4 *La bijection $\Theta : \Omega \xrightarrow{\sim} \Sigma^+$ conjuge la transformation $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ avec le décalage unilatère $\sigma^+ : \Sigma^+ \longrightarrow \Sigma^+$, défini par :*
$\sigma^+ ((a_n)_{n>0}) = ((b_n)_{n>0})$ avec $\forall n > 0,\ b_n = a_{n+1}$

L'application σ^+ est surjective mais évidemment pas injective. Une manière naturelle de la rendre injective est de considérer tous les passés possibles d'une suite $(a_n) \in \Sigma^+$ et de prolonger l'application σ. Ici, il suffit donc de considérer les suites $(a_n) \in \Sigma = \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \forall n > 0,\ a_n > 0\right\}$ et le décalage bilatère σ définie par : $\sigma\left((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}\right) = \left((b_n)_{n\in\mathbb{Z}}\right)$ avec $\forall n \in \mathbb{Z},\ b_n = a_{n+1}$. Cette fois, σ est bien bijective. On peut maintenant prolonger la bijection Θ à Σ. On pose :

$$\Psi \left\{ \begin{array}{lll} [0,1[\times[0,1[& \longrightarrow & \Sigma \\ (x,y) & \longmapsto & (a_n) \end{array} \right. \quad \text{tel que} \quad \begin{array}{l} x = [0, a_1, a_2, ..., a_n, ...] \\ y = [0, a_0, a_{-1}, a_{-2}, ..., a_{-n}, ...] \end{array}$$

Considérons maintenant l'application conjuguée à σ.

Proposition 1.5 *L'application bijective $\Psi : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Sigma$ conjugue $\overline{T}$ avec le décalage bilatère σ, où $\overline{T}$ est défini par :*

$$\overline{T} \left\{ \begin{array}{lll} [0,1[\times[0,1[& \longrightarrow & [0,1[\times[0,1[\\ (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \left(T(x), \frac{1}{y+E\left(\frac{1}{x}\right)}\right) & si\ x \neq 0 \\ (0,0) & si\ x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

De plus, $\overline{T} : \Omega \times \Omega \longrightarrow \Omega \times \Omega$ est bijective.

Preuve : En effet, si $y = [0, a_0, a_{-1}, ..., a_{-n}, ...]$ et si $x = [0, a_1, a_2, ..., a_n, ...]$, alors $[0, a_1, a_0, a_{-1}, ..., a_{-n}] = \frac{1}{a_1+y}$ et $a_1 = E\left(\frac{1}{x}\right)$. La bijectivité de $\overline{T}$ restreint à $\Omega \times \Omega$ découle de la bijectivité de σ sur Σ, ou encore du fait que l'on peut expliciter l'application réciproque, conjuguée à σ^{-1}. $\square$

Remarque : Ψ définit une bijection entre $\Omega \times \Omega$ et Σ. On peut vérifier facilement que $\Omega \times \Omega$ est le complémentaire dans le carré $[0,1[\times[0,1[$ des orbites par $\overline{T}$ des points de la forme $(0,\alpha)$ et $(\alpha,0)$ avec $\alpha \in [0,1[$.

L'application $\overline{T}$ est continue sur les bandes verticales $\left\{\frac{1}{k+1} \leq x < \frac{1}{k},\, k \in \mathbb{N},\, k > 0\right\}$ sur lesquelles $\overline{T}(x,y) = \left(\frac{1}{x} - k, \frac{1}{y+k}\right)$. L'image par $\overline{T}$ de la bande verticale $\left\{\frac{1}{k+1} \leq x < \frac{1}{k},\, k \in \mathbb{N},\, k > 0\right\}$ est la bande horizontale $\left\{\frac{1}{k+1} \leq y < \frac{1}{k},\, k \in \mathbb{N},\, k > 0\right\}$ (cf. la figure 2).

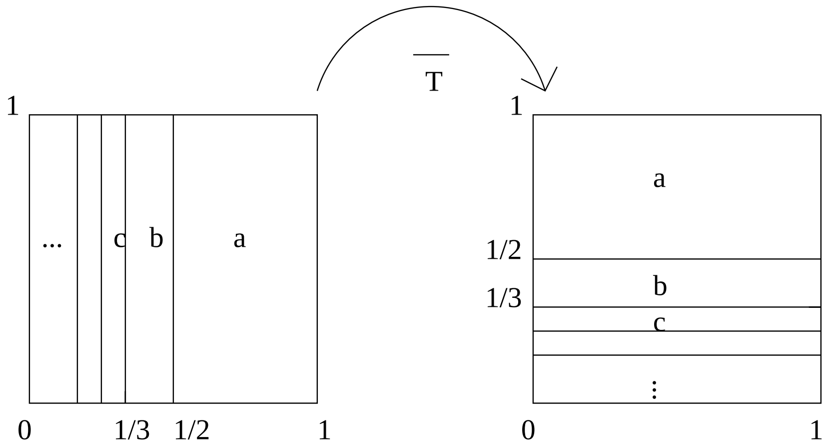

FIG. 2 – Représentation de $\overline{T}$

On veut maintenant trouver une mesure sur le carré $[0,1[\times[0,1[$, invariante par $\overline{T}$. On remarque que $\overline{T}$ est localement une homographie en x et en y. On peut, dans certain cas que l'on va maintenant préciser, trouver des mesures invariantes pour des applications de ce genre.

Définition 1.3 *Soit (X,μ) un espace probabilisé.*
On dit qu'une application $f : X \longrightarrow X$ est presque partout bijective si il existe $A \subset X$ et $B \subset X$ deux ensembles de mesure pleine tels que $f : A \longrightarrow B$ est bijective.

Lemme 1.2 *Soit $f : [0,1[\times[0,1[\longrightarrow [0,1[\times[0,1[$, une application bijective presque partout, telle que, pour presque tout $(x,y) \in [0,1[\times[0,1[$, il existe un voisinage ouvert V de (x,y), il existe quatre réels a, b, c, d avec $ad - bc > 0$, tel que f restreint à V soit égale à $\tau \times \tau : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (\tau(x),\tau(y)) \end{array}\right.$ où τ est l'homographie : $\tau(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.*

Alors, $\frac{dxdy}{(x-y)^2}$ est une mesure invariante par f.

Preuve : Il suffit de montrer que la mesure est préservée localement (car f est presque partout bijective).

On se réfère ici à [BKS]. On peut supposer que $ad - bc = 1$ et donc, τ est une isométrie positive du plan hyperbolique, représenté sous la forme du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{(x+iy),\, y > 0\}$. Elle préserve donc la mesure hyperbolique $\frac{dxdy}{y^2}$. Notons $\mathbb{U}$ l'espace unitaire tangent à $\mathbb{H}$. Un point de $\mathbb{U}$ est la donnée d'un point base $(x,y) \in \mathbb{H}$ et de

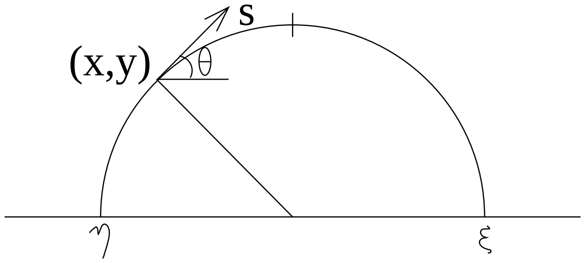

FIG. 3 – Coordonnées sur $\mathbb{U}$

l'angle θ que fait le vecteur unitaire tangent avec l'horizontale. On peut définir une mesure sur l'espace $\mathbb{U}$ par $dm = \frac{dxdyd\theta}{y^2}$. Par un point de $\mathbb{U}$ passe une unique géodésique de $\mathbb{H}$. En effet, on sait que les géodésiques sont les demi-cercles perpendiculaires à l'axe horizontal (Ox) et les droites verticales et donc, par un point passe une seule géodésique tangente à un vecteur unitaire donné. Mais une géodésique peut aussi être repérée par ses deux pieds (η, ξ) (cf. la figure 3). Ainsi, un point de $\mathbb{U}$ peut être repéré par (η, ξ, s) où s est la distance hyperbolique du centre de la géodésique de pieds (η, ξ) au point (x, y). η, ξ, s sont donc trois réels. Un simple calcul donne : $dm = \frac{dxdyd\theta}{y^2} = \frac{2d\eta d\xi ds}{(\eta-\xi)^2}$. L'isométrie τ se relève en une application $\overline{\tau}$ (qui est l'application tangente sur $\mathbb{U}$) qui préserve la mesure dm : $\overline{\tau}\left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{U} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ (x,y,\theta) & \longmapsto & (\tau(x,y), \theta + \arg(\tau'(x+iy))) \end{array}\right.$ Ainsi, l'application $\tau \times \tau : \left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ (\xi,\eta) & \longmapsto & (\tau(\xi), \tau(\eta)) \end{array}\right.$ préserve la mesure $\frac{d\eta d\xi}{(\xi-\eta)^2}$.

□

Ici, l'application $\overline{T}$ n'est pas de la forme $(x, y) \longmapsto (\tau(x), \tau(y))$. Posons $\phi\left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (x, \frac{-1}{y}) \end{array}\right.$. ϕ est involutive et on a (localement) : $\phi \circ \overline{T} \circ \phi(x, y) = (\frac{1}{x} - k, \frac{1}{y} - k)$. Une mesure invariante pour $\phi \circ \overline{T} \circ \phi$ est donc $\frac{dxdy}{(x-y)^2}$ et, par changement de variable, une mesure invariante pour $\overline{T}$ est $\frac{dxdy}{(xy+1)^2}$.

Proposition 1.6 *La mesure de masse finie* $d\mu = \frac{dxdy}{(xy+1)^2}$ *définie sur le carré* $[0,1[\times[0,1[$ *est invariante par* $\overline{T}$.

Corollaire 1.8 *Une mesure invariante par* T *est la mesure de Gauss* $d\lambda = \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{1+x}\,dx$. *C'est une mesure de probabilité équivalente à la mesure de Lebesgue* dx.

Preuve : On sait que $T \circ \pi = \pi \circ \overline{T}$ où π est la projection sur la première variable. Il suffit donc d'intégrer la mesure invariante par $\overline{T}$ le long des verticales. Or

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dy}{(1+xy)^2} &= \left[\frac{-1}{x}\frac{1}{1+xy}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

La constante $\frac{1}{\ln 2}$ fait de cette mesure invariante, une mesure de probabilité. Elle est équivalente à la mesure de Lebesgue parce que sa densité est comprise entre $\frac{1}{2\ln 2}$ et $\frac{1}{\ln 2}$.
□

Remarque : Nous avons utilisé une extension naturelle de $([0,1[,T,\lambda)$: $([0,1[\times[0,1[,\overline{T},\mu)$ pour trouver la densité invariante. La difficulté est de trouver cette mesure λ mais il est facile de vérifier par le calcul que c'est bien une mesure invariante.

Nous pouvons donc définir le système mesuré $([0,1[,T,\lambda)$. Dans la suite, on désigne par $\mathcal{B}$ l'ensemble des boréliens de [0,1[. Nous nous intéressons maintenant aux propriétés dynamiques de ce système. On démontre tout d'abord son ergodicité (cf. [Bi]), ce qui permet d'obtenir la vitesse de convergence de l'algorithme classique des fractions continues.

Définition 1.4 *Soit A_1, ..., A_n, n entiers strictement positifs.*
On désigne par $\Delta_{A_1,..,A_n}$ le cylindre $\{x \in \Omega, x = [0, A_1, A_2, ..., A_n, a_{n+1}, ...]\}$.
Soit $\Psi_{A_1,...,A_n}\left\{\begin{array}{lll} [0,1[& \longrightarrow & [0,1[\\ t & \longmapsto & [0,A_1,A_2,...,A_n+t] = \frac{P_n+tP_{n-1}}{Q_n+tQ_{n-1}} \end{array}\right.$
Où P_k et Q_k $(0 \le k \le n)$ sont les convergents associés à la suite (A_k). On a : $\Delta_{A_1,..,A_n} = \Psi_{A_1,...,A_n}([0,1[)$.

Remarque : Si $x \in \Delta_{A_1,..,A_n}$, on a $x = [0, A_1, ..., A_n + T^n(x)]$. T^n est donc continue et monotone sur $\Delta_{A_1,..,A_n}$ et son inverse est $\Psi_{A_1,...,A_n}$ car $\Psi_{A_1,...,A_n}(T^n(x)) = [0, A_1, A_2, ..., A_n + T^n(x)] = x$: $\Psi_{A_1,...,A_n} = \left(T|_{\Delta_{A_1,..,A_n}}\right)^{-1}$. $\Psi_{A_1,...,A_n}$ est donc également monotone.

Lemme 1.3 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et A_1, ..., A_n, n entiers strictement positifs.*
Alors, $\forall B \in \mathcal{B}$,

$$\frac{1}{2}\nu(B)\nu\left(\Delta_{A_1,..,A_n}\right) \le \nu\left(T^{-n}(B) \cap \Delta_{A_1,..,A_n}\right) \le 2\nu(B)\nu\left(\Delta_{A_1,..,A_n}\right)$$

où ν désigne la mesure de Lebesgue.

Preuve : Il suffit de le montrer pour $B = [x, y[$, avec $0 \le x < y \le 1$. D'après la remarque précédente, on a : $T^{-n}([x,y[) \cap \Delta_{A_1,..,A_n} = \Psi_{A_1,...,A_n}([x,y[)$. Et donc, $\frac{\nu\left(T^{-n}([x,y[)\cap\Delta_{A_1,..,A_n}\right)}{\nu([x,y[)\nu\left(\Delta_{A_1,..,A_n}\right)} = \frac{\left(\Psi_{A_1,...,A_n}(y)-\Psi_{A_1,...,A_n}(x)\right)}{(y-x)\left(\Psi_{A_1,...,A_n}(1)-\Psi_{A_1,...,A_n}(0)\right)}$ car $\Psi_{A_1,...,A_n}$ est monotone. Un petit calcul montre alors que : $\frac{\nu\left(T^{-n}([x,y[)\cap\Delta_{A_1,..,A_n}\right)}{\nu([x,y[)\nu\left(\Delta_{A_1,..,A_n}\right)} = \frac{q_n(q_n+q_{n-1})}{(q_n+xq_{n-1})(q_n+yq_{n-1})}$ et le second membre est compris entre entre $\frac{1}{2}$ et 2 ce qui démontre le résultat. $\square$

Lemme 1.4 $\exists C > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall A_1$, ..., A_n *n entiers strictement positifs*, $\forall B \in \mathcal{B}$,

$$\frac{1}{C}\lambda(B)\lambda\left(\Delta_{A_1,..,A_n}\right) \le \lambda\left(T^{-n}(B) \cap \Delta_{A_1,..,A_n}\right) \le C\lambda(B)\lambda\left(\Delta_{A_1,..,A_n}\right)$$

Preuve : Ce lemme est un corollaire du précédent en remarquant que la densité de la mesure de Gauss λ est comprise entre $\frac{1}{2\ln(2)}$ et $\frac{1}{\ln(2)}$. Ainsi, $C = \frac{4}{\ln(2)}$ convient. $\square$

Théorème 1.6 *Le système dynamique mesuré $([0,1[,T,\lambda)$ est ergodique.*

Preuve : Soit $B \in \mathcal{B}$ un borélien invariant par T. D'après le lemme précédent, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall A_1$, ..., A_n n entiers strictement positifs, $\frac{1}{C}\lambda(B)\lambda(\Delta_{A_1,..,A_n}) \leq \lambda(B \cap \Delta_{A_1,..,A_n}) \leq C\lambda(B)\lambda(\Delta_{A_1,..,A_n})$. Or, l'ensemble des $\Delta_{A_1,..,A_n}$ engendre les boréliens de $[0,1[$. Et donc, $\forall A \in \mathcal{B}$, $\frac{1}{C}\lambda(B)\lambda(A) \leq \lambda(B \cap A) \leq C\lambda(B)\lambda(A)$. En prenant $A = B^c$, on obtient $\lambda(B)(1 - \lambda(B)) = 0$ et donc $\lambda(B) = 0$ ou $\lambda(B) = 1$. Ceci montre l'ergodicité du système $([0,1[, T, \lambda)$. □

Remarque : On peut même démontrer que le système $([0,1[, T, \lambda)$ est fortement mélangeant (cf. [Bi]).

Donnons une première application de l'ergodicité (cf. [CFS]).

Définition 1.5 *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace muni d'une tribu et μ et ν deux mesures de probabilité définies sur cette tribu.*
On dit que ν et μ sont mutuellement singulières *si $\exists A \in \mathcal{T}$, $\nu(A) = \mu(A^c) = 0$.*

Lemme 1.5 *Soit (X, T, μ) un système dynamique mesuré ergodique.*
Si ν est une mesure ergodique pour T différente de μ, alors ν et μ sont mutuellement singulières.

Preuve : On s'appuie ici sur le cours [Fat].
Supposons que ν est ergodique mais que ν et μ ne sont pas mutuellement singulières. On note $\mathcal{M}(X,T)$ l'ensemble des mesures T-invariantes. On sait que $\mathcal{M}(X,T)$ est un convexe compact dont les points extrémaux sont les mesures ergodiques. Soit $\tilde{\mu} = \frac{1}{2}(\mu + \nu) \in \mathcal{M}(X,T)$. $\tilde{\mu}$ est une mesure ergodique. En effet, si A est un ensemble T-invariant, $\nu(A) = 0$ ou 1 et $\mu(A) = 0$ ou 1. Mais comme ν et μ ne sont pas mutuellement singulières, on a donc $\nu(A) = \mu(A)$. On en déduit que $\tilde{\mu}(A) = 0$ ou 1. $\tilde{\mu}$ est donc une mesure ergodique, combinaison linéaire de deux mesures ergodiques différentes : contradiction. □

Théorème 1.7 *λ est la seule mesure ergodique absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Preuve : Supposons que μ est une autre mesure ergodique absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Comme λ est une mesure équivalente à la mesure de Lebesgue, μ est donc une mesure absolument continue par rapport à λ. Ceci empêche μ et λ d'être mutuellement singulières et contredit donc le lemme précédent. □

Nous allons maintenant utiliser le théorème ergodique ponctuel de Birkhoff. Celui-ci affirme que pour toute fonction $f \in L^1([0,1[, \lambda)$, les sommes de Birkhoff $S_n(f,T)(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x)$ convergent presque partout vers la constante $\int f \, d\lambda$.

Proposition 1.7 *Pour presque tout $x \in \Omega$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+...+a_n}{n} = \infty$. En particulier, les a_i ne sont pas bornés.*

Preuve : On pose $f(x) = E\left(\frac{1}{x}\right)$. On a bien $S_n(f,T)(x) = \frac{a_1+...+a_n}{n}$ et $\int f \, d\lambda = \infty$. Pour rendre l'argument rigoureux, on pose $f_m(x) = \begin{cases} E\left(\frac{1}{x}\right) & x > \frac{1}{m} \\ 0 & x \leq \frac{1}{m} \end{cases}$. On a pour presque tout x, $\lim_{n\to\infty} S_n(f_m,T)(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}$. Or $S_n(f,T)(x) > S_n(f_m,T)(x)$ et en faisant tendre n vers l'infini puis m vers l'infini, on démontre le résultat. □

Proposition 1.8 *Pour presque tout $x \in \Omega$, $\lim_{n\to\infty}(a_1...a_n)^{1/n} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k(k+2)}\right)^{\frac{\ln k}{\ln 2}}$.*

Preuve : On pose $g(x) = \ln\left(E\left(\frac{1}{x}\right)\right)$. On a alors $S_n(g,T)(x) = \ln\left((a_1...a_n)^{1/n}\right)$. De même que précédemment, on pose $g_m(x) = \begin{cases} \ln\left(E\left(\frac{1}{x}\right)\right) & x > \frac{1}{m} \\ 0 & x \leq \frac{1}{m} \end{cases}$. On a pour presque tout x, $\lim_{n\to\infty} S_n(g_m,T)(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\ln(k)}{\ln(2)} \ln\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right)$. En faisant tendre m vers l'infini, on démontre le résultat. □

On s'intéresse maintenant à la vitesse de convergence de l'algorithme. On sait qu'on a la majoration $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ (cf. le théorème 1.1). Il faut donc comprendre la vitesse à laquelle les q_n divergent vers l'infini. On a pour cela besoin de deux lemmes.

Lemme 1.6 *Soit $x \in \Omega$, $x = [0, a_1, ..., a_n, ...]$.*
$\forall n \geq 1$, $\left|\ln \frac{x}{p_n/q_n}\right| \leq \frac{1}{2^{n-2}}$

Preuve : On établit le résultat pour $n \geq 2$ et on le vérifie à la main pour $n = 1$. On vérifie facilement par récurrence que : $\forall n \geq 2 \begin{cases} p_n \geq 2^{(n-2)/2} \\ q_n \geq 2^{(n-1)/2} \end{cases}$. Ce résultat aurait pu figurer dans la section 1.1 mais il ne sert que dans ce lemme. On en déduit que $\forall n \geq 2$, $\left|\frac{x}{p_n/q_n} - 1\right| \leq \frac{1}{p_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. On pose $\alpha_n = \frac{x}{p_n/q_n} - 1$. On a donc $|\alpha_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2}$ (car $n \geq 2$) et on cherche à majorer $|\ln(1+\alpha_n)|$. On peut alors vérifier que $|\theta| \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow |\ln(1+\theta)| \leq 2|\theta|$. Le lemme découle de cette dernière constatation. □

Lemme 1.7 *Soit $x \in \Omega$, $x = [0, a_1, ..., a_n, ...]$.*
$\forall n \geq 1$,

$$\frac{1}{q_n(x)} = \prod_{k=1}^{n} [0, a_k(x), ..., a_n(x)]$$

Preuve : On a (en utilisant le fait que $q_n(T(x)) = p_{n+1}(x)$ et $q_0(T^n(x)) = 1$) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_n(x)} &= \prod_{k=1}^{n} \frac{q_{n-k}(T^k(x))}{q_{n-k+1}(T^{k-1}(x))} \\ &= \prod_{k=1}^{n} \frac{p_{n-k+1}(T^{k-1}(x))}{q_{n-k+1}(T^{k-1}(x))} \\ &= \prod_{k=1}^{n} [0, a_1(T^{k-1}(x)), ..., a_{n-k+1}(T^{k-1}(x))] \\ &= \prod_{k=1}^{n} [0, a_k(x), ..., a_n(x)] \end{aligned}$$

□

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème fondamental suivant connu sous le nom du théorème de Lévy.

Théorème 1.8 *Pour presque tout $x \in \Omega$, $x = [0, a_1, ..., a_n, ...]$, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(q_n(x))}{n} = \frac{\pi^2}{12 \ln 2}$$

Preuve : Appliquons tout d'abord le lemme 1.6 à $T^{k-1}(x)$ et à $(n-k+1)$. On obtient :
$\left|\ln\left(T^{k-1}(x)\right) - \ln\left(\frac{p_{n-k+1}(T^{k-1}(x))}{q_{n-k+1}(T^{k-1}(x))}\right)\right| \leq \frac{1}{2^{n-k-1}}$ ce qui s'écrit aussi :
$\ln\left(T^{k-1}(x)\right) - \ln\left([0, a_k(x), ..., a_n(x)]\right) = \frac{\theta_k}{2^{n-k-1}}$ avec $|\theta_k| \leq 1$.
En utilisant maintenant le lemme 1.7, on a :
$\ln\left(\frac{1}{q_n(x)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(T^{k-1}(x)\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\theta_k}{2^{n-k-1}}$
En sommant la série géométrique, on obtient : $\frac{1}{n}\ln(q_n(x)) = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(T^k(x)\right) + \frac{\theta}{n}$ avec $|\theta| \leq 4$. On applique maintenant le théorème ergodique à la fonction $f = \ln$ et on obtient :

$$-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty}\ln\left(T^k(x)\right) = -\frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\,dx$$

Le lemme suivant permet donc de conclure. □

Lemme 1.8

$$-\frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\,dx = \frac{\pi^2}{12\ln 2}$$

Preuve : Par intégration par partie, on trouve : $-\frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$. Puis, formellement, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^k}{k+1}\,dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_0^1 \frac{x^k}{k+1}\,dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2} \\
&= \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

la dernière égalité reposant sur le fait que $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (utiliser par exemple l'identité de Parseval appliquée au développement en série de Fourier de la fonction qui vaut l'identité sur $]-\pi,\pi]$ et est 2π-périodique).
Dans la série d'égalité ci-dessus, il nous reste à justifier l'interversion de la somme et de l'intégrale. Elle est justifier par la convergence uniforme pour $x \in [0,1]$ de la série de fonction $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k+1}$. Pour prouver cette converge uniforme, on utilise par exemple la transformation d'Abel pour démontrer le critère de Cauchy uniforme ou le théorème de convergence radial des séries entières. □

Corollaire 1.9 *Pour presque tout $x \in \Omega$, $x = [0, a_1, ..., a_n, ...]$, on a :*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| = -\frac{\pi^2}{6\ln 2}$$

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème 1.8 en prenant le logarithme des inégalités :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{q_n(q_n+q_{n+1})} < \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ (cf. théorème 1.1). □

1.3 Descriptions géométriques de l'algorithme des fractions continues

L'algorithme classique des fractions continues a de nombreuses interprétations géométriques, souvent très fructueuses pour construire des généralisations et de nouveaux algorithmes. Nous présentons tout d'abord l'algorithme de Poincaré, et l'algorithme de Farey. Ensuite, nous montrons comment le flot géodésique sur la surface modulaire (domaine fondamental de l'action du groupe modulaire $SL(2,\mathbb{Z})$ sur le plan hyperbolique) peut être codé en utilisant les fractions continues : pour cela, on identifie le quotient à gauche $SL(2,\mathbb{Z})\backslash SL(2,\mathbb{R})$ à l'espace des réseaux de $\mathbb{R}^2$ et on construit une base sur cette espace. Ce point de vue géométrique nous donne simplement une nouvelle extension naturelle (cf. la définition 1.2) de l'application T définie dans la section 1.2. Cela nous permet de retrouver la mesure de Gauss et d'interpréter géométriquement la constante de Lévy.

Algorithme de Poincaré

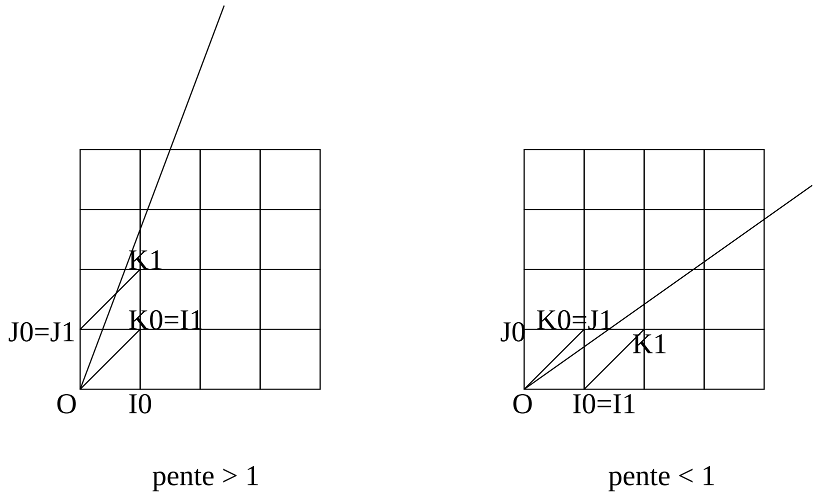

Fig. 4 – Algorithme de Poincaré

Décrivons tout d'abord l'algorithme de Poincaré (cf. figure 4). Soit D une droite passant par l'origine O et de pente irrationnelle positive α, dans la plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé. On considère le carré (O, I_0, K_0, J_0) où O est l'origine du repère, I_0 le point de coordonnées $(1, 0)$, J_0 le point de coordonnées $(0, 1)$ et K_0 le point de coordonnées $(1, 1)$. D sort du carré, ou bien par le côté $[J_0K_0]$ ($\alpha > 1$), ou bien par le côté $[I_0K_0]$ ($\alpha < 1$). Dans le premier cas, on pose $I_1 = K_0$, $J_1 = J_0$ et K_1 tel que (O, I_1, K_1, J_1) soit un parallélogramme. Dans le second cas, on pose $I_1 = I_0$, $J_1 = K_0$ et K_1 tel que (O, I_1, K_1, J_1) soit un parallélogramme. On itère ensuite l'algorithme en regardant à chaque étape par quel côté du parallélogramme sort la droite D : l'algorithme s'itère indéfiniment car la droite ne passe par aucun sommet de parallélogramme (la pente étant irrationnelle). Pour tout n, la droite D est dans le cône défini par les deux droites $(0, I_n)$, (O, J_n).
Cet algorithme admet de nombreuses généralisations en dimension 3.
Pour comprendre en quoi l'algorithme de Poincaré est relié aux fractions continues, on peut considérer l'opération inverse où on fixe la base et qui consiste à chaque étape à prendre l'image de la droite D. Soit $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Dans le cas où $\alpha > 1$, on

applique M^{-1}, $(E(\alpha))$-fois et la pente de la droite devient $\alpha_1 = \alpha - E(\alpha) < 1$. Dans le cas où $\alpha < 1$, on applique N^{-1}, $\left(E\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)$-fois et la pente de la droite devient $\alpha_1 = \frac{1}{1/\alpha - E(1/\alpha)} > 1$. Le rapport avec l'algorithme des fractions continues est assez évident.

Proposition 1.9 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $[a_0, a_1, ..., a_n, ...]$ son développement en fraction continue. Alors, l'algorithme de Poincaré revient à écrire :*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = M^{a_0} N^{a_1} ... M^{a_{2k}} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_{2k+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = M^{a_0} N^{a_1} ... M^{a_{2k}} N^{a_{2k+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_{2k+2} \end{pmatrix}$$

De plus, on a :
$\alpha_{2k+1} = \frac{1}{x_{2k+1}} = T^{2k}(\alpha - a_0)$ *et* $\alpha_{2k} = x_{2k} = \frac{1}{T^{2k-1}(\alpha - a_0)}$, *si on note* $x_k = [a_k, ...]$.

Preuve : La preuve se fait par récurrence, en écrivant les fomules que l'on a données avant la proposition. □

Proposition 1.10 *Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $[a_0, a_1, ..., a_n, ...]$ son développement en fraction continue.*
Alors, $\forall k \geq 0$,
$M^{a_0} N^{a_1} ... M^{a_{2k}} = \begin{bmatrix} q_{2k} & q_{2k-1} \\ p_{2k} & p_{2k-1} \end{bmatrix}$ *et* $M^{a_0} N^{a_1} ... M^{a_{2k}} N^{a_{2k+1}} = \begin{bmatrix} q_{2k} & q_{2k+1} \\ p_{2k} & p_{2k+1} \end{bmatrix}$

Preuve : La preuve se fait par récurrence. □

Remarque : Si, dans l'algorithme de Poincaré, on ne regroupe pas les puissances de M et de N, on obtient un *algorithme additif* des fractions continues défini ici par l'itération de l'application $F \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x-1 & \text{si } x \geq 1 \\ \frac{x}{1-x} & \text{si } x < 1 \end{array} \right. \end{array} \right.$. D'après ce qui précède, on sait que $\forall \alpha > 0$, $\forall k > 0$, $\exists n, m$, $T^{2k}(\alpha) = F^n(\alpha)$ et $T^{2k+1}(\alpha) = \frac{1}{F^m(\alpha)}$.

Définition 1.6 *Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $[a_0, a_1, ..., a_n, ...]$ son développement en fraction continue et $\frac{p_n}{q_n}$ ses convergents (ou* convergents primaires*).*
Les convergents secondaires *de α sont les $\frac{p_{n,i}}{q_{n,i}}$ avec $1 \leq i \leq a_n - 1$ définis par :*
$$\left\{ \begin{array}{l} p_{n,i} = ip_{n-1} + p_{n-2} \\ q_{n,i} = iq_{n-1} + q_{n-2} \end{array} \right.$$

Remarque : On a : $\forall n > 0$, $\forall 0 \leq i \leq a_n - 1$, $(p_{n,i}, q_{n,i}) = 1$ (car $p_{n+1,i}q_n - p_n q_{n+1,i} = p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n$).

Corollaire 1.10 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et I_n, J_n, K_n les suites de points construits par l'algorithme de Poincaré.*
Les rapports (ordonnée / abscisse) des sommets I_n et J_n sont des convergents primaires ou secondaires de α.

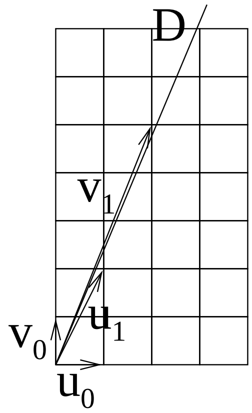

FIG. 5 – Variante de l'algorithme de Poincaré

Preuve : Il suffit de remarquer que les coefficients de la suite de matrice $M^{a_0}N^{a_1}...M^{a_{2k}}$ donnent exactement les coordonnées des I_n et des J_n. On observe ainsi que l'on obtient des convergents primaires aux moments où on passe de M à N ou de N à M. □

Remarque : Pour obtenir seulement les convergents primaires, il faut modifier légèrement l'algorithme de Poincaré. Soit D une droite de pente irrationnelle passant par l'origine. Partant des vecteurs $\overrightarrow{u_0} = \overrightarrow{OI_0}$ et $\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{OJ_0}$, on définit $\overrightarrow{u_1}$ comme la somme de $\overrightarrow{u_0}$ et de autant de $\overrightarrow{v_0}$ que l'on peut ajouter, juste avant de couper la droite (cf. la figure 5). De même, $\overrightarrow{v_1}$ est défini comme la somme de $\overrightarrow{v_0}$ et de autant de $\overrightarrow{u_1}$ que l'on peut ajouter, juste avant de couper la droite. Cet algorithme géométrique correspond algébriquement à regrouper les puissances des matrices M et N. Les rapports (ordonnée / abscisse) des vecteurs $\overrightarrow{u_k}$ et $\overrightarrow{v_k}$ donnent les convergents primaires de la pente de la droite D.

Remarque : On peut également donner une vision géométrique pour obtenir les convergents primaires à partir de l'ensemble des convergents I_n et J_n donnés par l'algorithme de Poincaré. Si on imagine que la droite D est un fil tendu accroché à l'infini, que les points I_n et J_n sont des clous sur une planche symbolisant $\mathbb{R}^2$, et qu'une main placée à l'origine déplace le fil, alors, les clous que touchent le fil tendu correspondent exactement aux convergents primaires. Ainsi, sur le figure 5, quand le fil est déplacé vers la droite, il va toucher les extrémités des vecteurs $\overrightarrow{u_k}$ et quand le fil est déplacé vers la gauche, il va toucher les extrémités des vecteurs $\overrightarrow{v_k}$. Ce dispositif imaginaire est appellé la *planche à clou de Klein.*

D'un point de vue algébrique, le monoïde engendré par M et N est $SL(2,\mathbb{N})$. En effet, pour une matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dans $SL(2,\mathbb{N})$, on a la propriété suivante : $a \leq b \Longrightarrow c \leq d$. En multipliant plusieurs fois à droite par M^{-1} ou N^{-1} suivant que $a \geq b$ ou que $b \geq a$, on obtient une matrice de $SL(2,\mathbb{N})$ avec $a = 0$ (ce qui est impossible) ou $b = 0$ (ce qui conduit à $a = d = 1$ et on retrouve une puissance de M).
D'autre part, ce monoïde est un monoïde libre. Ceci se démontre à partir des propriétés suivantes : pour $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{N})$, $(\exists B \in SL(2,\mathbb{N}),\ A = BM) \iff a \geq b$ et $(\exists B \in SL(2,\mathbb{N}),\ A = BN) \iff b \geq a$.

Une des raisons pour lesquelles il est difficile de trouver une bonne généralisation de l'algorithme de Poincaré en dimension 3 est que la structure du monoïde $SL(3, \mathbb{N})$ est mal connu.

L'algorithme de Poincaré est une interprétation géométrique de l'algorithme des fractions continues qui permet de très bien comprendre le billard carré. On peut facilement coder la trajectoire de la droite D passant par O en fonction du développement de sa pente α.

Algorithme de Farey

Pour construire la suite de parallélogrammes dans l'algorithme de Poincaré, on divise en deux, à chaque étape, le cône formé par les deux droites (OI_n) et (OJ_n) en construisant le point $K_n = I_n + J_n$. Si la droite est dans le cône (OI_n), (OK_n), on pose $J_{n+1} = K_n$ et $I_{n+1} = I_n$. Si la droite est dans le cône (OJ_n), (OK_n), on pose $I_{n+1} = K_n$ et $J_{n+1} = J_n$. Cette interprétation permet d'introduire l'algorithme de Farey (cf. [NZM]).

Supposons que $\alpha < 1$. Le premier cône considéré est $\frac{0}{1} < \alpha < \frac{1}{1}$. On considère ensuite la direction $\frac{1}{2} = \frac{0+1}{1+1}$, etc... On peut représenter les diverses directions discriminantes dans une table (cf. la table 1).

ligne 1	$\frac{0}{1}$										$\frac{1}{1}$
ligne 2	$\frac{0}{1}$					$\frac{1}{2}$					$\frac{1}{1}$
ligne 3	$\frac{0}{1}$			$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$			$\frac{1}{1}$
ligne 4	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{1}$
ligne 5	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{1}$

TAB. 1 – Table de Farey

La $(n+1)$ième ligne est construite en recopiant la $n$ième ligne et en insérant entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ la fraction $\frac{a+b}{c+d}$ à condition que $c+d \leq n+1$. On démontre facilement par récurrence que toutes ces fractions sont irréductibles (deux fractions consécutives $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ vérifient $cb-ad = 1$) et que sur la nième ligne, on a, rangées par ordre croissant, toutes les fractions irréductibles dont le dénominateur est plus petit que n (ceci se démontre en utilisant la propriété suivante : pour $a, b \geq 0$ et $c, d > 0$, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$). Ceci montre que les convergents secondaires sont aussi des fractions irréductibles.

Remarque : Ce qui précède montre qu'après n itérations de l'algorithme de Poincaré, si on note r_n (resp. s_n) le rapport (abscisse/ordonnée) du point I_n (resp. J_n), on est certain que les réels $\left|x - \frac{p}{q}\right|$ avec $(p, q) = 1$ et $0 < q \leq n$ sont plus grands ou égaux que $|x - r_n|$ et $|x - s_n|$.

Rectangles et empilements

Nous allons maintenant donner une autre interprétation géométrique de l'algorithme des fractions continues, qui va nous permettre de construire une extension naturelle de l'application T et de retrouver la mesure invariante de Gauss.

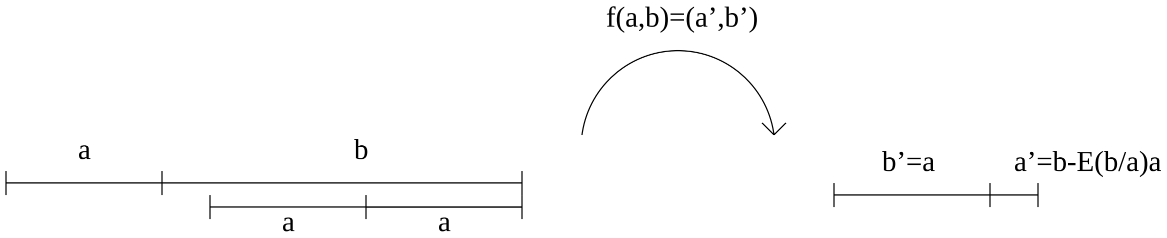

FIG. 6 – Algorithme sur deux intervalles

On considère deux intervalles de tailles différentes, le plus petit de longueur a et le plus grand de longueur b (cf. la figure 6). Soit f l'application qui enlève au plus grand des intervalles le plus petit, autant de fois que c'est possible. On a $f(a,b) = \left(b - E\left(\frac{b}{a}\right)a, a\right)$ (les deux coordonnées s'inversent car $b - E\left(\frac{b}{a}\right)a < a$). Si on normalise le plus grand des intervalles à 1, l'application f s'écrit $f(a,1) = (\left\{\frac{1}{a}\right\}, 1) = (T(a), 1)$. On retrouve donc l'application T de l'algorithme des fractions continues définie dans la section précédente par $T(x) = \left\{\frac{1}{x}\right\}$.
Nous pouvons là encore définir un algorithme additif en n'enlevant qu'un seul intervalle à chaque étape. On pose alors $\tilde{f}(a,b) = \left\{\begin{array}{ll}(b-a,a) & \text{si } (b-a) > a\\ (a, b-a) & \text{si } (b-a) \leq a\end{array}\right.$. En normalisant le plus grand des intervalles à 1, l'application $\tilde{f}$ s'écrit $\tilde{f}(a,1) = \left\{\begin{array}{ll}(\frac{1-a}{a},1) & \text{si } (1-a) > a\\ (\frac{a}{1-a},1) & \text{si } (1-a) \leq a\end{array}\right.$ ce qui nous permet d'introduire la fonction $G\left\{\begin{array}{ccc}[0,1[& \longrightarrow & [0,1[\\ x & \longmapsto & \max\left(\frac{1-x}{x}, \frac{x}{1-x}\right)\end{array}\right.$.

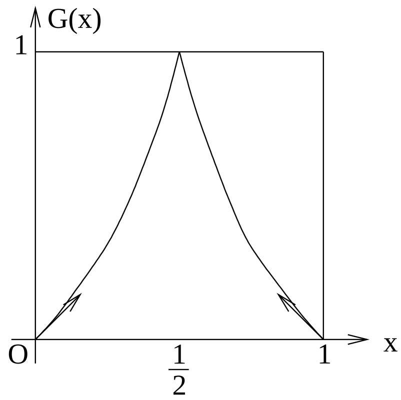

FIG. 7 – Représentation de G

De ce qui précède, on déduit que $\forall x \in [0,1[, \forall k > 0, \exists n, T^k(x) = G^n(x)$ (cf. la figure 7). On peut même ici préciser, pour $k = 1$: $T(x) = G^n(x)$ où n est le plus petit entier tel que $(G^n)'(x) < 0$. L'application G admet comme mesure invariante $\frac{dx}{x}$ qui est infinie : ceci est lié au fait que l'algorithme additif converge moins vite que l'algorithme multiplicatif.

Revenons maintenant à l'algorithme multiplicatif et à l'application T. Nous allons construire géométriquement une extension naturelle à T. Si T n'est pas injective, c'est parce qu'on "oublie" à chaque étape $E\left(\frac{1}{x}\right)$ (c'est-à-dire le nombre de fois qu'on enlève a à b). Pour

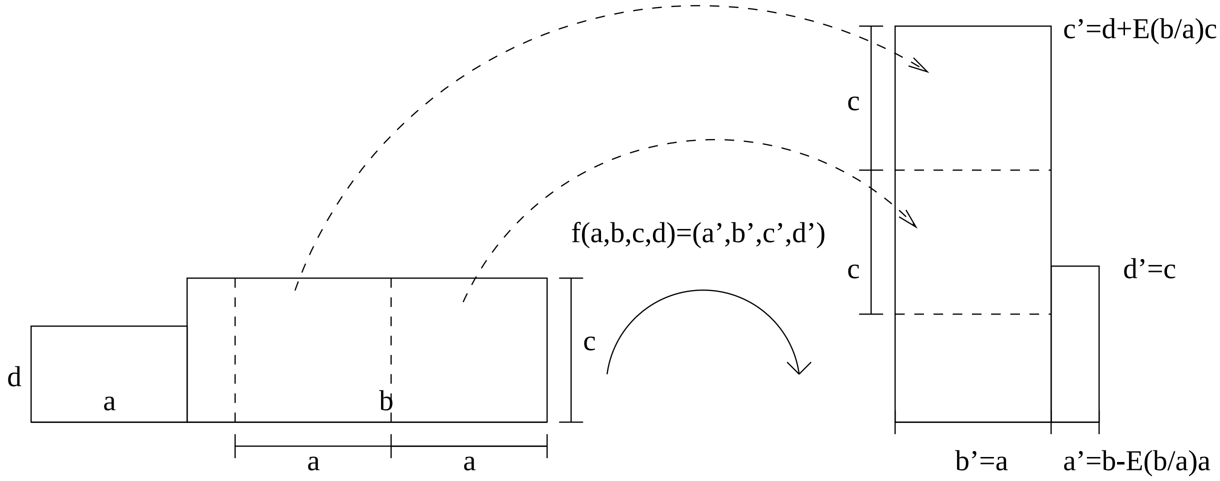

FIG. 8 – Algorithme sur deux rectangles

garder la mémoire de cette valeur, on construit des rectangles de base les intervalles a et b : $a \times d$ et $b \times c$ (cf. la figure 8). On impose $a < b$, $d < c$ et $ad + bc = 1$ (la somme des aires vaut 1). A chaque étape, on enlève a à b autant de fois que l'on peut, et on conserve l'aire totale en empilant le morceau $\left(E\left(\frac{b}{a}\right)a\right) \times c$ sur $a \times \left(E\left(\frac{b}{a}\right)c\right)$ (cf. la figure 8). L'application f s'écrit : $f(a,b,c,d) = \left(b - E\left(\frac{b}{a}\right)a, a, d + E\left(\frac{b}{a}\right)c, c\right)$ (on a bien $d + E\left(\frac{b}{a}\right)c > c$: le grand rectangle est devenu le petit). Si on normalise $b = 1$ en divisant a et b par b et en multipliant c et d par b, (et compte tenu du fait que $ad + bc = 1$) on obtient $f(a, 1, 1 - ad, d) = (T(a), 1, 1 - T(a)a(1 - ad), a(1 - ad))$, ce qui nous permet de définir, en ne retenant que les côtés du petit rectangle comme variables :
$\tilde{T}\left\{\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ (a,d) & \longmapsto & (T(a), a(1-ad)) \end{array}\right.$ avec $\Omega = \left\{(a,d),\ 0 \le a < 1 \text{ et } 0 \le d < \frac{1}{1+a}\right\}$. (on trouve la condition sur d en écrivant $d < c$ et $c = 1 - ad$). L'application f est bijective (on vérifie que $f^{-1}(a', b', c', d') = \left(b', a' + E\left(\frac{c'}{d'}\right)b', d', c' - E\left(\frac{c'}{d'}\right)d'\right)$), donc $\tilde{T}$ également. De plus, la matrice jacobienne de $\tilde{T}$ vaut $\begin{bmatrix} -\frac{1}{a^2} & 0 \\ 1 - 2ad & -a^2 \end{bmatrix}$ de déterminant 1. $\tilde{T}$ préserve donc la mesure de Lebesgue ν. On a donc :

Proposition 1.11 *Le système $(\Omega, \tilde{T}, \nu)$ (où ν désigne la mesure de Lebesgue) est une extension naturelle de $([0,1[, T, \lambda)$.*

Ceci nous pemet de retrouver, de manière géométrique la mesure de Gauss λ invariante par T. Il suffit d'intégrer la mesure de Lebesgue suivant les bandes verticales dans Ω pour obtenir la densité : $\int_0^{1/(1+x)} dy = \frac{1}{1+x}$.
Remarque : On vérifie que l'application $g : (x,y) \mapsto \left(x, \frac{y}{1-xy}\right)$ envoie Ω sur le carré $[0,1[\times[0,1[$ et conjugue $\tilde{T}$ à $\overline{T}$ définie dans la section précédente par $\overline{T}(x,y) = \left(T(x), \frac{1}{y+E\left(\frac{1}{x}\right)}\right)$.

Codage du flot géodésique sur la surface modulaire

Nous allons maintenant expliquer comment l'algorithme des fractions continues permet de coder le flot géodésique sur la surface modulaire. Nous allons pour cela utiliser la transformation d'empilement des rectangles f. On se réfère ici à [Ar].

Il faut tout d'abord expliquer pourquoi, du point de vue algébrique, le flot géodésique sur la surface modulaire est l'action à droite, sur l'espace des réseaux $SL(2,\mathbb{Z})\backslash SL(2,\mathbb{R})$, des matrices de la forme $g_t = \begin{bmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{bmatrix}$.

Comme nous l'avons déjà remarqué lors de la démonstration du lemme 1.2, l'espace des géodésiques s'identifie naturellement à l'espace unitaire tangent $\mathbb{U}$ du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$, quotienté par le flot géodésique. D'autre part, $PSL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})/\{+Id, -Id\}$ (quotient de $SL(2,\mathbb{R})$ par son centre) agit simplement transitivement (c'est-à-dire librement et transitivement) sur $\mathbb{U}$ par : étant donné $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in PSL(2,\mathbb{R})$, on pose $\tau(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ et on définit l'action de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ sur $(z, \overrightarrow{u}) \in \mathbb{U}$ par $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.(z, \overrightarrow{u}) = (\tau(z), \tau'(z).\overrightarrow{u})$ En fixant un élément de $\mathbb{U}$ (par exemple $(i, \overrightarrow{u})$ où $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire vertical de coordonnées $(0,1)$), on peut donc identifier $\mathbb{U}$ à $PSL(2,\mathbb{R})$. Par ailleurs, on sait que $\gamma(t) = e^t i = g_t.i$ est une géodésique (c'est une droite verticale). On choisit l'écriture $e^t i$ car ainsi, la géodésique est paramétrée par sa longueur. Comme l'action de $PSL(2,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{U}$ est simplement transitive, on obtient le flot géodésique en faisant agir ce groupe sur γ. On voit donc que le flot géodésique sur $\mathbb{H}$ se représente matriciellement par l'action à droite, sur $PSL(2,\mathbb{R})$, du groupe $\{g_t,\, t \in \mathbb{R}\}$.

La surface modulaire est le quotient à gauche de $\mathbb{H}$ par l'action de $PSL(2,\mathbb{Z})$. C'est une variété de dimension 2. Comme $PSL(2,\mathbb{Z})$ est engendré par les deux matrices $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $(z \mapsto z+1)$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $(z \mapsto -\frac{1}{z})$, *on montre qu*'un domaine fondamental de cette action est (au bord près) l'intersection des deux domaines fondamentaux (cf. la figure 9) : $-\frac{1}{2} \leq z \leq \frac{1}{2}$ (domaine fondamental pour $z \mapsto z+1$) et $|z| \geq 1$ (domaine fondamental pour $z \mapsto -\frac{1}{z}$). Ce domaine fondamental est une représentation de la surface modulaire. Et le fibré unitaire tangent à cette surface s'identifie au quotient $PSL(2,\mathbb{Z})\backslash PSL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{Z})\backslash SL(2,\mathbb{R})$.

Nous construisons maintenant un système de coordonnées sur l'espace des réseaux $SL(2,\mathbb{Z})\backslash SL(2,\mathbb{R})$. Tout d'abord, cet espace est bien l'espace des réseaux de $\mathbb{R}^2$ car, si on associe à une matrice de $SL(2,\mathbb{R}) = \begin{bmatrix} a & c \\ -b & d \end{bmatrix}$ le réseau engendré par les deux vecteurs $e_1 = (a,c)$ et $e_2 = (-b,d)$, tout changement de base dans ce réseau se traduit par la multiplication à gauche par une matrice de $SL(2,\mathbb{Z})$. On peut montrer, de manière géométrique, qu'il existe un domaine fondamental pour l'action à gauche de $SL(2,\mathbb{Z})$ sur $SL(2,\mathbb{R})$ formé de l'union des trois ensembles :

$\Omega_0 = \Big\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ ad+bc = 1,\ 0 < b < 1 \leq a, 0 \leq c < d\Big\}$

$\Omega_1 = \Big\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,\ ad+bc = 1,\ 0 < a < 1 \leq b, 0 \leq d < c\Big\}$

$\Omega_2 = \Big\{(a,b,0,d) \in \mathbb{R}^4,\ ad = 1,\ 0 < b < a < 1\Big\}$

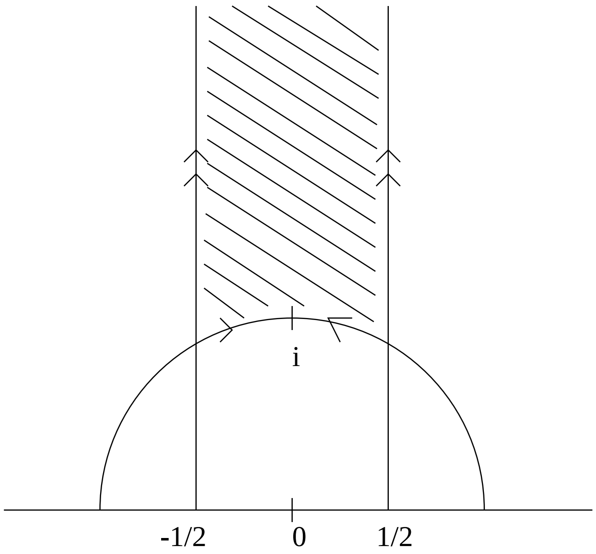

FIG. 9 – Domaine fondamental pour l'action de $PSL(2,\mathbb{Z})$

Donnons quelques détails (cf. les figures 10 et 11). On considère un réseau dans $\mathbb{R}^2$ et un point x de ce réseau. On trace la droite verticale issue de x : elle rencontre au moins un segment horizontal de longueur 2 du type $]y-1,y+1[$ (où y est un point du réseau). Soit y tel que $]y-1,y+1[$ est le premier segment horizontal rencontré. On choisit ensuite le point z le plus proche de la droite verticale, dont l'ordonnée est comprise entre celles de x et y, et tel que z et y soient de part et d'autre de cette droite . On prend alors pour base du réseau les vecteurs $(y-x, z-x)$ si y est à droite de x et $(z-x, y-x)$ si y est à gauche de x (on veut simplement que la base soit directe). Dans le premier cas, on a $(a,b,c,d) \in \Omega_1$. Dans le second cas, on a $(a,b,c,d) \in \Omega_0$. Il y a des cas (que l'on ne détaille pas) où la construction tombe en défaut : on introduit alors Ω_2 (cela correspond au cas où le réseau contient un vecteur horizontal petit ; le petit rectangle est alors de hauteur nulle et on ne peut plus assurer que la largeur du plus grand rectangle soit supérieure à 1). Si on considère les rectangles $a \times d$ et $b \times c$, on voit que l'on s'est ramené à l'étude précédente : Ω_0 correspond au cas où c'est le rectangle de droite le plus petit et Ω_1 correspond au cas où c'est le rectangle de gauche le plus petit.

Considérons maintenant le flot géodésique dans cette base. On a $g_t(a,b,c,d) = (e^{t/2}a, e^{t/2}b, e^{-t/2}c, e^{-t/2}d)$. On note Σ_0 le bord rentrant (pour le flot) de Ω_0 (c'est-à-dire le bord de Ω_0 où $a=1$) et Σ_1 le bord rentrant de Ω_1 (c'est-à-dire le bord de Ω_1 où $b=1$). On s'intéresse à l'application de premier retour sur la surface $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$. Partant d'un point $(a,1,c,d)$ de Σ_1, on voit que l'on sort de Ω_1 au moment où $a=1$ (le flot est sortant sur $a=1$). On a alors $g_{-2\ln a}(a,1,c,d) = (1, 1/a, ca, da)$. Mais on passe alors dans Ω_0 en appliquant, à gauche, la matrice de $SL(2,\mathbb{Z})$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ E(1/a) & 1 \end{bmatrix}$. On obtient alors $(1, \{1/a\}, ac, a(cE(1/a)+d))$, situé sur Σ_0. De même, si on part d'un point $(1,b,c,d)$ situé sur Σ_0, on sort de Ω_0 au point $g_{-2\ln b} = (1/b, 1, cb, db)$. On passe alors dans Ω_1 en appliquant la matrice $\begin{bmatrix} 1 & E(1/b) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. On obtient alors le point de Σ_1 : $(\{1/b\}, 1, b(c+dE(1/b)), db)$. L'application de premier retour sur la surface Σ est donc un revêtement d'ordre deux de l'application f précédemment définie (car on ne respecte plus la convention $a<b$: on a donc soit $a<b$, soit $b<a$).

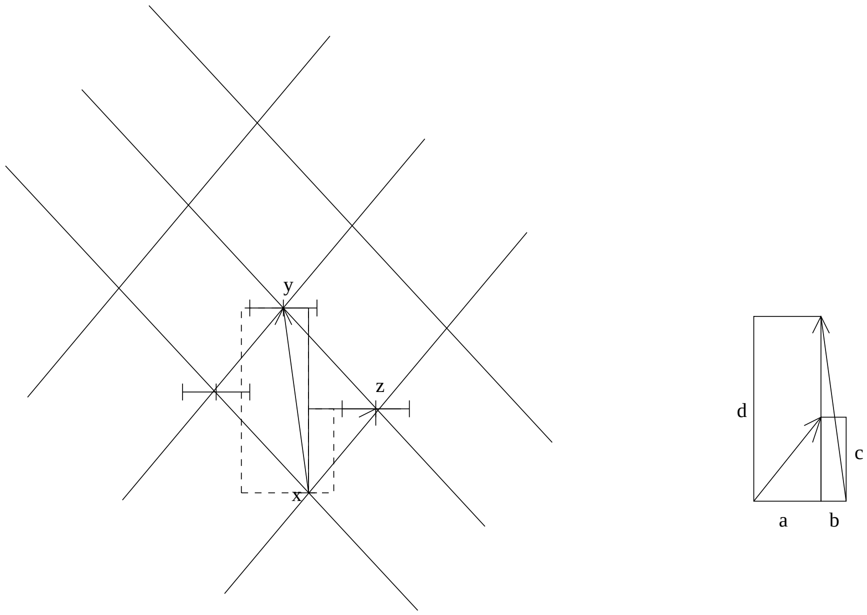

FIG. 10 – Cas où y est à gauche : $(a, b, c, d) \in \Omega_0$

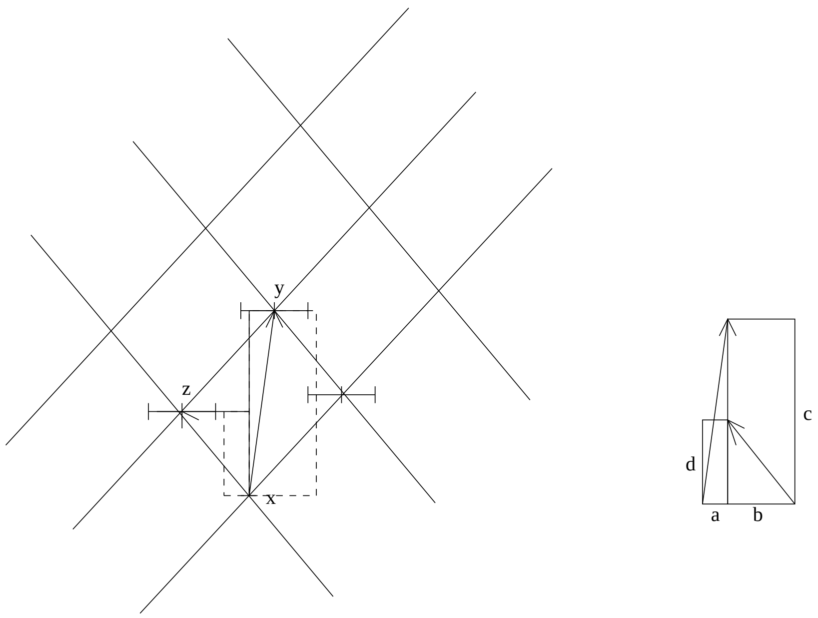

FIG. 11 – Cas où y est à droite : $(a, b, c, d) \in \Omega_1$

Proposition 1.12 *On identifie la surface* $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$ *à* $\Omega \times \{-1, 1\}$ *en prenant* (b, c) *comme variables sur* Σ_0 *et* (a, d) *comme variables sur* Σ_1.
L'application de premier retour est alors un revêtement d'ordre 2 de l'application $\tilde{T}$ *précédemment définie. Elle s'écrit :*

$$\begin{cases} \Omega \times \{-1,1\} & \longrightarrow & \Omega \times \{-1,1\} \\ (x, y, \epsilon) & \longrightarrow & \left(\left\{\frac{1}{x}\right\}, x - x^2 y, -\epsilon\right) \end{cases}$$

De manière assez surprenante, cette construction va nous permetter de retrouver le théorème de Lévy en interprétant le terme $\frac{\ln(q_n)}{n}$ (à un terme négligeable devant n près) comme la moitié de la moyenne des n premiers temps de retours sur la surface $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$, de l'orbite du point $(1, x, 0, 1)$ (qui est un point de Σ_0 car on prend $x < 1$).
Il faut tout d'abord calculer les points d'intersection de cette orbite avec Σ. $(1, x, 0, 1)$ s'envoie sur $(T(x), 1, xE(1/x), x) \in \Sigma_1$ (en un temps $-2 \ln x$) qui s'envoie lui-même sur $(1, T^2(x), xT(x)E(1/x), xT(x)\left(E(1/x)E(1/T(x)) + 1\right)) \in \Sigma_0$ (en un temps supplémentaire de $-2 \ln T(x)$). Le premier point d'intersection avec Σ_1 est donc $(T(x), 1, xa_1, x) = (T(x), 1, xq_1, xq_0)$ et le premier point d'intersection avec Σ_0 est $(1, T^2(x), xT(x)a_1, xT(x)(a_1a_2 + 1)) = (1, T^2(x), xT(x)q_1, xT(x)q_2)$ (où les a_n sont les quotients partiels du développement de x). On démontre alors par récurrence que le $k$ième point d'intersection avec Σ_1 est $\left(T^{2k-1}(x), 1, xT(x)...T^{2k-2}(x)q_{2k-1}, xT(x)...T^{2k-2}(x)q_{2k-2}\right)$ et avec Σ_0 est $\left(1, T^{2k}(x), xT(x)...T^{2k-1}(x)q_{2k-1}, xT(x)...T^{2k-1}(x)q_{2k}\right)$. D'autre part, si on note $\tau_1, ..., \tau_n$ les temps d'intersection avec la surface Σ, on a : $\tau_1 = -2\ln(x)$, $\tau_2 = -2\ln(xT(x))$, et par récurrence, $\tau_n = -2\ln(xT(x)...T^{n-1}(x))$. On peut donc écrire :

Lemme 1.9 *Le* k*ième point d'intersection avec* Σ_1 *est* $\left(T^{2k-1}(x), 1, e^{-\tau_{2k-1}/2}q_{2k-1}, e^{-\tau_{2k-1}/2}q_{2k-2}\right)$. *Le* k*ième point d'intersection avec* Σ_0 *est* $\left(1, T^{2k}(x), e^{-\tau_{2k}/2}q_{2k-1}, e^{-\tau_{2k}/2}q_{2k}\right)$.

On peut maintenant énoncer le lemme suivant fondamental (valable pour tout x).

Lemme 1.10

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln q_n}{n} - \frac{\tau_n}{2n} = 0$$

Preuve : Il est facile de montrer que $(a, 1, c, d) \in \Sigma_1 \Longrightarrow \frac{1}{2} \leq c < 1$ et $(1, b, c, d) \in \Sigma_0 \Longrightarrow \frac{1}{2} \leq d < 1$. En appliquant ce résultat aux points d'intersections avec la surface Σ, on obtient que $\frac{1}{2} \leq e^{\tau_n/2}q_n \leq 1$ (pour les n pairs, utiliser l'intersection avec Σ_0 et pour les n impairs, utiliser l'intersection avec Σ_1). Ceci démontre le lemme, en prenant le logarithme des inégalités. □

Remarque : Ce lemme est en fait vrai pour tout point de la forme $(1, x, a, b)$, donc pour tout point de la surface Σ_0, car le temps de retour ne dépend que des deux premières coordonnées.

On a vu que $\tau_n = -2\ln(xT(x)...T^{n-1}(x))$. Si on appelle $\tau(x) = \tau_1((1, x, 0, 1)) = -2\ln(x)$ le temps de premier retour du point $(1, x, 0, 1)$, on a donc :

$$\frac{\tau_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \tau\left(T^k(x)\right) = S_n(\tau, T)(x)$$

Si on suppose que l'on connaît la mesure de Gauss, et que l'on sait qu'elle est ergodique pour T, on obtient donc $\lim_{n\to\infty} \frac{\tau_n}{n} = \int_0^1 \frac{1}{\ln 2} \frac{-2\ln x}{1+x}\, dx = \frac{\pi^2}{6\ln 2}$ (cf. le lemme 1.8). Et on en déduit le théorème de Lévy (cf. le théorème 1.8) : pour presque tout x,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln q_n}{n} = \frac{\pi^2}{12\ln 2}$$

On peut aussi retrouver ce résultat de manière purement géométrique, en utilisant la remarque ci-dessus. Le flot géodésique sur la surface modulaire est ergodique pour la mesure hyperbolique (cf. [BKS] le flot géodésique sur toute surface hyperbolique d'aire finie est ergodique). On en déduit que le système dynamique défini par l'application de premier retour sur la section de Poincaré Σ, et la mesure induite sur Σ est ergodique (cf. [Man]). La moyenne du temps de premier retour sur la surface Σ est donc égale au quotient, par l'aire de cette surface, de l'intégrale du temps de retour sur cette surface, qui est en fait le volume de l'espace tout entier $\Omega_0 \cup \Omega_1$. Cette espace est aussi le fibré unitaire tangent à la surface modulaire qui est donc de volume le produit de l'aire de la surface ($\pi/3$ par la formule de Gauss pour un triangle hyperbolique) par la longueur de la fibre (qui est π car la fibre est $PSO(2,\mathbb{R})$). Le volume total est donc $\pi^2/3$. Par ailleurs, l'aire de Σ se calcule en prenant la mesure transverse, qui est invariante par l'application de premier retour sur Σ : on montre que c'est la mesure de Lebesgue et un calcul montre que cette aire vaut $2\ln 2$. Ceci permet donc de retrouver géométriquement $\lim_{n\to\infty} \frac{\tau_n}{n} = \frac{\pi^2}{6\ln 2}$.

1.4 L'algorithme des fractions continues au plus proche entier

En reprenant l'algorithme des fractions continues classiques décrit page 5, on peut penser à une manière simple de l'améliorer pour faire en sorte que les approximations successives par des rationnelles soient meilleures. Au lieu, à chaque étape, de prendre la partie entière de x_n, on peut prendre le plus proche entier de x_n. On définit alors un nouvel algorithme. Il faut préciser s'il converge mieux, et en quel sens. On va, dans cette partie, reprendre les deux premières parties de la section 1 (arithmétique et dynamique) et les étendre, en partie, au nouvel algorithme créé. Dans toute la suite, on ne cherchera plus à faire le développement d'un rationnel : l'intérêt de ce nouvel algorithme est en effet d'approcher plus rapidement des irrationnels.

Définition 1.7 *Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit le plus proche entier de x par $E\left(x+\frac{1}{2}\right)$, noté $\tilde{E}(x)$. $\tilde{E}(x)$ est l'unique entier vérifiant : $-\frac{1}{2} \leq x - \tilde{E}(x) < \frac{1}{2}$.*

<u>Algorithme des fractions continues au plus proche entier</u>

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $x_0 = x$. On pose $a_0 = \tilde{E}(x_0)$ et $x_1 = \frac{1}{x_0 - a_0}$. Puis on définit par récurrence $a_n = \tilde{E}(x_n)$ et $x_{n+1} = \frac{1}{x_n - a_n}$. Il est clair que $\forall n > 0$, $x = [a_0, a_1, ..., a_n, x_{n+1}]$. De plus, l'algorithme ne s'arrête pas car $\forall n > 0$, $x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

La grande différence avec l'algorithme classique des fractions continues est que les a_n ne sont plus positifs. Ici, $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $\forall n > 0$, $|a_n| \geq 2$ puisque $\forall n > 0$, $|x_n| \geq 2$. On peut même préciser cette dernière condition. En effet, si $a_n = 2$, alors c'est que $2 \leq x_n < 2 + \frac{1}{2}$. Mais alors, $\frac{1}{x_n - 2} > 2$ et donc $a_{n+1} \geq 2$. On a donc $a_n = 2 \Longrightarrow a_{n+1} \geq 2$. On montre de même que

$a_n = -2 \Longrightarrow a_{n+1} \leq -2$. Nous allons montrer que ces conditions sont les seules à imposer à la suite (a_n). On définit ainsi l'ensemble des suites admissibles par :

$$\mathcal{A} = \left\{ (a_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}},\ \forall n > 0,\ |a_n| \geq 2 \text{ et } \left| \begin{array}{lcl} a_n = 2 & \Longrightarrow & a_{n+1} \geq 2 \\ a_n = -2 & \Longrightarrow & a_{n+1} \leq -2 \end{array} \right. \right\}$$

Dans la suite, on conserve les notations $[a_0, .., a_n] = \frac{p_n}{q_n}$.
Nous allons tout d'abord montrer la convergence de l'algorithme.
Il faut remarquer que les démonstrations de la proposition 1.1 et de son corollaire 1.2 ne faisaient pas intervenir le signe des a_n. En particulier, on a toujours $(p_n, q_n) = 1$ et $q_n x - p_n = \frac{(-1)^n}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}}$.

Proposition 1.13 *$\forall n \in n$, $|q_n| > |q_{n-1}|$. Et donc, $\forall n \in n$, $|q_n| > n$.*

Preuve : On démontre ce résultat par récurrence, en remarquant tout d'abord que $q_0 > q_{-1}$. D'autre part, comme $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} |q_{n+1}| & \geq & |a_{n+1}||q_n| - |q_{n-1}| \\ & \geq & 2|q_n| - |q_{n-1}| \\ & \geq & |q_n| + (|q_n| - q_{n-1}|) \\ & > & |q_n| \end{array}$$

Ceci démontre la première partie de la proposition.
La suite en découle par récurrence en se souvenant que les q_n sont des entiers. □

Cette proposition permet d'établir le théorème.

Théorème 1.9 *L'algorithme de fraction continue au plus proche entier converge, c'est-à-dire que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et pour la suite (a_n) donnée par l'algorithme, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} [a_0, a_1, ..., a_n] = x$$

Preuve : Il suffit de montrer que la série de terme général $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}$ est convergente. Or, d'après le corollaire 1.2, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$. On a donc, d'après la proposition précédente, $\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{n^2}$ et la série est par conséquent absolument convergente. □

Nous allons maintenant démontrer une réciproque au théorème 1.9. Le problème est de prouver que les conditions imposées à $(a_n) \in \mathcal{A}$ sont suffisantes pour assurer d'une part la convergence de la fraction continue et d'autre part, l'unicité de la décomposition. Pour se faire, on va procéder à une transformation de l'écriture de la fraction continue pour faciliter les calculs (on utilise ici la notation générale donnée en début de section, page 3 : $[a_0, \epsilon_1 \backslash a_1, \epsilon_2 \backslash a_2, ...] = a_0 + \frac{\epsilon_1}{a_1 + \frac{\epsilon_2}{a_2 + ...}}$).

Lemme 1.11 *Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et (a_n) les quotients partiels associés à la décomposition en fraction continue au plus proche entier de x.*
On pose :

$$\begin{array}{ll} \epsilon_1 = sign(a_1) & \forall i > 1,\ \epsilon_i = sign(a_i)sign(a_{i-1}) \\ b_0 = a_0 & \forall i > 0,\ b_i = |a_i| \end{array}$$

Alors,

$$\forall n > 0,\ [a_0, .., a_n] = [b_0, \epsilon_1\backslash b_1, ..., \epsilon_n\backslash b_n]$$

Preuve : Il suffit de remarquer, d'une part, que $[b_0, \epsilon_1\backslash b_1, \epsilon_2\backslash b_2, \epsilon_3\backslash b_3, ..., \epsilon_n\backslash b_n] = [b_0, 1\backslash a_1, \epsilon_1\epsilon_2\backslash b_2, \epsilon_3\backslash b_3, ..., \epsilon_n\backslash b_n] = [b_0, 1\backslash a_1, 1\backslash a_2, \epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3\backslash b_3, ..., \epsilon_n\backslash b_n]$ (on a multiplié au numérateur et au dénominateur par ϵ_1 puis au-dessous par $\epsilon_1\epsilon_2$...) et d'autre part, que $\forall i > 0,\ \epsilon_1\epsilon_2...\epsilon_i = sign(a_i)$. □

Dans la suite, on note $[b_0, \epsilon_1\backslash b_1, ..., \epsilon_n\backslash b_n] = \frac{r_n}{s_n}$.
Remarque : La proposition montre que $\forall n > 0,\ \frac{p_n}{q_n} = \frac{r_n}{s_n}$. Elle ne montre pas que $\forall n > 0,\ p_n = r_n$ et $q_n = s_n$. En fait, on va montrer que $\forall n > 0,\ s_n = |q_n|$ (cf. proposition 1.15).

On introduit maintenant des conditions suffisantes pour assurer la convergence d'une fraction continue infinie de la forme $[b_0, \epsilon_1\backslash b_1, ..., \epsilon_n\backslash b_n]$.

Définition 1.8 *Une fraction continue* $[b_0, \epsilon_1\backslash b_1, ..., \epsilon_n\backslash b_n, ...]$ *est dite* semi-régulière *si elle vérifie :*
$\forall n > 0$

$$b_n + \epsilon_{n+1} \geq 2$$

En particulier, on alors $\forall n > 0,\ b_n > 0$.
Il est important de remarquer que si $[b_0, \epsilon_1\backslash b_1, ..., \epsilon_n\backslash b_n, ...]$ est une fraction continue semi-régulière, on peut, de plus, supposer que $\forall n > 0,\ b_n + \epsilon_n \geq 1$ simplement en éliminant quelques convergents. En effet, si $b_n = 1$ et $\epsilon_n = -1$ (seul cas qui pose problème), on a nécessairement $\epsilon_{n+1} = 1$ et on utilise la transformation : $[b_0, ..., \epsilon_{n-1}\backslash b_{n-1}, -1\backslash 1, 1\backslash b_{n+1}, ...] = [b_0, ..., \epsilon_{n-1}\backslash b_{n-1} - 1, 1\backslash b_{n+1} + 1, ..]$. Cette propriété supplémentaire permet de montrer que la suite des (s_n) est strictement monotone (cf. proposition 1.15). Ceci justifie la définition suivante.

Définition 1.9 *Une fraction continue* $[b_0, \epsilon_1\backslash b_1, ..., \epsilon_n\backslash b_n, ...]$ *est dite* semi-régulière monotone *si elle vérifie :*
$\forall n > 0$

$$\begin{array}{ll} b_n + \epsilon_{n+1} \geq 2 & (1) \\ b_n + \epsilon_n \geq 1 & (2) \end{array}$$

Lemme 1.12 *Soit*

$$\mathcal{A}' = \left\{(\epsilon_n, b_n)_{n\geq 0} \in (\{-1, 1\} \times \mathbb{N})^{\mathbb{N}},\ \forall n > 0,\ b_n \geq 2\ et\ \epsilon_{n+1} + b_n \geq 2\right\}$$

Soit $(a_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ *et* (ϵ_n, b_n) *la suite associée par le lemme 1.11. On a :*

$$(a_n) \in \mathcal{A} \iff (\epsilon_n, b_n) \in \mathcal{A}'$$

D'autre part, si $(\epsilon_n, b_n) \in \mathcal{A}'$, *alors la fraction continue associée à* (ϵ_n, b_n) *est une fraction continue semi régulière monotone.*

Preuve : Si $(a_n) \in \mathcal{A}$, on a : $\forall n > 0$
$|a_n| \geq 2$
$a_n = 2 \Longrightarrow a_{n+1} \geq 2$
$a_n = -2 \Longrightarrow a_{n+1} \leq -2.$

Ces trois conditions sont équivalentes à : $\forall n > 0$
$b_n + \epsilon_{n+1} \geq 2$.
$b_n \geq 2$
La seconde condition sur (ϵ_n, b_n) est évidemment équivalente à la première sur (a_n). Pour la première condition sur (ϵ_n, b_n), il faut remarquer que si $b_n = 2$, alors $a_n = \pm 2$ et dans les deux cas, $sign(a_n) = sign(a_{n+1})$ ce qui implique $\epsilon_{n+1} = 1$: on a bien $b_n + \epsilon_{n+1} \geq 2$. La réciproque se fait de la même manière.
Enfin, il est évident que si $b_n \geq 2$, alors $b_n + \epsilon_n \geq 1$. Toute suite de $\mathcal{A}'$ donne donc une fraction continue semi régulière monotone. □

Le théorème suivant prouve la convergence d'une telle fraction continue.
Donnons tout d'abord l'équivalent de la proposition 1.1 et du corollaire 1.2 pour les convergents $\frac{r_n}{s_n}$.

Proposition 1.14 *Les r_n et s_n vérifient :*

$$\begin{cases} r_n = b_n r_{n-1} + \epsilon_n r_{n-2} \\ s_n = b_n s_{n-1} + \epsilon_n s_{n-2} \end{cases}$$

cette relation de récurrence étant valable, pour tout n entier strictement positif, avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} r_{-1} = 1 & r_0 = b_0 \\ s_{-1} = 0 & s_0 = 1 \end{cases}$$

Corollaire 1.11 *On a :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, r_{n+1}s_n - r_n s_{n+1} = (-1)^n \prod_{k=1}^{n+1} \epsilon_k$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{r_{n+1}}{s_{n+1}} - \frac{r_n}{s_n} = \frac{(-1)^n \prod_{k=1}^{n+1} \epsilon_k}{s_n s_{n+1}}$$

Les démonstrations de ces deux résultats se font de la même façon qu'au paragraphe 1.1.

Proposition 1.15 *Soit $[b_0, \epsilon_1 \backslash b_1, ..., \epsilon_n \backslash b_n, ...]$ une fraction continue semi régulière monotone et $\frac{r_n}{s_n}$ la suite des convergents associés.*
Alors

$$\forall n > 0,\ s_{n+1} > s_n > 0$$

Preuve : La condition (2) implique que la suite des (s_n) est strictement monotone. En effet, $s_{n+1} = b_{n+1}s_n + \epsilon_{n+1}s_{n-1}$ et donc (par récurrence) :
si $\epsilon_{n+1} = 1$, $s_{n+1} > s_n$ (car $s_{n-1} > 0$ et $b_{n+1} \geq 1$)
si $\epsilon_{n+1} = -1$, $s_{n+1} \geq s_n + (s_n - s_{n-1}) > s_n$ (car $b_{n+1} \geq 2$). □

Remarque : Ceci montre que $\forall n > 0$, $s_n = |q_n|$ et que $\forall n > 0$, $s_n > n$.

Théorème 1.10 *Soit $[b_0, \epsilon_1 \backslash b_1, ..., \epsilon_n \backslash b_n, ...]$ une fraction continue semi régulière monotone. Alors, elle converge :*

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty} [b_0, \epsilon_1 \backslash b_1, ..., \epsilon_n \backslash b_n] = x$$

Preuve : D'après ce qui précède, la série de terme général $(\frac{r_{n+1}}{s_{n+1}} - \frac{r_n}{s_n})$ est absolument convergente. $\square$

Remarque : On n'utilise pas pour la démonstration du théorème la condition (1). L'intérêt de cette condition apparaîtra plus loin (cf. le lemme 1.15).

Ce dernier théorème montre que tout développement admissible converge (cf. le lemme 1.12). Il nous reste à montrer que la limite est irrationnelle et que la décomposition est unique.

Lemme 1.13 *Soit* $(a_n) \in \mathcal{A}$. *Alors,* $\forall n > 0$, $[0, a_1, ..., a_n] \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ *et est du signe de* a_1.

Preuve : Soit $(a_n) \in \mathcal{A}$ et $(\epsilon_n, b_n) \in \mathcal{A}'$ la suite associée. Il faut montrer que $\forall n > 0$, $[0, \epsilon_1 \backslash b_1, ..., \epsilon_n \backslash b_n] \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et est du signe de ϵ_1. Pour $n = 1$, le résultat est évident. Supposons le démontré jusqu'au rang $n-1$. On sait donc que $y = [0, \epsilon_2 \backslash b_2, ..., \epsilon_n \backslash b_n]$ vérifie les hypothèses et on considère $x = \frac{\epsilon_1}{b_1 + y}$. Si $b_1 \geq 3$, en utilisant le fait que $|y| \leq \frac{1}{2}$, on trouve bien que $|x| \leq \frac{1}{2}$ et que x est du signe de ϵ_1. Si $b_1 = 2$, alors, $\epsilon_2 = +1$ et donc y est positif. En particulier, $b_1 + y \geq 2$ et on obtient de même que $|x| \leq \frac{1}{2}$ et x est du signe de ϵ_1. $\square$

Proposition 1.16 *Soit* $(a_n) \in \mathcal{A}$. *Alors* $[a_0, a_1, ..., a_n, ...]$ *converge vers un irrationnel* $x \in \left[a_0 - \frac{1}{2}, a_0 + \frac{1}{2}\right] \setminus \mathbb{Q}$.

Preuve : La convergence de la fraction continues $[a_0, a_1, ..., a_n, ...]$ a déjà été démontrée (cf. théorème 1.10). D'autre part, le lemme précédent montre que tous les convergents sont dans l'intervalle $\left[a_0 - \frac{1}{2}, a_0 + \frac{1}{2}\right]$, donc la limite x également.
Supposons que la limite x est de la forme $\frac{a}{b}$. En utilisant d'une part le fait que $q_n x - p_n = \frac{(-1)^n}{x_{n+1} q_n + q_{n-1}}$, et d'autre part le fait que $x_{n+1} = a_{n+1} + \eta$ avec $|\eta| \leq \frac{1}{2}$ (cf. le lemme précédent), on obtient : $|q_n a - p_n b| \leq \frac{b}{|q_{n+1}| - \frac{1}{2}|q_n|}$. D'autre part, comme $|q_{n+1}| > |q_n|$ (cf. la proposition 1.13), on obtient $|q_n a - p_n b| \leq \frac{2b}{|q_n|}$. Le terme de droite tend vers 0. L'entier $|q_n a - p_n b|$ vaut donc 0 à partir d'un certain rang ce qui est impossible car la suite des q_n est strictement croissante et p_n et q_n sont premiers entre eux. $\square$

Proposition 1.17 *Soit* (a_n), $(b_n) \in \mathcal{A}$.
Si $[a_0, a_1, ..., a_n, ...] = [b_0, b_1, ..., b_n, ...]$, *alors* $\forall n \geq 0$, $a_n = b_n$.

Preuve : Supposons maintenant que $[a_0, a_1, ..., a_n, ...] = [b_0, b_1, ..., b_n, ...]$. Comme $[0, a_1, ..., a_n, ...] \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ (car c'est un irrationnel), on a nécessairement $a_0 = b_0$ (car ce sont des entiers). Mais alors, $[a_1, ..., a_n, ...] = [b_1, ..., b_n, ...]$ et on termine la preuve par récurrence. $\square$

On peut maintenant compléter le théorème 1.9 (à comparer avec le corollaire 1.3).

Théorème 1.11 *L'algorithme des fractions continues au plus proche entier établit une bijection entre l'ensemble des suites admissibles* $\mathcal{A}$ *et l'ensemble des irrationnels* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Preuve : On a montré qu'à tout réel on pouvait associer une fraction continue dans $\mathcal{A}$ (cf. l'algorithme page 28). D'autre part, on a vu que toute fraction continue admissible converge vers un irrationnel (cf. la proposition 1.16). Enfin, la dernière proposition montre l'unicité d'un tel développement. $\square$

Le développement en fraction continue au plus proche entier d'un irrationnel x est très lié au développement en fraction continue régulière.

Proposition 1.18 *Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)$ la suite des convergents associée au développement en fraction continue régulière de x et $\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \left(\frac{r_n}{s_n}\right)$ la suite des convergents associée au développement en fraction continue au plus proche entier de x.*
La suite $\left(\frac{r_n}{s_n}\right)$ est une sous-suite de $\left(\frac{P_n}{Q_n}\right)$.

Preuve : La preuve repose sur une identité qui joue un rôle important dans un certain type de fractions continues : les S-expansions (cf. [Kra]). Cette identité est la suivante :

$$\alpha + \frac{-1}{\beta + \xi} = \alpha - 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\beta - 1 + \xi}}$$

Une façon simple de le vérifier est de l'écrire sous forme matricielle (on rappelle qu'il y a un morphisme de groupe entre le groupe des matrices carrées de dimension 2, muni de la multiplication et le groupe des homographies, muni de la loi de composition via l'application : $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longmapsto \left(x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}\right)$).

$$\begin{bmatrix} -1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha - 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \beta - 1 \end{bmatrix}$$

Supposons que $\forall 1 \leq i < n$, $\epsilon_i = 1$ et $\epsilon_n = -1$. Alors, on a clairement, $\forall 0 \leq i < n$, $\frac{r_i}{s_i} = \frac{P_i}{Q_i}$. De plus, $\epsilon_n = -1 \Longrightarrow b_{n-1} \geq 3$. On utilisant l'identité ci-dessus avec $\alpha = b_{n-1}$ et $\beta = b_n$, on obtient : $[b_0, 1\backslash b_1, ..., 1\backslash b_{n-1}, -1\backslash b_n, \xi] = [b_0, 1\backslash b_1, ..., 1\backslash b_{n-1} - 1, 1\backslash 1, 1\backslash b_n - 1, \xi]$. On voit que par ce procédé, on peut modifier les convergents $\frac{r_n}{s_n}$ de manière à remplacer tous les ϵ_n qui valent -1 par des ϵ_n qui valent $+1$ et ce, en intercalant à chaque fois une nouveau convergent. On remarque de plus que les quotients partiels restent positifs. Par unicité du développement en fraction continue régulière (cf. proposition 1.2), la fraction continue obtenue est bien celle qui a pour convergent les $\frac{P_n}{Q_n}$. Et si on note $k(n) = card\{\epsilon_k = -1, 1 \leq k \leq n\}$, on a : $\frac{P_{n+k(n)}}{Q_{n+k(n)}} = \frac{r_n}{s_n}$. □

Remarque : On appelle singularisation le processus qui consiste à éliminer un quotient partiel $(\epsilon_n, b_n) = (1, 1)$ en utilisant la formule : $\alpha + \frac{1}{1+\frac{1}{\beta+\xi}} = \alpha + 1 + \frac{-1}{\beta+1+\xi}$ qui s'écrit aussi $[\alpha, 1\backslash 1, 1\backslash \beta, \xi] = [\alpha + 1, -1\backslash \beta + 1, \xi]$. On peut construire la suite des quotients partiels de l'algorithme des fractions continues au plus proche entier à partir de la suite des quotients partiels de l'algorithme classique en suivant la règle suivante (cf. [Kra]) : pour tout bloc de m 1 consécutifs ($a_n = 1$, ..., $a_{n+m-1} = 1$) avec $n > 0$, singulariser le premier, le troisième, etc... 1 du bloc. On vérifie que l'on obtient bien ainsi une suite $(\epsilon_n, b_n) \in \mathcal{A}'$: par unicité, on obtient donc le développement au plus proche entier.

Exemple : On considère le développement en fraction continue classique du nombre d'or $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$: $\phi = [1, 1, 1, 1, ...]$. En utilisant la remarque précédente, on obtient le développement au plus proche entier : $\phi = [2, -1\backslash 3, \overline{-1\backslash 3}, ...] = [2, -3, 3, \overline{-3, 3}, ...]$.

Le résultat suivant démontré par Hurwitz en 1889 (cf. [Hur] et [Bo]) montre en un premier sens que l'algorithme des fractions continues au plus proche entier est meilleur que l'algorithme classique.

Théorème 1.12 $\forall n > 0$, $0 < \left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{g}{q_n^2}$
où $g = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Remarque : Etant donné une suite $(\epsilon_n) \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}^*}$ et un réel x, on montre (cf. [Bo]) qu'il existe une unique suite $(b_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ avec $\forall i > 0$, $b_i > 0$ telle que $x = [b_0, \epsilon_1 \backslash b_1, ..., \epsilon_n \backslash b_n, ...]$. De plus, tous les convergents $[b_0, \epsilon_1 \backslash b_1, ..., \epsilon_n \backslash b_n]$ sont des convergents primaires ou secondaires de x (cf. la définition 1.6).

Nous allons maintenant nous intéresser aux propriétés dynamiques de l'algorithme des fractions continues au plus proche entier. Pour cela, on suit le même schéma qu'au paragraphe 1.2. On travaille désormais sur $\Lambda = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\setminus \mathbb{Q}$ et on considère l'application R qui à un élément $x = [0, a_1, ..., a_n, ...]$ associe $R(x) = [0, a_2, ..., a_n, ...]$.

$$R \left\{ \begin{array}{ccc} \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[& \longrightarrow & \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{x} - \tilde{E}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

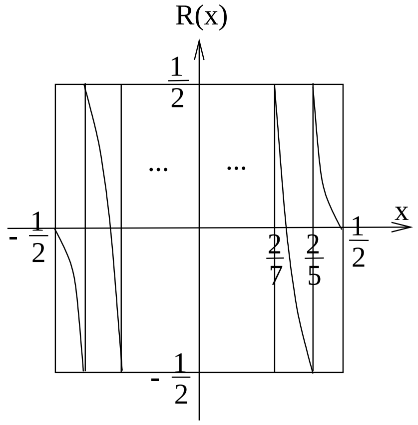

FIG. 12 – Représentation de R

R est une fonction impaire (au bord de l'intervalle près), homographique et décroissante par morceaux (cf. la figure 12). Les points de discontinuité sont les $\left\{\frac{2}{2k+1},\ k \geq 2 \text{ ou } k \leq -3\right\}$. Pour $k \geq 3$ ou $k \leq -2$, sur l'intervalle $\left]\frac{2}{2k+1}, \frac{2}{2k-1}\right]$, $R(x) = \frac{1}{x} - k$. Sur l'intervalle $\left]\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right[$, $R(x) = \frac{1}{x} - 2$. Sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}\right]$, $R(x) = \frac{1}{x} + 2$.
On démontre facilement les résultats suivants.

Lemme 1.14 *Soit $x \in \Lambda$ et $[0, a_1, ..., a_n, ...]$ son développement au plus proche entier. On note toujours $x_n = [a_n, ...]$.*
Alors, $\forall n > 0$,
$a_n = \tilde{E}\left(\frac{1}{R^{n-1}(x)}\right)$
$x_n = \frac{1}{R^{n-1}(x)}$
$R^n(x) = x_n - a_n$

Corollaire 1.12 *Soit $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.*
Alors, $x = \frac{p_n + R^n(x) p_{n-1}}{q_n + R^n(x) q_{n-1}}$.

Corollaire 1.13 *Soit $x \in \Lambda$ et $[0, a_1, ..., a_n, ...]$ son développement au plus proche entier.*
$\forall n > 0$, $p_{n+1}(x) = q_n(R(x))$.

Remarque : On peut lire directement sur le graphe de R (cf. la figure 12) les conditions d'admissibilité sur les suites (a_n). En effet, on voit que si $a_n = 2$, c'est-à-dire si $\frac{2}{5} < R^{n-1}(x) < \frac{1}{2}$, alors $R^n(x) > 0$ et donc $a_{n+1} \geq 2$. De même, si $a_n = -2$, c'est-à-dire si $-\frac{1}{2} \leq R^{n-1}(x) \leq -\frac{2}{5}$, alors $R^n(x) < 0$ et donc $a_{n+1} \leq -2$.

Le problème est toujours de trouver une mesure invariante pour R. En reprenant les constructions faites sur T, on définit $\overline{R}$ par

$$\overline{R}\left\{\begin{array}{lll} \Delta & \longrightarrow & \Delta \\ (x,y) & \longmapsto & \left\{\begin{array}{ll} \left(R(x), \frac{1}{y+\tilde{E}\left(\frac{1}{x}\right)}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ (0,0) & \text{si } x = 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

On voit que $\overline{R}$ est une application qui partage les mêmes propriétés que $\overline{T}$. Ainsi, sur les bandes de la formes $\left\{x \in \left]\frac{2}{2k+1}, \frac{2}{2k-1}\right]\right\}$ où $k \geq 2$ ou $k \leq -3$, $\overline{R}(x) = \left(\frac{1}{x} - k, \frac{1}{y+k}\right)$. On sait donc que la mesure $d\mu = \frac{dxdy}{(xy+1)^2}$ définie sur Δ sera invariante par $\overline{R}$. La question est maintenant de déterminer l'ensemble Δ sur lequel $\overline{R}$ est presque partout bijectif.

Fig. 13 – Représentation de Δ

Pour avoir une idée de la forme de Δ, on peut utiliser l'ordinateur. Une méthode est de partir d'un point quelconque, proche de l'origine, et d'itérer $\overline{R}$. On peut espérer que la pseudo-orbite couvre l'ensemble du domaine Δ. Après plusieurs milliers d'itérations, on obtient la figure 13. On a fait figurer en gris sombre les images des points (x,y) avec $x > \frac{2}{5}$ et en gris plus claire les images des points (x,y) avec $\frac{2}{7} < x \leq \frac{2}{5}$. On voit sur le dessin que Δ est symétrique par rapport à l'origine : pour $0 < x < \frac{1}{2}$, $-a < y < b$ et pour $-\frac{1}{2} < x < 0$, $-b < y < a$ où $0 < a < b$. Déterminons ces réels a et b. Sur la bande verticale $B = \left\{\frac{2}{5} < x < \frac{1}{2}\right\}$, on a $\overline{R}(x,y) = (\frac{1}{x} - 2, \frac{1}{y+2})$. Or, sur B, on a $-a < y < b$ et sur l'image de B par $\overline{R}$, on a $a < y < b$ (cf. la figure 13). On en déduit les équations $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{-a+2} = b \\ \frac{1}{b+2} = a \end{array}\right.$ d'où $b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Ces valeurs se vérifient également sur le dessin. On a notamment $a + b = 1$.

Définition 1.10 *On pose* $\Delta = \left\{(x,y),\ -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{si } x \geq 0,\ \frac{\sqrt{5}-3}{2} < y \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \text{si } x < 0,\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq y < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right\}$

Proposition 1.19 $\overline{R} : \Delta \longrightarrow \Delta$ *est presque partout bijective.*

Preuve : Sur la bande verticale $B = \left\{\frac{2}{5} < x < \frac{1}{2} \text{ et } \frac{\sqrt{5}-3}{2} < y \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$, on sait que $\overline{R}(x,y) = (\frac{1}{x} - 2, \frac{1}{y+2})$. B est donc envoyé bijectivement sur $= \left\{0 < x < \frac{1}{2} \text{ et } \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq y < \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$ (cf. l'expression de $\overline{R}$). De même, sur la bande verticale $B_k = \left\{\frac{2}{2k+1} < x \leq \frac{2}{2k-1} \text{ et } \frac{\sqrt{5}-3}{2} < y \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$ où $k \geq 3$, on sait que $\overline{R}(x,y) = (\frac{1}{x} - k, \frac{1}{y+k})$.

B est donc envoyé bijectivement sur $= \left\{-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2} \text{ et } \frac{2}{\sqrt{5}+2k-1} \leq y < \frac{2}{\sqrt{5}+2k+1}\right\}$. On fait de même pour la partie $x < 0$. On démontre ainsi la bijectivité presque partout de $\overline{R}$. □

Proposition 1.20 *Une mesure invariante par R est la mesure de Gauss $\tilde{\lambda}$ de densité*

$$\frac{1}{2\ln\phi}\left(\left(\frac{1}{x+\phi} - \frac{1}{x-\phi^2}\right)1_{x>0} + \left(\frac{1}{-x+\phi} - \frac{1}{-x-\phi^2}\right)1_{x<0}\right)$$

ϕ étant le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
C'est une mesure de probabilité équivalente à la mesure de Lebesgue.

Preuve : Etant donné que μ est invariante par $\overline{R}$, et que $\pi \circ \overline{R} = R \circ \pi$ (où π est la projection sur la première coordonnée), il suffit d'intégrer μ sur les bandes verticales. Un simple calcul d'intégrale permet donc d'obtenir le résultat. □

Remarque : Pour tout $0 < a < \frac{1}{2}$, on a $\tilde{\lambda}([0,a]) = \tilde{\lambda}([-a,0])$ (cf. la symétrie de Δ).

Proposition 1.21 *Le système dynamique mesuré $\left(\Delta, R, \tilde{\lambda}\right)$ est ergodique.*

Preuve : On ne démontre pas ce résultat car la preuve se calque sur celle de l'ergodicité de T (cf. [Rie]). On travaille de la même façon sur les cylindres, sur lesquels on calcule l'inverse de R et on obtient des encadrements du même type (cf. le théorème 1.6 et les lemmes le précédant). Il faut simplement faire attention au fait que R n'est pas surjective de $\left]\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right[$ sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. □

Nous allons maintenant démontré l'équivalent du théorème de Lévy pour l'algorithme des fractions continues au plus proche entier. La démarche suivie est la même que pour l'algorithme classique. Le problème est de démontrer un équivalent du lemme 1.6. Le résultat du lemme 1.7 tient toujours : $\forall n \geq 1$, $\frac{1}{q_n(x)} = \prod_{k=1}^{n}[0, a_k(x), ..., a_n(x)]$.

Lemme 1.15 *Soit $[b_0, \epsilon_1\backslash b_1, ..., \epsilon_n\backslash b_n, ...]$ une fraction continue semi régulière monotone et $\frac{r_n}{s_n}$ la suite des convergents associés.*
Alors

$$\forall n \geq 0,\ s_n > 2^n$$

Preuve : La preuve se fait par récurrence.
On vérifie tout d'abord le résultat pour $n = 0, 1, 2$: $q_0 = 1 \geq 2^0$, $q_1 = b_1 \geq 2$, $q_2 = b_1 b_2 + \epsilon_2 \geq 4$ car si $\epsilon_2 = -1$, alors $b_1 \geq 3$.
Soit $n \geq 3$.
Supposons le résultat démontré pour $k < n$. On sait que $s_n = b_n s_{n-1} + \epsilon_n s_{n-2}$. On sait également que la suite des (s_n) est strictement croissante et positive (cf. la proposition 1.15).
Si $\epsilon_n = 1$, $s_n \geq b_n s_{n-1} \geq 2.2^{k-1} > 2^k$.
Si $\epsilon_n = -1$ (ce qui implique que $b_{n-1} \geq 3$), il faut distinguer plusieurs cas.
Tout d'abord, si $b_n \geq 3$, comme $s_{n-2} < s_{n-1}$, on a $s_n \geq (b_n - 1)s_{n-1} \geq 2.2^{k-1} \geq 2^k$. Si $b_n = 2$, on écrit $s_{n-1} = b_{n-1}s_{n-2} + \epsilon_{n-1}s_{n-3}$ et donc $s_n = 2s_{n-1} - s_{n-2} = (2b_{n-1} - 1)s_{n-2} + 2\epsilon_{n-1}s_{n-3}$.
En utilisant $s_{n-3} < s_{n-2}$, on obtient la majoration : $s_n \geq (2b_{n-1} - 1 - 2)s_{n-2}$ ce qui permet de conclure si $b_{n-1} \geq 4$ (car alors $2b_{n-1} - 1 - 2 > 4$).
Reste donc maintenant le cas où $b_{n-1} = 3$. On a donc $s_n = 5s_{n-2} + 2\epsilon_{n-1}s_{n-3}$. Si $\epsilon_{n-1} = 1$,

on majore s_n par $5s_{n-2}$ qui est lui-même majoré par $4.2^{n-2} = 2^n$. Il reste donc un problème si $\epsilon_{n-1} = -1$ (ce qui implique $b_{n-2} \geq 3$). On écrit alors $s_{n-2} = b_{n-2}s_{n-3} + \epsilon_{n-2}s_{n-4}$, et donc $s_n = 5s_{n-2} - 2s_{n-3} = (5b_{n-2} - 2)s_{n-3} + 5\epsilon_{n-2}s_{n-4}$. En utilisant $s_{n-4} < s_{n-3}$, on obtient $s_n \geq (5b_{n-2} - 2 - 5)s_{n-3} \geq (5 * 3 - 2 - 5)s_{n-3} \geq 8.2^{n-3} \geq 2^n$. Ceci termine la récurrence. □

Remarque : Ce résultat est à comparer avec le corollaire 1.1.

Corollaire 1.14 *Soit* $(a_n) \in \mathcal{A}$.
$\forall n > 0,\ |q_n| \geq 2^n$ *et* $|p_n| \geq 2^{n-1}$

Preuve : C'est une simple conséquence du lemme précédent en se souvenant que $|q_n| = s_n$ et que $p_{n+1}(x) = q_n(R(x))$. □

Nous pouvons maintenant étabir l'équivalent du lemme 1.6.

Lemme 1.16 *Soit* $x \in \Lambda$, $x = [0, a_0, ..., a_n, ...]$.
$\forall n \geq 1,\ \left|\ln \frac{x}{p_n/q_n}\right| \leq \frac{1}{2^{2n-3}}$.

Preuve : On sait que $x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(x_{n+1}q_n + q_{n-1})}$. En utilisant le fait que $x_{n+1} = a_{n+1} + \eta$ avec $|\eta| < \frac{1}{2}$ et que $|q_{n+1}| > |q_n|$, on obtient la majoration : $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{2}{|q_n|^2}$. On en déduit $\left|\frac{x}{p_n/q_n} - 1\right| \leq \frac{2}{|p_n||q_n|} \leq \frac{2}{2^{2n-1}}$ (d'après le lemme précédent). On conclut alors en utilisant : $|\theta| \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow |\ln(1+\theta)| \leq 2|\theta|$. □

Voici maintenant le théorème de Lévy.

Théorème 1.13 *Pour presque tout* $x \in \Lambda$, $x = [0, a_1, ..., a_n, ...]$, *on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln|q_n(x)|}{n} = \frac{\pi^2}{12 \ln \phi}$$

Preuve : Il suffit de calquer la preuve du théorème de Lévy 1.8. On obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln|q_n(x)|}{n} = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{\infty} \ln\left|R^k(x)\right| = -\frac{1}{\ln \phi}\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(x)\left(\frac{1}{x+\phi} - \frac{1}{x-\phi^2}\right) dx$$

Le problème est de calculer cette dernière intégrale. □

Pour calculer l'intégrale, on introduit la fonction dilogarithme (cf. [Lew] et [Rie]).

Définition 1.11 *On définit le dilogarithme par :*

$$L \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\int_0^x \frac{\ln|1-t|}{t}\, dt \end{array} \right.$$

Remarque : On appelle cette fonction, introduite par Euler en 1768, dilogarithme, car elle s'écrit aussi : $L(x) = \int_0^x \frac{1}{t}\int_0^t \frac{1}{1-u}\, du\, dt$.

Proposition 1.22 $\forall x \in [-1, 1]$, $L(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$

Preuve : Il suffit d'écrire : $-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ et de remarquer que cette série converge uniformément pour $x \in [-1, 1]$ (utiliser par exemple Abel pour démontrer le critère de Cauchy uniforme, ou le théorème de convergence radial). On peut donc intervertir intégrale et somme dans l'expression : $L(x) = \int_0^x \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k}\, dt$. On obtient alors : $L(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x \frac{t^{k-1}}{k}\, dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$. □

Corollaire 1.15 $L(1) = \frac{\pi^2}{6}$
$L(-1) = -\frac{\pi^2}{12}$

Preuve : On trouve ces résultats à partir de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. □

Lemme 1.17 $\forall x, y < 1$, $L\left(\frac{x}{1-y}\frac{y}{1-x}\right) = L\left(\frac{x}{1-y}\right) + L\left(\frac{y}{1-x}\right) - L(x) - L(y) - \ln(1-x)\ln(1-y)$

Preuve : Soit $z = \frac{y}{1-y}$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} L\left(\frac{xz}{1-x}\right) &= \frac{xz}{1-x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{-\ln\left(1 - \frac{1-x-zx}{1-x}\right)}{\frac{xz}{1-x}}\right) \\
&= -\frac{\ln(1-x(1+z))}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1-x(1+z))}{1-x} \\
&\quad -\frac{\ln\left(1 - \frac{z}{(1-x)(1+z)}\right)}{1-x} - \frac{\ln((1-x)(1+z))}{1-x} \\
&= -\frac{\ln(1-x(1+z))}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(1+z)}{1-x} \\
&\quad -\frac{\ln\left(1 - \frac{z}{1+z}\frac{1}{1-x}\right)}{1-x}
\end{aligned}$$

D'où, par intégration, en utilisant le fait que $\frac{d}{dx}L(\alpha x) = -\frac{\ln(1-\alpha x)}{x}$ et que $\frac{d}{dx}L\left(\frac{\alpha}{1-x}\right) = -\frac{\ln\left(1-\frac{\alpha}{1-x}\right)}{1-x}$

$$L\left(\frac{xz}{1-x}\right) = L(x(1+z)) - L(x) + \ln(1+z)\ln(1-x) + L\left(\frac{z}{1+z}\frac{1}{1-x}\right) + K$$

On trouve la constante $K = -L\left(\frac{z}{1+z}\right)$ en prenant $x = 0$. En remplaçant ensuite z par sa valeur, on obtient le résultat voulu. □

Lemme 1.18

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln(x)\left(\frac{1}{x+\phi} - \frac{1}{x-\phi^2}\right) dx = -\frac{\pi^2}{12}$$

Preuve : On pose $I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{x+\phi}\, dx$ et $I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{x-\phi^2}\, dx$. On veut calculer $I_1 - I_2$.
En faisant le changement de variable $x = t\phi$ puis en intégrant par partie, on a :
$I_1 = \ln(\phi)\ln\left(1 + \frac{1}{2\phi}\right) + \int_0^{\frac{1}{2\phi}} \frac{\ln t}{1+t}\, dt = -\ln(2)\ln\left(1 + \frac{1}{2\phi}\right) + L\left(-\frac{1}{2\phi}\right)$.
De même, en faisant le changement de variable $x = t\phi^2$ puis en intégrant par partie, on a :
$I_2 = \ln(\phi^2)\ln\left(1 - \frac{1}{2\phi^2}\right) + \int_0^{\frac{1}{2\phi^2}} \frac{\ln t}{t-1}\, dt = -\ln(2)\ln\left(1 - \frac{1}{2\phi^2}\right) + L\left(\frac{1}{2\phi^2}\right)$.

On a donc $I_1 - I_2 = -\ln(2)\ln(\phi) + L\left(-\frac{1}{2\phi}\right) - L\left(\frac{1}{2\phi^2}\right)$. On applique alors le lemme 1.17 avec $x = -1$ et $y = 1-\phi$ pour obtenir : $L\left(\frac{1}{2\phi^2}\right) = L\left(-\frac{1}{\phi}\right) + L\left(-\frac{1}{2\phi}\right) - L(-1) - L\left(-\frac{1}{\phi}\right) - \ln(2)\ln(\phi)$ (on utilise ici l'égalité $1 + \phi = \phi^2$). Le résultat découle donc de l'identité : $L(-1) = -\frac{\pi^2}{12}$. □

Corollaire 1.16 *Pour presque tout $x \in \Lambda$, $x = [0, a_1, .., a_n, ...]$, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = -\frac{\pi^2}{6 \ln \phi}$$

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème 1.13 en prenant le logarithme des inégalités : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{2}{3|q_n||q_{n+1}|} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{2}{|q_n|^2}$. On rappelle que ces inégalités sont obtenues en utilisant $q_n x - p_n = \frac{(-1)^n}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}}$, $x_{n+1} = a_{n+1} + \eta$ avec $|\eta| \leq \frac{1}{2}$ (cf. le lemme 1.13) et $|q_{n+1}| > |q_n|$. □

En comparant avec le corollaire 1.9, on voit que la vitesse de convergence de l'algorithme des fractions continues au plus proche entier est meilleure que celle de l'algorithme classique $(\ln(\phi) < \ln(2))$.

Remarque : Dans toute cette partie, on a préféré utiliser la fonction R qui est très naturellement associée à l'algorithme des fractions continues au plus proche entier, à celle habituellement définie dans les articles de référence (cf. [Rie] et [Kra]) : $\tilde{R}([0, \epsilon_1\backslash b_1, ..., \epsilon_n\backslash b_n, ...]) = [0, \epsilon_2\backslash b_2, ..., \epsilon_n\backslash b_n, ...]$. Bien sûr, tous les résultats dynamiques énoncés dans cette partie sont encore vraies pour $\tilde{R}$, à condition de modifier légèrement la mesure invariante.

2 Un algorithme des fractions continues sur une surface de Veech

Dans cette deuxième partie, on introduit une généralisation de l'algorithme de Poincaré (cf. page 18) défini sur le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. L'algorithme de Poincaré repose sur le fait que le tore possède un groupe de difféomorphismes affines engendré par les deux matrices M et N. On peut de même définir un algorithme sur une surface plate à condition qu'elle possède suffisemment de difféomorphismes affines. La théorie de Veech donne des exemples de telles surfaces, par exemple l'octogone régulier dont on a identifié deux à deux les côtés opposés. Le groupe H des difféomorphismes affines qui agissent sur cette surface est parfaitement connu et donc l'ensemble des géodésiques fermées de cette surface plate également. On définit, à l'aide de ce groupe un algorithme des fractions continues qui nous permet d'approcher les réels par des éléments du corps algébrique $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. On sait que l'ensemble des réels pour lesquels l'algorithme se termine correspond à l'ensemble des directions des géodésiques fermées. La question qui se pose naturellement est alors d'essayer de caractériser arithmétiquement ces directions "rationnelles". Dans cette partie, on se réfère à [ArHu]. On peut aussi voir [Ve].
Dans une première partie, on explique la théorie de Veech dans l'octogone. Ensuite, on présente l'algorithme et la question posée. Enfin, on donne dans une troisième partie des éléments de réponse.

2.1 La théorie de Veech dans l'octogone

On considère une variété de dimension deux S. Cette surface contient un ensemble fini de singularités P et on note $\Sigma = S \setminus P$. Si cette surface est munie d'un atlas $(U_i, \phi_i)_{i\in I}$ avec des changements de cartes qui sont de la forme $z \mapsto \pm z + c$ (avec $c \in \mathbb{C}$), on dira qu'elle est munie d'uns structure de *semi-translation*. Si tous les changements de cartes sont de la forme $z \mapsto +z + c$, on dira qu'elle est munie d'une structure de *translation*. Ces structures induisent évidemment une structure de surface de Riemann et une métrique plate. De plus, la mesure de Lebesgue définie sur $\mathbb{C}$ permet de définir une mesure de Lebesgue sur Σ (car les changements de cartes préservent la mesure de Lebesgue). On suppose Σ de mesure 1.
Indiquons les étapes qui permettent d'obtenir une structure de semi-translation. On munit tout d'abord Σ d'une structure de surface de Riemann : on dispose donc d'un atlas avec des changements de cartes holomorphes. Σ est alors munie d'une structure conforme. On note $\mathcal{Q}$ l'ensemble des formes différentielles quadratiques de volume 1, c'est-à-dire l'ensemble des formes différentielles de degré 2 qui s'écrivent localement $f(z)dz\otimes dz$ avec f holomorphe. On peut montrer que la donnée d'un élément de $\mathcal{Q}$ équivaut à la donnée d'un atlas $(U_i, \phi_i)_{i\in I}$ avec des changements de cartes qui sont de la forme $z \mapsto \pm z + c$ (avec $c \in \mathbb{C}$). Si on peut trouver un sous-atlas tel que tous les changements de cartes sont de la forme $z \mapsto +z + c$, on dit que la forme quadratique est positive. On notera alors $q \in \mathcal{Q}^+$. q est une forme quadratique positive si et seulement si c'est le carré (tensoriel) d'une forme différentielle holomorphe.

On suppose désormais que l'on a choisi une forme différentielle quadratique positive : $q \in \mathcal{Q}^+$. On appelle *difféomorphisme affine* un difféomorphisme Ψ de la surface S qui envoie P sur P et tel que la différentielle (lue dans les cartes de Σ) est une matrice A constante. Il est important de remarquer que cette différentielle est bien définie dans $GL(2,\mathbb{R})$ car la matrice jacobienne des changements de carte est l'identité (dans le cas où on a seulement un forme quadratique, pas nécessairement positive, la différentielle est bien définie dans $GL(2,\mathbb{R})/+Id, -Id$). Veech montre que A est nécessairement une matrice de $SL(2,\mathbb{R})$ car le volume de Σ est fini (par hypothèse). On note $V(q)$ l'ensemble des différentielles des difféomorphismes affines : $V(q)$ est un sous-groupe de $SL(2,\mathbb{R})$.

Définition 2.1 *Soit $q \in \mathcal{Q}^+$.*
$V(q) = \{A \in SL(2,\mathbb{R}), \exists \Psi$ *difféomrphisme affine* , $A = D\Psi\}$
$V(q)$ *est le* groupe de Veech *associé à q.*

Définition 2.2 *Soit G un sous-groupe de $SL(2,\mathbb{R})$.*
On dit G est de covolume fini *quand le volume (hyperbolique) d'un domaine fondamental de l'action de G sur $\mathbb{H}$ est fini.*

En géneral, il n'existe pas de difféomorphismes affines non triviaux. Cependant, quand une surface en possède suffisemment (plus précisément quand $V(q)$ est de covolume fini) Veech montre que le flot vertical de la forme quadratique vérifie l'alternative suivante :

Théorème 2.1 *Si le groupe $V(q)$ est de covolume fini, on dit que la surface est une* surface de Veech. *On a alors l'alternative suivante :*
Soit toutes les orbites non singulières du flot vertical de la forme différentielle quadratique q sont périodiques
Soit ce flot est uniquement ergodique

Remarque : Il est important de prendre une forme quadratique positive pour définir le flot vertical : il faut en effet que la verticale soit la même dans toutes les cartes.

La théorie de Veech est en fait une généralisation du cas bien connu du tore plat $\mathbb{T}^2$ que nous avons étudié dans la section 1.3. Le groupe des difféomorphismes affines de cette surface est $SL(2,\mathbb{Z})$, qui est un groupe de covolume fini car un domaine fondamental pour l'action de $SL(2,\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$ est donné par le triangle hyperbolique de sommets $\left(e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}, \infty\right)$ (cf. la figure 9) qui est de volume $\frac{\pi}{3}$ par la formule de Gauss : c'est la surface modulaire. $\mathbb{T}^2$ est donc une surface de Veech. On vérifie qu'on a bien l'alternative de Veech : le flot vertical (la verticale pouvant varier suivant le choix de la forme quadratique q) est soit périodique (pour les directions rationnelles) soit uniquement ergodique (pour les directions irrationnelles).
Définissons maintenant la surface de Veech sur laquelle nous allons construire l'algorithme de fractions continues.

On considère l'octogone régulier de sommet les racines huitièmes de l'unité (cf. la figure 14). En identifiant les côtés opposés et en munissant la surface de la métrique usuelle issue de celle du plan, on obtient une surface de Riemann Σ avec une singularité : les sommets (c'est en fait un seul point par identification).
Une méthode qu'expose Veech pour construire des difféomorphismes affines est de se ramener à des cylindres sur lesquels cette construction est plus facile (cf. la figure 15) : il suffit de prendre la transvection qui fixe les verticales et de rapport le module du cylindre (le *module* d'un cylindre est le rapport longueur sur largeur). Cette transformation s'appelle un *twist de Dehn*. Quand une surface est constituée de deux cylindres accolés selon la verticale, on prend alors le twist de rapport le multiple commun aux deux modules (il faut pour cela que les deux modules soit commensurables) : cela revient à itérer les twists définis sur chaque cylindre. On définit ainsi le twist globalement sur toute la surface. Plus précisément, soit C_1 (resp. C_2) un cylindre, m_1 (resp. m_2) son module et $\mathcal{T}_1$ (resp. $\mathcal{T}_2$) le twist défini par la transvection qui fixe les verticales et de rapport m_1 (resp. m_2). On suppose que $\exists a_1,\, a_2 \in \mathbb{N},\, a_1 m_1 = a_2 m_2$.

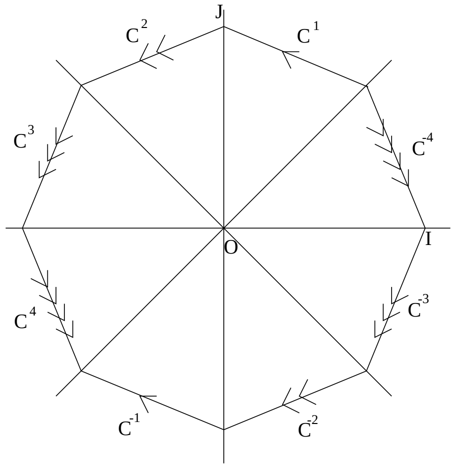

FIG. 14 – Représentation de la surface de Veech

On peut alors définir un twist $\mathcal{T}$ sur la surface C constituée des deux cylindres accolés en prenant, pour $x \in C_1$, $\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}_1^{a_1}(x)$ et pour $x \in C_2$, $\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}_2^{a_2}(x)$.

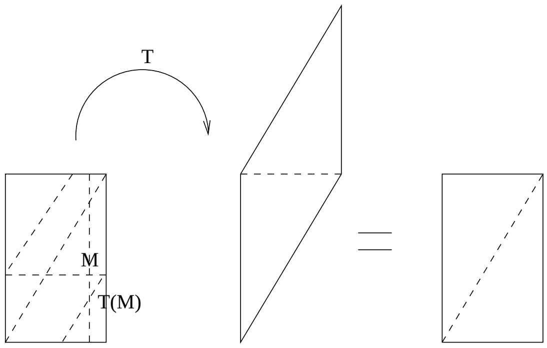

FIG. 15 – Construction du twist sur un cylindre

Dans le cas de l'octogone, deux découpages différents en cylindres permettent de définir deux transvections S et $\hat{S}$.

Pour le premier découpage (cf. la figure 16), on vérifie que le module du cylindre de gauche est $\frac{2+BC}{OA} = 2(\sqrt{2}+1)$ et que le module du cylindre de droite est également $\frac{BC}{AI} = 2(\sqrt{2}+1)$. On peut donc définir un twist sur Σ dont la différentielle est la matrice $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{bmatrix}$ où $\mu = 2(1+\sqrt{2})$.

Pour le second découpage (cf. la figure 17), on vérifie que le module du cylindre de gauche est $\frac{BD}{2OE} = \sqrt{2}+1$ et que le module du cylindre de droite est $\frac{BD+BI}{EF} = 2(\sqrt{2}+1)$. En itérant deux fois le twist défini sur le cylindre de gauche, on peut donc définir un twist sur Σ dont la différentielle est $\hat{S} = U^{-1}SU$ où U désigne la rotation d'angle $\frac{\pi}{8}$.

On a ainsi construit deux difféomorphismes affines sur Σ. La méthode de Veech permet d'identifier complétement le groupe de Veech H de l'octogone.

Théorème 2.2 *Le groupe de Veech de l'octogone Σ est engendré par la rotation R d'angle $\frac{\pi}{4}$ et les deux twists S et $\hat{S}$ définis ci-dessus. On note ce groupe H.*

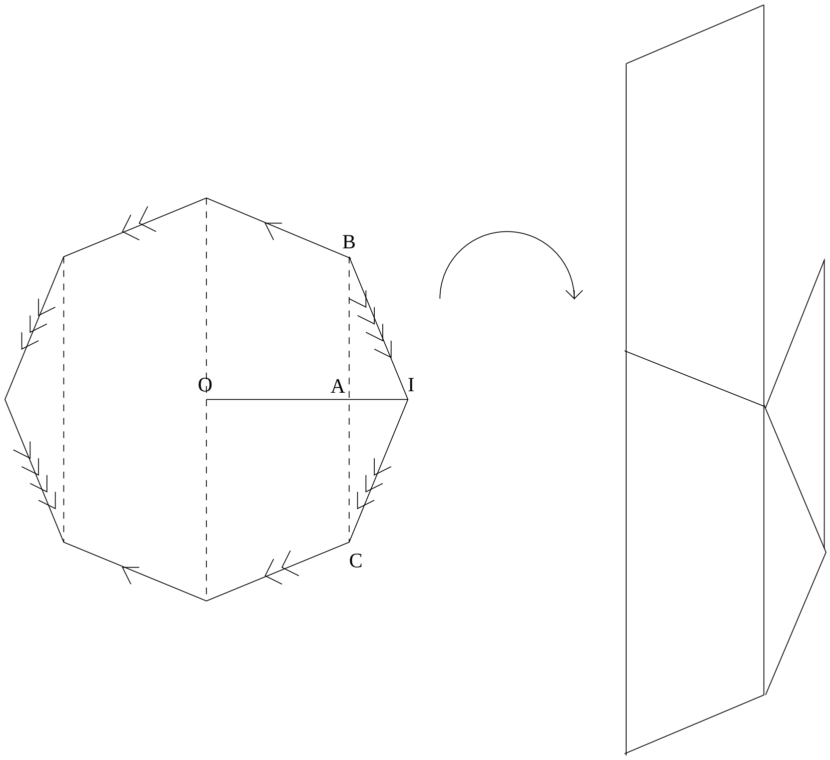

FIG. 16 – Construction de la transvection S

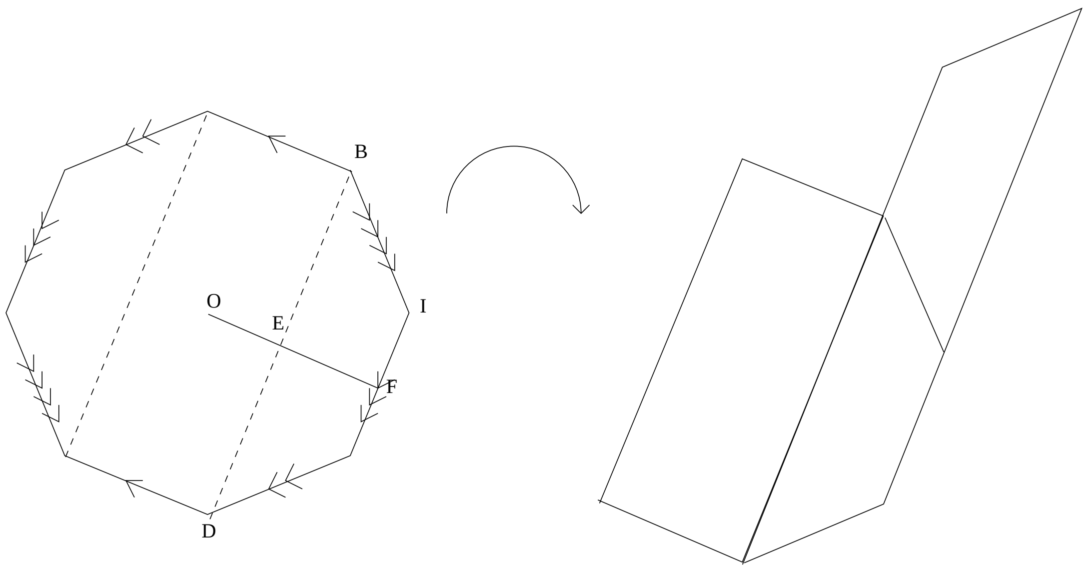

FIG. 17 – Construction de la transvection $\hat{S}$

Par exemple, on a : $\hat{S} = R^3 S^{-1}$.

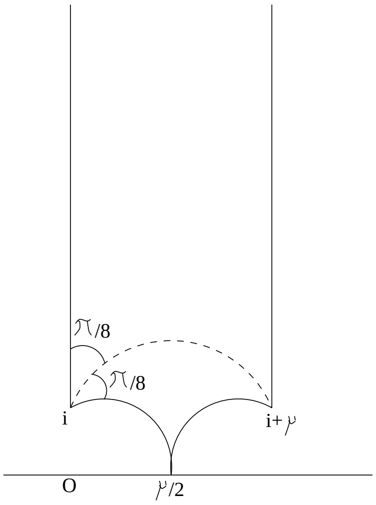

Fig. 18 – Domaine fondamental pour l'action de H

Un domaine fondamental pour l'action du groupe H sur le demi-plan de Poincaré est représenté sur la figure 18. On voit que c'est un domaine de volume fini (égal à $\frac{3\pi}{2}$) : le groupe de Veech de Σ est un groupe de covolume fini et donc Σ est une surface de Veech. Le fait que le twist de différentielle S soit un difféomorphisme affine de la surface Σ se traduit géométriquement (cf. la figure 19) par le fait que l'on peut redécouper l'image de l'octogone initial en tranches pour recomposer exactement l'octogone de départ.

2.2 Présentation de l'algorithme

Pour construire un algorithme de fractions continues sur la surface Σ, on s'inspire de l'algorithme de Poincaré. On rappelle que pour construire l'algorithme de Poincaré (cf. page 18), on prend une droite de pente α dans le plan et on fait agir les inverses des matrices M et N, génératrices du groupe des difféomorphismes affines du tore $\mathbb{T}^2$ (qui est $SL(2, \mathbb{Z})$), en cherchant à approcher la droite initiale par des cônes de plus en plus effilés.

Définition matricielle et géométrique de l'algorithme

Nous allons tout d'abord présenter l'algorithme sur la surface Σ de manière matricielle. Soit une droite D de pente $\alpha = \text{cotan}(\theta)$ dans la plan $\mathbb{R}^2$ (cf. la figure 20). On définit $E = E^{-1} \cup E^1 = \left[-\frac{\pi}{8}, 0\right[\cup \left[0, \frac{\pi}{8}\right]$ et on cherche à construire une application qui envoie l'ensemble des droites appartenant à E dans l'ensemble des droites appartenant à E (dans la suite, on identifie E avec l'ensemble des droites dont la pente vaut $\text{cotan}(\theta)$ avec $\theta \in E$: on parlera donc de l'image de E par une matrice). Quitte à appliquer R, on peut supposer que $\theta \in E$. Supposons que $\theta \in E^1$. On applique alors la matrice S^{-1}. On peut voir l'action de S^{-1} sur la figure 21 : on a déformé le dessin en dilatant l'axe des abscisses pour mieux distinguer l'octogone initial.

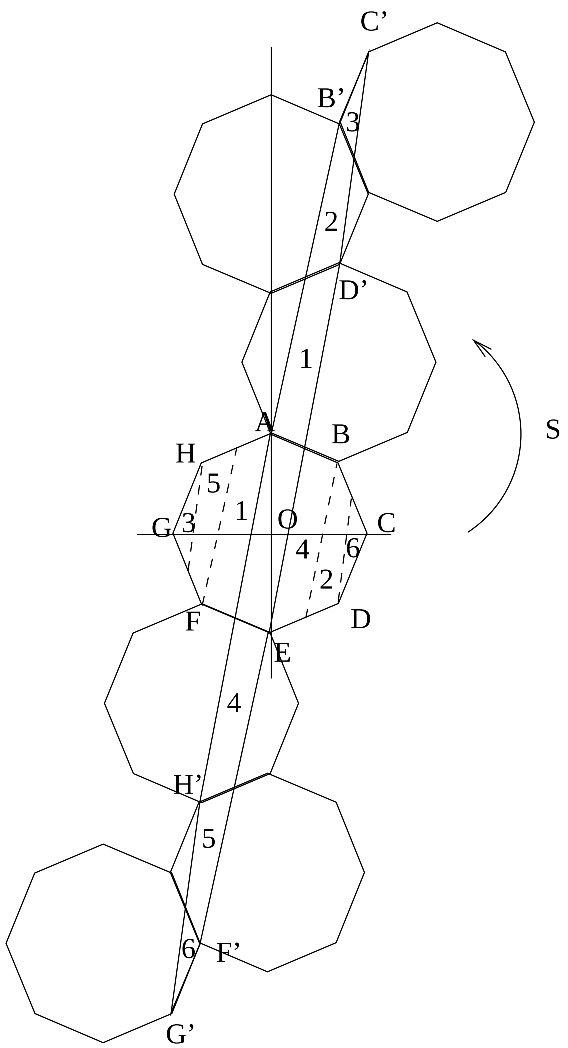

Fig. 19 – Action de S sur l'octogone : $M' = S(M)$

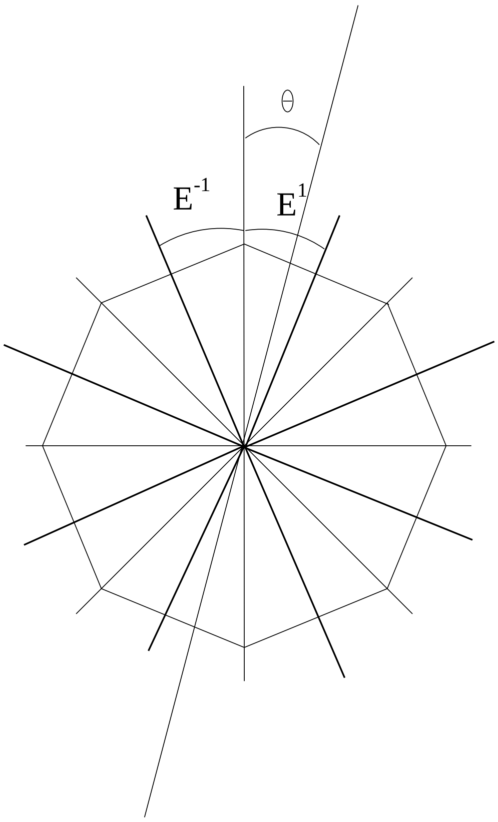

FIG. 20 – Flot linéaire de pente $\text{cotan}(\theta)$ dans l'octogone

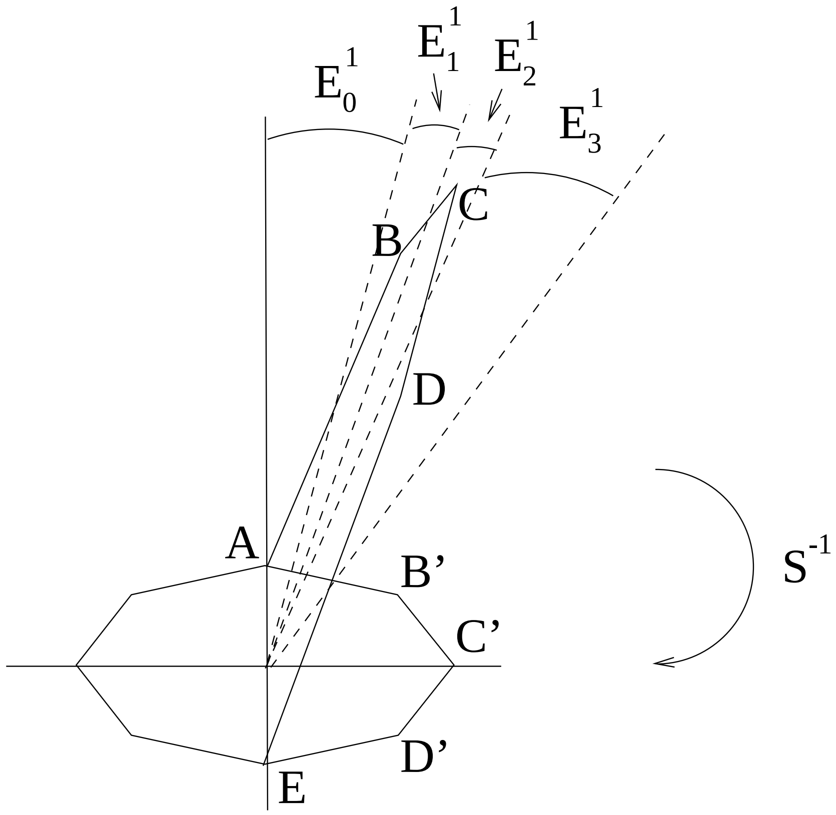

FIG. 21 – Description de l'algorithme $M' = S^{-1}(M)$

L'image de E^1 par S^{-1} est $\left[0, \frac{7\pi}{8}\right]$ (le milieu du côté C^1 est envoyé sur le mileu du côté C^{-2} cf. la figure 14). On peut découper l'image de E^1 par S^{-1} en 4 parties, qui se renvoient sur E en appliquant la rotation R : $\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$, $\left[\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right]$ et $\left[\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right]$. On peut alors définir 4 sous-ensembles de E^1 (cf. la figure 21), préimage par S^{-1} des 4 parties précédentes :

Sur E_0^1, on applique S^{-1} : E_0^1 est envoyé sur E^1
Sur E_1^1, on applique RS^{-1} : E_1^1 est envoyé sur E
Sur E_2^1, on applique R^2S^{-1} : E_2^1 est envoyé sur E
Sur E_3^1, on applique R^3S^{-1} : E_3^1 est envoyé sur E

On a ainsi bien défini une application de E^1 dans E.
De même, si D est dans E^{-1}, on applique S et on voit que le milieu du côté C^2 est envoyé sur le mileu du côté C^{-1}. On obtient donc de même quatre sous ensembles de E^{-1} :

Sur E_0^{-1}, on applique S : E_0^{-1} est envoyé sur E^{-1}
Sur E_1^{-1}, on applique R^3S : E_1^{-1} est envoyé sur E
Sur E_2^{-1}, on applique R^2S : E_2^{-1} est envoyé sur E
Sur E_3^{-1}, on applique RS : E_3^{-1} est envoyé sur E

Le modèle pour construire cet algorithme est l'algorithme de Poincaré : c'est un algorithme défini de manière géométrique. En effet, on a en fait défini huit cônes et précisé quel est celui qui contient la droite D en appliquant une des huit matrices (faire le parallèle avec Poincaré : les matrices contiennent les coordonnées des points I_n et J_n définis géométriquement).

Définition calculatoire de l'algorithme

Précisons maintenant l'algorithme d'un point de vue calculatoire. Les matrices agissent projectivement sur les droites de $\mathbb{R}^2$. Pour que les formules soient agréables, il faut considérer l'inverse des pentes des droites (ce que l'on va appeler *la copente*). L'action des matrices de $\mathbb{R}^2$ s'écrit alors en effet de manière classique (action par homographie) : soit D une droite de copente β et $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la copente de la droite image $M(D)$ est $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} .\beta = \frac{a\beta+b}{c\beta+d}$. On identifie tout d'abord les ensembles E_j^i pour la copente (on conserve la même notation E_j^i, quelque soit le système de coordonnée, qui sera toujours explicite) :

$E = \left[-\frac{2}{\mu}, \frac{2}{\mu}\right] = E^{-1} \cup E^1$
$E^1 = \left[0, \frac{2}{\mu}\right]$ $E^{-1} = \left[-\frac{2}{\mu}, 0\right]$
$E_0^1 = \left[0, \frac{2}{3\mu}\right]$ $E_1^1 = \left[\frac{2}{3\mu}, \frac{1}{\mu+2/\mu}\right]$ $E_2^1 = \left[\frac{1}{\mu+2/\mu}, \frac{1}{\mu-2/\mu}\right]$ $E_3^1 = \left[\frac{1}{\mu-2/\mu}, \frac{2}{\mu}\right]$
$E_0^{-1} = \left[-\frac{2}{3\mu}, 0\right]$ $E_1^{-1} = \left[-\frac{1}{\mu+2/\mu}, -\frac{2}{3\mu}\right]$ $E_2^{-1} = \left[-\frac{1}{\mu-2/\mu}, -\frac{1}{\mu+2/\mu}\right]$ $E_3^{-1} = \left[-\frac{2}{\mu}, -\frac{1}{\mu-2/\mu},\right]$

Si on note $F : E \longrightarrow E$ l'application sur les copentes associée aux transformations matricielles sur les droites, on trouve que F est impaire et qu'elle est définie sur E^1 par :

$$F|_{E_0^1} : \beta \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\mu & 1 \end{bmatrix} .\beta \qquad F|_{E_1^1} : \beta \longmapsto \begin{bmatrix} 1+\mu & -1 \\ 1-\mu & 1 \end{bmatrix} .\beta$$
$$F|_{E_2^1} : \beta \longmapsto \begin{bmatrix} \mu & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} .\beta \qquad F|_{E_3^1} : \beta \longmapsto \begin{bmatrix} -1+\mu & -1 \\ 1+\mu & -1 \end{bmatrix} .\beta$$

Cette application F (cf. la figure 22) est l'équivalent de l'application associée à l'algorithme additif de Poincaré (cf. page 19).
Géométriquement, on voit que l'on peut itérer indéfiniment l'algorithme à condition que β

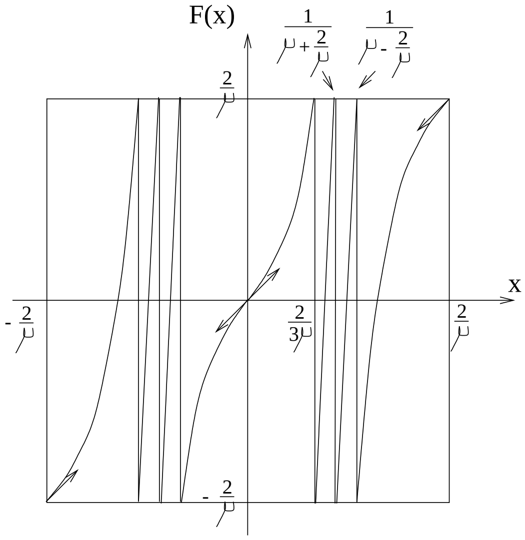

FIG. 22 – Représentation de F

n'appartienne pas à un ensemble dénombrable correspondant aux préimages des bord de E^1 et de E^{-1}. En effet, les transformations matricielles laissent fixes tous les points des droites de copentes 0, $\frac{2}{\mu}$ et $-\frac{2}{\mu}$. Cet ensemble de directions correspond, dans l'algorithme de Poincaré, aux directions rationnelles. Par analogie, on appellera l'ensemble des directions pour lesquelles l'algorithme s'arrête les *directions μ-rationnelles*.

Définition 2.3 *On dit qu'une droite D a une direction μ-rationnelle si sa copente β vérifie :* $\exists n > 0, F^n(\beta) \in \left\{-\frac{2}{\mu}, 0, \frac{2}{\mu}\right\}$.

Remarque : Les directions μ-rationnelles correspondent également aux points de discontinuité des itérés de F.

Par ailleurs, on peut donner les conditions de Markov pour l'algorithme. Tous les ensembles E^i_j, sauf E^1_0 et E^{-1}_0 ont pour image E tout entier. Les conditions de Markov s'écrivent donc : $x \in E^1_0 \Longrightarrow F(x) \in E^1$ et $x \in E^{-1}_0 \Longrightarrow F(x) \in E^{-1}$. Ce sont les seules conditions à vérifier car F envoie bijectivement les E^i_j $(j \neq 0)$ sur E.
Algébriquement, on a la propriété suivante : pour tout x μ-irrationnel, pour tout $n > 0$, il existe une suite de matrice M_1,...,M_n appartenant à $\mathcal{L} = \{S^\epsilon R^i,\ \epsilon \in \{-1, 1\}$ et $i \in \{0, 1, 2, 3\}\}$ tel que $x = M_1 ... M_n\, (F^n(x))$. Les conditions de Markov se traduisent sur la suite de matrices par : $M_i = S \Longrightarrow M_{i+1} \neq S^{-1}$ et $M_i = S^{-1} \Longrightarrow M_{i+1} \neq S$.

Proposition 2.1 *On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des suites de matrices de $\mathcal{L}$ qui vérifient les deux conditions de Markov ci-dessus et qui ne sont pas ultimement constantes de valeur S, S^{-1}, SR ou $S^{-1}R^3$: on parlera de* suites admissibles*. Les suites infinies de matrices obtenues par l'algorithme sont exactement les suites admissibles.*

Preuve : Soit x une direction μ-irrationnelle. On sait que la suite de matrices associée à x vérifie les conditions de Markov. Il faut vérifier qu'elle ne peut être ultimement constante de valeur S, par exemple. Or, si $M_1 = ... = M_n = S$, alors $x \in \left[0, \frac{2}{(2n+1)\mu}\right[$ et l'intersection de tous ces intervalles vaut 0 qui est une direction μ-rationnelle : contradiction (cf. la figure 23).
Réciproquement, soit une suite M_i appartenant à $\mathcal{A}$ et soit $n > 0$. Si $M_n = S$, on pose

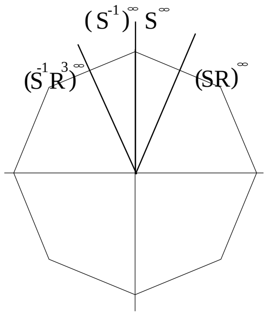

FIG. 23 – Directions correspondant aux suites de valeur constante S, S^{-1}, SR ou $S^{-1}R^3$

$E' = E^1$, si $M_n = S^{-1}$, on pose $E' = E^{-1}$ et sinon, on pose $E' = E$. On sait que pour tout $x \in M_1...M_n(E') = I_n$, les n premiers termes du développements de x sont M_1,...M_n. Il est clair que la suite des I_n est une suite d'intervalles emboîtés. On vérifie par ailleurs que les conditions d'admissibilité garantissent que $\forall n > 0, \exists k > 0, \overline{I_{n+k}} \subset I_n$ (cf. la preuve de la proposition 2.2). On en déduit que l'intersection des I_n est non vide et il est clair que tout x appartenant à cette intersection admet pour développement la suite (M_n). □

Remarque : On peut également définir un système dynamique symbolique. A une suite de matrices admissible (M_n), on associe la suite $(\epsilon_n, i_n) \in (\{-1,1\} \times \{0,1,2,3\})^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n > 0, M_n = S^{\epsilon_n} R^{i_n}$. Les conditions de Markov sécrivent alors : $i_n = 0 \Longrightarrow \epsilon_n = \epsilon_{n+1}$. F est ainsi conjuguée au décalage unilatère markovien σ^+ (pour les conditions précisées précédemment).

Point de vue dynamique sur l'algorithme

D'un point de vue dynamique, on considère en fait un feuilletage linéaire constitué d'un ensemble de droites de pente donnée. Ces droites sont des géodésiques de la surface Σ (qui est une surface plate) : on regarde donc en fait le flot géodésique sur Σ. Dans la suite, on représente une géodésique comme sur la figure 24, en prolongeant la droite dans $\mathbb{R}^2$ et en translatant l'octogone : on fabrique ainsi un *corridor* d'octogones traversés par la géodésique. Une géodésique partant de l'origine est alors fermée si et seulement si elle retraverse un autre octogone en son centre : on appellera *extrémité* d'une géodésique fermée le premier centre d'octogone qu'elle rencontre dans le corridor. Ainsi, à la première géodésique fermée fondamentale (celle qui est verticale), on associe le point A de coordonnées $(0, 2+\sqrt{2})$ (cf. la figure 24) et à la seconde le point B de coordonnées $(\sqrt{2}/2, 1+\sqrt{2}/2)$.
On appelle ces deux géodésiques ($[OA]$ et $[OB]$) fondamentales pour la raison suivante : le fait que l'on connaisse le groupe des difféomorphismes affines de la surface Σ et un domaine fondamental de l'action de ce groupe sur $\mathbb{H}$ permet d'affirmer (cf. [Ve]) que l'ensemble des géodésiques est l'orbite des deux géodésiques fondamentales sous l'action du groupe de difféomorphismes affines (cf. la figure 24).

On peut maintenant énoncer un théorème donnant une caractérisation dynamique des directions μ-rationnelles.

Théorème 2.3 *Les directions μ-rationnelles correspondent aux directions des géodésiques fermées (passant par l'origine). L'ensemble des géodésiques fermées (passant par l'origine)*

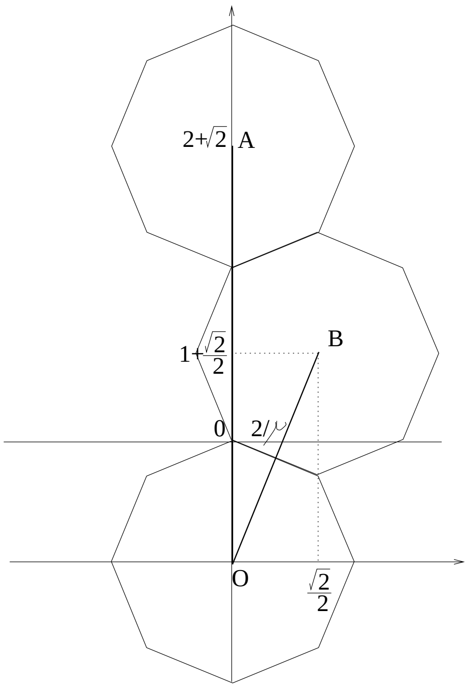

FIG. 24 – Les deux géodésiques fondamentales

est égal à l'union disjointe des orbites de deux géodésiques fondamentales sous l'action du groupe des difféomorphismes affines de Σ (on parlera de deux cusps*) : l'orbite de la géodésique de copente* 0 *et l'orbite de la géodésique de copente* $\frac{2}{\mu}$.

Preuve : Si une direction β est μ-rationelle, on sait que $\exists n > 0,\ F^n(\beta) \in \left\{-\frac{2}{\mu}, 0, \frac{2}{\mu}\right\}$ et donc il existe une suite de matrices $M_1...M_n$ telle que $M_1...M_n(0) = \beta$ (ou $M_1...M_n(\pm\frac{2}{\mu}) = \beta$). Ceci signifie que la droite D est l'image par un élément du groupe de difféomorphismes affines d'une des deux géodésiques fondamentales (cf. la figure 24) de copente 0 et $\frac{2}{\mu}$.
Réciproquement, si on considère une géodésique fermée $[OC]$ de copente β et d'extrémité C, on remarque qu'en appliquant l'algorithme (cf. l'algorithme matriciel), on obtient des points C_i qui sont également des extrémités de géodésiques fermées. De plus, il est facile de voir qu'à chaque étape, on diminue strictement la longueur OC_i, sauf si $[OC_i]$ est de copente 0 (c'est donc alors la première géodésique fondamentale) ou si $[OC_i]$ est de copente $\frac{2}{\mu}$ (auquel cas c'est la seconde géodésique fondamentale) (cf. la figure 21). Comme il y a un nombre fini de centres d'octogones correspondant à des extrémités dans une boule centrée sur l'origine, on est donc certain que l'algorithme termine : on finit sur une des deux géodésiques fondamentales. $\square$

Remarque : L'algorithme permet donc de répondre à une question difficile : on sait que l'ensemble des géodésiques fermées est l'union disjointe des orbites de deux géodésiques fondamentales sous l'action du groupe des difféomorphismes affines. Etant donné une géodésique fermée, quelle est la matrice qui permet de passer de cette géodésique à une des deux géodésique fondamentale ? Il suffit d'appliquer l'algorithme pour avoir la réponse.

Convergence de l'algorithme, extension naturelle de F

Donnons maintenant quelques résultats concernant la convergence de l'algorithme, et la construction d'une extension naturelle pour déterminer une mesure invariante.
Nous avons déjà vu que toute suite admissible de matrices est le développement d'un point μ-irrationnel (cf. la proposition 2.1). Nous avons ainsi montré que l'application Θ qui à une direction μ-irrationnelle associe la suite de matrices obtenue par l'algorithme est surjective sur $\mathcal{A}$. On montre maintenant qu'elle est injective en prouvant que l'algorithme converge : à toute suite de matrice admissible est associée un unique point μ-irrationnel.

Proposition 2.2 *Soit x une direction μ-irrationnelle et M_n la suite de matrice associée. Alors,*

$$\lim_{n\to\infty} M_1...M_n(0) = x$$

Preuve : On sait que pour tout $n > 0$, $M_1...M_n(F^n(x)) = x$. Comme F^n est croissante (comme composée d'applications croissantes), $M_1...M_n$ également. On a donc $M_1...M_n\left(-\frac{2}{\mu}\right) \leq x \leq M_1...M_n\left(\frac{2}{\mu}\right)$. Or, on vérifie par le calcul que les M_i différentes de S, S^{-1}, SR et $S^{-1}R^3$ sont contractantes de rapport $k<1$ et que S, S^{-1}, SR et $S^{-1}R^3$ sont 1-lipschitziennes. Comme on est certain qu'il y a une infinité de M_i différentes de S, S^{-1}, SR et $S^{-1}R^3$ (cf. les conditions d'admissibilité), on en déduit que la longueur de l'intervalle image de $\left[-\frac{2}{\mu},\frac{2}{\mu}\right]$ par $M_1...M_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, ce qui termine la preuve.
$\square$

Remarque : L'application réciproque de Θ est donc l'application qui à une suite admissible M_n associe la limite : $\lim_{n\to\infty} M_1...M_n(0)$.

Nous allons maintenant construire une extension naturelle à l'application F, comme nous l'avons fait dans la section 1.2. Le but est de construire une mesure invariante par F.
Soit x une direction μ-irrationnelle et (M_n) la suite de matrice associée. On a $x = \lim_{n\to\infty} M_1...M_n(0)$. La suite de matrices associée à la direction $F(x)$ est $M_2...M_n....$ Si on considère le système symbolique associée à la suite de matrice (M_n) (c'est-à-dire la suite $(\epsilon_n, i_n) \in (\{-1,1\}\times\{0,1,2,3\})^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n>0, M_n = S^{\epsilon_n}R^{i_n}$), on voit que l'application F est conjuguée au décalage markovien unilatère σ^+. De même, que dans la section 1.2, on complète $\mathcal{A}$ en considérant tous les passés possibles. On définit donc le décalage markovien bilatère σ (qui est bien bijectif cette fois) sur l'ensemble $\tilde{\mathcal{A}}$ des suites de matrices admissibles indexées par $\mathbb{Z}$: $\tilde{\mathcal{A}} = \left\{(M_n)\in\mathcal{L}^{\mathbb{Z}}, \forall i\in\mathbb{Z}\,(M_i = S \Longrightarrow M_{i+1}\neq S^{-1}) \text{ et } (M_i = S^{-1} \Longrightarrow M_{i+1}\neq S)\right\}$. A une suite de cette ensemble $\tilde{\mathcal{A}}$, on associe $x = \lim_{n\to\infty} M_1...M_n(0)$ et $y = \lim_{n\to\infty} M_0^{-1}M_{-1}^{-1}...M_{-n}^{-1}(0)$. L'application conjuguée au shift bilatère nous donne alors une extension naturelle définie par :

$$\tilde{F}\left\{\begin{array}{ccc}\Delta & \longrightarrow & \Delta\\ (x,y) & \longmapsto & ((M_1)(x)^{-1}(x),(M_1)(x)^{-1}(y))\end{array}\right.$$

où on note $M_1(x)$ la première matrice du développement de x (ainsi, $(M_1)(x)^{-1}(x) = F(x)$). Le problème (comme dans la partie 1.4) est alors d'identifier l'ensemble Δ sur lequel $\tilde{F}$ est presque partout bijective.

Proposition 2.3 *L'application $\tilde{F}:\Delta\longrightarrow\Delta$ est presque partout bijective pour $\Delta = (E^1\times\mathbb{R}\setminus E^1)\cup(E^{-1}\times\mathbb{R}\setminus E^{-1})$.*

Preuve : Soit $x \in E^1$ (par exemple). On cherche tous les y possibles (tous les passés possibles) : les seules conditions pour que y soit passé de x sont sur M_0 (cf. les conditions de Markov). On sait que $\epsilon_1 = 1$ (car $x \in E^1$) : $M_1 = SR^{i_1}$. Si $\epsilon_0 = -1$, a_0 ne peut prendre la valeur 0. Si $\epsilon_0 = 1$, toutes les valeurs sont autorisées pour a_0. On a donc $y = R^{a_0}(z)$ avec $z \in E^1$ si $\epsilon_0 = -1$ et $z \in E^{-1}$ si $\epsilon_0 = 1$. D'où $y \in \bigcup_{i=1}^{3} R^i(E^1) \bigcup \bigcup_{i=0}^{3} R^i(E^{-1}) = \mathbb{R} \setminus E^1$. On obtient de la même façon le résultat pour $x \in E^{-1}$. □

L'application $\tilde{F}$ étant presque partout bijective et localement de la forme $(\tau(x), \tau(y))$ avec τ une homographie, en appliquant le lemme 1.2, on trouve une mesure invariante pour $\tilde{F}$: $\frac{dxdy}{(x-y)^2}$. En intégrant sur les verticales, on obtient une mesure invariante par F.

Proposition 2.4 *Une mesure invariante par F est la mesure de densité (par rapport à la mesure de Lebesgue)*

$$\frac{1}{x\,(2/\mu - x)} 1_{E^1} + \frac{1}{-x\,(2/\mu + x)} 1_{E^{-1}}$$

Remarque : Si on cherche à faire exactement le parallèle avec l'algorithme de Poincaré, il faut modifier légèrement l'algorithme que l'on a exposé à la section 1.2. Il faut, par exemple, considérer la matrice $N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et la matrice $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Géométriquement, la matrice P ramène les droites situées dans le cône $\alpha > 1$ dans le cône $0 < \alpha < 1$ car elle échange les deux coordonnées. Un irrationnel $x = [0, a_1, ..., a_n, ...]$ s'écrit $x = \lim_{n\to\infty}(PN^{a_1})...(PN^{a_n}).0$. A une suite d'entiers strictement positifs indexée par $\mathbb{Z}$, on associe $x = \lim_{n\to\infty}(PN^{a_1})...(PN^{a_n}).0$ et $y = \lim_{n\to\infty}(N^{-a_0}P)...(N^{-a_{-n}}P).0 = [-a_0, -a_{-1}, ..., -a_{-n}, ...]$. Le décalage bilatère est alors conjugué à l'extension naturelle $(x, y) \longmapsto \left(T(x), \frac{1}{y} - E\left(\frac{1}{x}\right)\right)$. En fait, l'extension naturelle que l'on définit ici est conjuguée à celle que l'on avait définie dans la section 1.2 (notée $\overline{T}$) par $\phi : (x, y) \longmapsto (\left(x, -\frac{1}{y}\right))$ (cf. page 12). On voit alors qu'elle est presque partout bijective de $[0, 1[\times] - \infty, -1]$ sur lui-même. De plus, elle est localement de la forme $(\tau(x), \tau(y))$ avec τ une homographie. On applique ensuite le lemme 1.2 pour trouver une mesure invariante.

Nous avons ici étudié l'algorithme additif de la transformation. On remarque d'ailleurs que la mesure invariante est de masse infinie, comme dans le cas de la mesure associée à l'algorithme additif du développement en fractions continues classique (cf. page 22). Pour obtenir l'algorithme multiplicatif (pour les détails, cf. [ArHu]), il faut regrouper en puissance les matrices consécutives S, S^{-1}, SR et $S^{-1}R^3$: ce sont les matrices qui laissent invariantes les deux géodésiques fondamentales. On peut ensuite calculer la mesure invariante pour cette nouvelle fonction et on remarque qu'elle est cette fois de masse finie.

2.3 Recherche des directions μ-rationnelles

Nous avons vu que l'algorithme précédemment défini pouvait être itéré indéfiniment sauf pour certaines directions que nous avons appelées μ-rationelles. Nous avons par ailleurs identifié ces directions comme l'ensemble des directions des géodésiques fermées sur la surface. Une question qui se pose alors naturellement est d'essayer de trouver une caractérisation arithmétique des copentes de ces directions (c'est en effet le paramètre que nous avons choisi pour repérer les directions). Il est clair que les copentes de ces directions μ-rationelles sont des éléments de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ car ce sont les orbites des points 0 et $\frac{2}{\mu}$ (éléments de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$) sous

l'action des deux matrices R et S (éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q}[\sqrt{2}])$) (cf. le théorème 2.3).
Cette question est importante car elle reste également sans réponse pour un groupe très proche de celui qu'on étudie : le groupe de Hecke Γ_8. Le groupe de Hecke Γ_n est le sous-groupe de $SL(2,\mathbb{R})$ engendré par les matrices $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Or, Γ_8 est conjugué $\left(\text{par la matrice } \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\sin(\pi/8)}} & \frac{\cos(\pi/8)}{\sqrt{\sin(\pi/8)}} \\ 0 & \sqrt{\sin(\pi/8)} \end{bmatrix}\right)$ au groupe G engendré par S et U (la rotation d'angle $\frac{\pi}{8}$) et H est évidemment un sous-groupe d'indice 2 de G (car $U^2 = R$). Le groupe de Hecke Γ_8 (et plus généralement le groupe Γ_n) est lui aussi associé à un algorithme de fractions continues défini par Rosen (cf. [Schm] et [Ros]). De même que dans le cas de la surface modulaire, on sait que les géodésiques fermées sur le domaine fondamental de l'action de Γ_8 sur $\mathbb{H}$ correspondent aux développements finis ou périodiques mais on n'a pas pu trouver une caractérisation arithmétique de ces directions. Déterminer ces directions revient en fait à identifier l'ensemble limite du groupe fuschien Γ_n (un groupe fuschien est un sous-groupe discret de $SL(2,\mathbb{R})$) et c'est un problème fondamental en géométrie algébrique (cf. [Bea]).
La grande différence entre les fractions continues de Rosen et l'algorithme défini ci-dessus est que le premier est défini de manière arithmétique (comme dans le cas des fractions continues classiques) alors que le second est défini de manière purement géométrique. C'est pourquoi on peut penser qu'il apporte un nouvel éclairage sur la question.

Pour répondre à cette question, il faut d'abord réfléchir à la manière d'engendrer ces directions μ-rationnelles. La seule façon simple de le faire est de prendre les images des deux géodésiques fermées fondamentales par le groupe H (cf. la figure 24 et le théorème 2.3). Les extrémités de l'ensemble des géodésiques fermées sont données par l'orbite des points A (premier cusp) et B (second cusp) sous l'action de H et on sait que l'ensemble de leurs directions est exactement l'ensemble des directions μ-rationnelles. On notera $\mathcal{E}$ l'ensemble de ces extrémités. On peut obtenir un dessin de $\mathcal{E}$ informatiquement en engendrant l'ensemble des suites admissibles de longueur donnée de manière récursive. On obtient alors les figures 25 et 26, pour des suites de longueur 7. On remarque que l'on a ramené tous les centres dans le demi-plan supérieur en faisant agir $R^4 = -I$. En fait, c'est le groupe $PH = H/\{+Id, -Id\}$ qui nous intéresse, car c'est lui qui agit sur les copentes.

FIG. 25 – Extrémités des géodésiques fermées ($-50 < x < 50$ et $0 < y < 100$)

Malheureusement, ces figures ne ressemblent en rien à un réseau ni à aucun dessin connu (dans le cas de l'algorithme de Poincaré, et à condition de rajouter les multiples, on aurait obtenu le réseau $\mathbb{Z}^2$).
Donnons quelques remarques sur l'algorithme utilisé pour engendrer les géodésiques fermées.

FIG. 26 – Extrémités des géodésiques fermées ($-10 < x < 10$ et $0 < y < 20$)

Tout d'abord, il suffit d'engendre les suites de longueur n pour avoir les suites de longueur $1...n$. En effet, les suites se terminant par une suite de S (ou de S^{-1}) laissent la géodésique d'extrémité A invariante et les suites se terminant par une suite de SR laissent la géodésique d'extrémité B invariante. D'autre part, les mots que l'on engendre sont tous différents d'après le lemme suivant que nous admettons (cf. une preuve dans [Bea]).

Lemme 2.1 *Le groupe $PH = H/\{+Id, -Id\}$ est le produit libre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/4$.*

L'informatique peut aussi aider à donner une conjecture sur la caractérisation arithmétique des directions rationnelles. En programmant l'algorithme précédemment défini, on peut tester quelques directions en entrant une valeur numérique et l'ordre de développement. Quand on entre un réel sous forme décimale, il y a évidemment des erreurs liées aux approximations faites par l'ordinateur. Par contre, quand on entre un élément de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, on peut faire les calculs dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \times \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ (cf. le groupe $\tilde{H}$ page 59) : l'ordinateur ne fait plus aucune approximation. On sait que l'on a une direction périodique si on termine sur une des deux géodésiques fondamentales. Ainsi, en testant plusieurs éléments de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, j'ai conjecturé que l'ensemble des directions μ-rationnelles est $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ en entier. J'ai ensuite vérifié cette conjecture sur tous les éléments de la forme $\frac{a+b\sqrt{2}}{c}$ avec a, b, et c premiers entre eux, $-10 \leq a \leq 10$, $-10 \leq b \leq 10$ et $1 \leq c \leq 20$: toutes ces directions sont μ-rationelles. L'élément ayant le plus long développement est $\frac{1+10\sqrt{2}}{20}$: il faut appliquer 213 M_i pour retomber sur le premier cusp.
<u>Exemple :</u> On considère $x = \frac{-5-3\sqrt{2}}{4}$. On ramène cette direction dans E sous l'action de R. On trouve $y = \frac{3-8\sqrt{2}}{21}$ et y est une direction μ-rationnelle dont le développement est : $(\epsilon_1 = -1, i_1 = 3)$ $(\epsilon_2 = -1, i_2 = 3)$...$(\epsilon_{12} = -1, i_{12} = 3)$ $(\epsilon_{13} = -1, i_{13} = 2)$ $(\epsilon_{14} = -1, i_{14} = 3)$ et qui termine par S^∞ (on tombe sur le premier cusp). Ceci signifie que $y = (S^{-1}R^3)^{12}(S^{-1}R^2)(S^{-1}R^3).0$ et $x = Ry$.
On considère $x = \frac{-3-3\sqrt{2}}{7}$. On ramène cette direction dans E sous l'action de R. On trouve $y = \frac{29-21\sqrt{2}}{41}$ et y est une direction μ-rationnelle dont le développement est : $(\epsilon_1 = -1, i_1 = 0)$ $(\epsilon_2 = -1, i_2 = 0)$...$(\epsilon_{11} = -1, i_{11} = 0)$ $(\epsilon_{12} = -1, i_{12} = 1)$ $(\epsilon_{13} = -1, i_{13} = 0)$ et qui termine par $(S^{-1}R^3)^\infty$ (on tombe sur le second cusp : cf. la figure 23). Ceci signifie que $y = (S^{-1})^{11}(S^{-1}R)(S^{-1}).\left(\frac{-2}{\mu}\right)$ et $x = Ry$. Si la suite se termine par $(SR)^\infty$, il faut prendre l'image de $\frac{2}{\mu}$.

On formule donc la conjecture suivante :

Conjecture 2.1 *L'ensemble des directions μ-rationnelles est l'ensemble des directions dont la copente est un élément de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.*

J'ai essayé de montrer cette conjecture selon trois points de vue : géométrique, algèbrique et arithmétique.

<u>Point de vue géométrique</u>

Le point de vue géométrique me semble le plus prometteur car l'algorithme est défini de manière géométrique. Pour chaque géodésique, on sait qu'il y a un corridor d'octogones (obtenus par translation de l'octogone initial) qui sont traversés par la géodésique. Quand elle est fermée, elle va du centre de l'octogone initial au centre du dernier octogone du corridor (l'extrémité de la géodésique). Quand on trace l'ensemble de ces extrémités (cf. les figures 25 et 26), on ne reconnaît pas de figure particulière : on ne s'attendait certainement pas à avoir un réseau (car les octogones ne pavent pas le plan) mais peut-être un pavage du style Penrose... On peut alors se demander si cette figure n'est pas la projection d'une figure plus simple (d'un réseau ?) dans $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$ (car les éléments de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ s'écrivent sous la forme $\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}$ ou $\frac{A+B\sqrt{2}}{C}$). Il y a alors un résultat remarquable qui permet de poser le problème dans $\mathbb{R}^4$.

Proposition 2.5 *L'hypercube de $\mathbb{R}^4$ de centre O et de côté 2 se projette sur l'octogone régulier.*

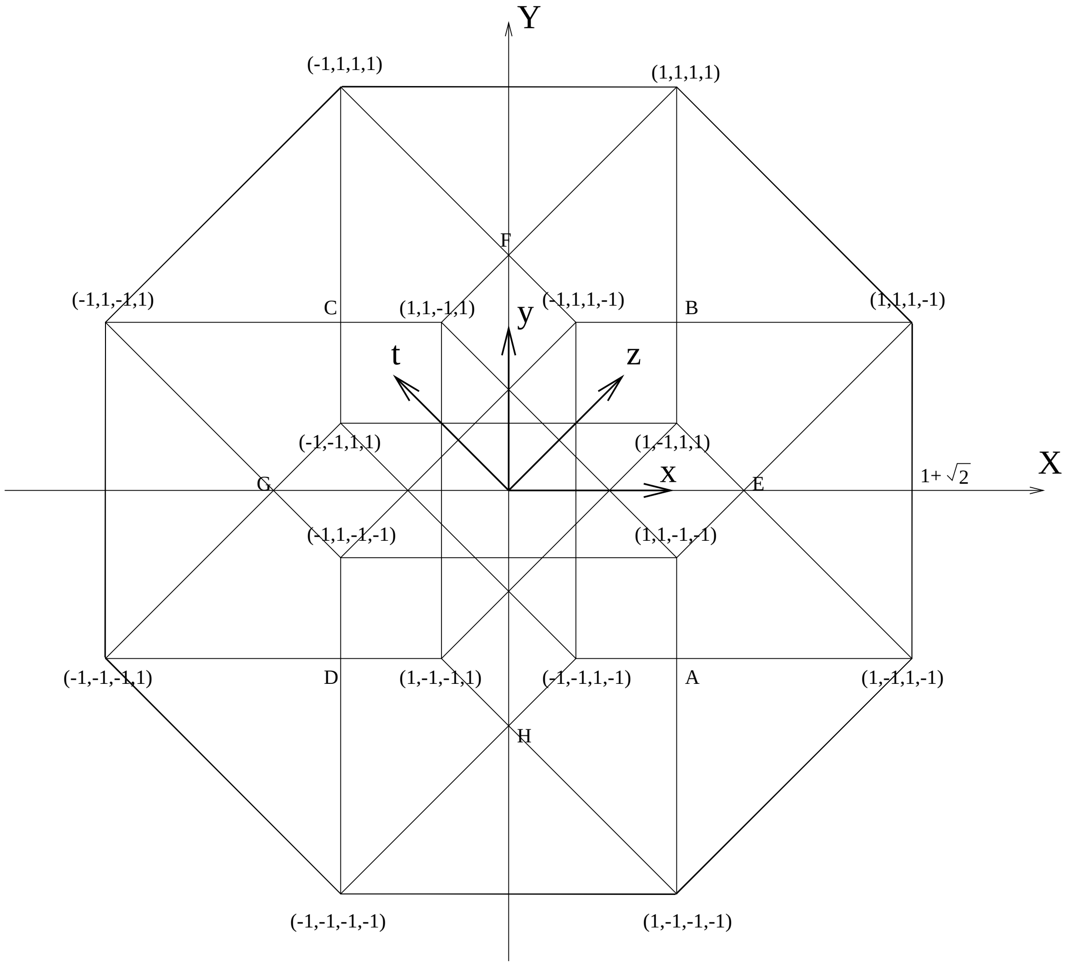

FIG. 27 – Projection de l'hypercube sur l'octogone régulier

Preuve : On considère donc l'ensemble de points suivant dans $\mathbb{R}^4$: $\{(x,y,z,t),\ -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1,\ -1 \leq z \leq 1, -1 \leq t \leq 1\}$. La formule de la projection Π est la suivante :

$$\Pi : (x,y,z,t) \longmapsto \begin{cases} X = x + \frac{\sqrt{2}}{2}(z-t) \\ Y = y + \frac{\sqrt{2}}{2}(z+t) \end{cases}$$

C'est la projection sur le plan P_1 de vecteurs directeurs $e_1 = (1,0,0,0)$ et $e_2 = (0,1,0,0)$ parallèlement au plan P_2 de vecteurs directeurs $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, 0\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 1\right)$. Il suffit de regarder la figure 27 pour se convaincre que Π projette l'hypercube sur l'octogone. En effet, à z et t fixés, le point de coordonnées (x,y) parcourt le carré (A,B,C,D) et à x et y fixés, le point de coordonnées (z,t) parcourt le carré (E,F,G,H) (image du précédent par une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$). On a représenté sur la figure 27 les images des 16 sommets de l'hypercube. $\square$

Remarque : L'octogone obtenu est l'image de celui de départ par une rotation d'angle $\pi/8$ et une dilatation de rapport $\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

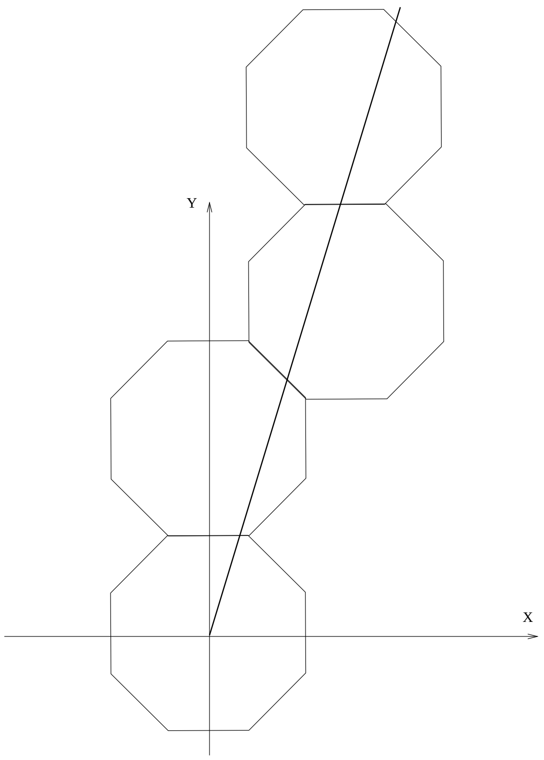

FIG. 28 – Une droite et son corridor d'octogones

On considère maintenant une droite et le corridor d'octogones qui lui est associé (cf. la figure 28). Ce dessin est la projection (par Π) d'un ensemble d'hypercubes traversés par un hyperplan. On peut remarquer que l'on peut supposer que la pente de la droite (dans le repère (O,X,Y)) est comprise entre 0 et 1 (quitte à appliquer R) : une droite qui traverse un octogone ne peut alors sortir que par quatre côtés (cf. la figure 29). Les quatre octogones

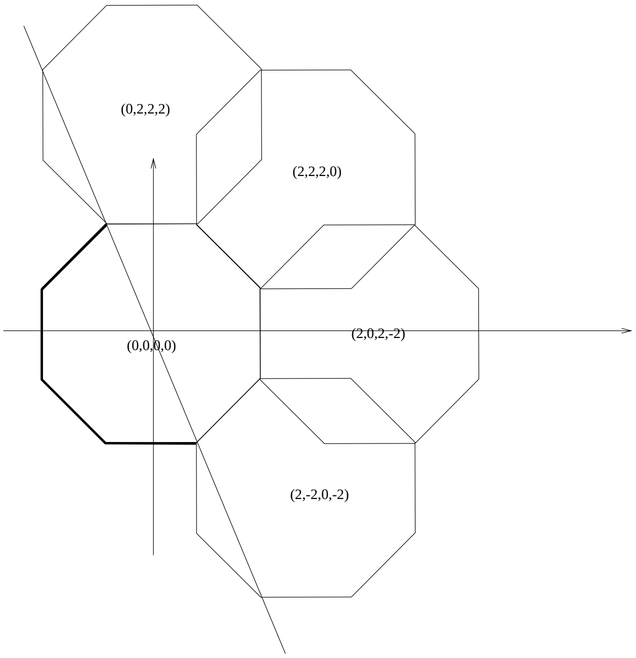

FIG. 29 – Algorithme géométrique : déplacement dans les hypercubes

voisins possibles sont associés à quatre voisins (par une arête) de l'hypercube correspondant dans $\mathbb{R}^4$. Si la droite traverse l'octogone, projection de l'hypercube de centre (p, q, r, s), on calcule que les voisins possibles sont (cf. la figure 29) : $(p, q+2, r+2, s+2)$ (octogone du haut), $(p+2, q+2, r+2, s)$ (octogone en haut à droite), $(p+2, q, r+2, s-2)$ (octogone de droite), $(p+2, q-2, r, s-2)$ (octogone en bas à droite). De plus, on sait qu'un seul de ces voisins est traversé par l'hyperplan (car sur la projection, un seul des octogones voisins est traversé par la droite). Ainsi, on peut reformuler le problème de la manière suivante :
Une droite D a une direction qui est μ-rationnelle si et seulement si quand on considère l'hyperplan $\Pi^{-1}(D)$ et l'ensemble des hypercubes traversés par cet hyperplan, il existe au moins un cube que l'hyperplan traverse en son centre et que, de plus, en partant du cube de centre $(0, 0, 0, 0)$ et en ne s'autorisant que des déplacements du type $(p, q, r, s) \longmapsto ((p, q+2, r+2, s+2)$ ou $(p+2, q+2, r+2, s)$ ou $(p+2, q, r+2, s-2)$ ou $(p+2, q-2, r, s-2))$, il existe un chemin parmi ces hypercubes qui mène à un hypercube traversé en son centre par l'hyperplan. On sait de plus que ce chemin sera unique et que parmi les hypercubes traversés, un seul des quatre déplacements est à chaque fois possible.
Le fait que l'hyperplan passe par au moins un centre de cube revient exactement à dire que l'hyperplan contient une géodésique du tore $\mathbb{T}^4$ qui est périodique : on connaît donc parfaitement une caractérisation de ce fait. De même, on peut caractériser l'ensemble des cubes traversés par l'hyperplan mais, malheureusement, il est difficile de vérifier la condition sur les chemins.
Quand on fait le problème équivalent du cube qui se projette sur l'hexagone, on trouve que les trois directions possibles de mouvements dans $\mathbb{R}^3$ forment un plan : on connaît donc alors le chemin de cubes suivi (est-ce que cela est lié au fait que les hexagones pavent le plan ?). Malheureusement, ici, les quatre directions de déplacement $((0, 2, 2, 2)$, $(2, 2, 2, 0)$, $(2, 0, 2, -2)$ et $(2, -2, 0, -2))$ sont indépendantes.
Il semble donc difficile d'obtenir des renseignements sur les cubes extrémités (c'est-à-dire les

cubes dont le centre se projette par Π sur l'extrémité d'une géodésique fermée).
Remarque : D'un point de vue géométrique, j'ai également cherché s'il n'y avait pas une propriété du type "Farey" qui donnerait à l'intérieur d'un cône, les huit nouvelles directions discriminantes, en fonction des coordonnées des bords de ce cône. Malheureusement, je n'ai rien pu établir.

Point de vue algébrique

D'un point de vue algébrique, il s'agit de comprendre l'orbite de deux points (0 et $\frac{2}{\mu}$) sous l'action du groupe $PH = H/\{+Id, -Id\}$ qui est un produit libre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/4$.
Pour comprendre le groupe PH, on peut remarquer que $SRS = R^3 - 2S$. En utilisant cette relation, on montre la proposition suivante :

Proposition 2.6 *Les éléments du groupe PH s'écrivent tous sous la forme $P(R)S + Q(R)$ où P et Q sont des polynômes de degré 4 à coefficients entiers.*

Preuve : Un élément de PH est un produit d'éléments de $\mathcal{L}$. Or, on a : $R^4 = Id$, $S^n = nS - (n-1)I$ pour $n \in \mathbb{Z}$, et $SR = -R^3S + 2R^3 - 2Id$, $SR^2 = -R^2S + 2(R^3 + R^2 - R - Id)$, $SR^3 = -RS + 2(R^3 - Id)$. Ainsi, on peut toujours "pousser" S à droite et transformer les produits de S en combinaisons linéaires de S et R. $\square$

On a ainsi introduit une structure d'algèbre. Le problème est de caractériser les polynômes P et Q tels que $P(R)S + Q(R) \in PH$. Je n'ai pas réussi à répondre à cette question.
Une tout autre manière d'aborder le problème est de remarquer que l'on peut passer dans $\mathbb{Z}^4$. Géométriquement, on cherche l'orbite des points $A(0, 2 + \sqrt{2})$ et $B(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$ sous l'action du groupe engendré par S et R. Intéressons-nous à l'orbite de A. On peut remarquer que les coordonnées des points de l'orbite restent dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \times \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Ainsi en écrivant les points sous la forme $(a + b\sqrt{2}, c + d\sqrt{2}) = (a, b, c, d)$, le problème se reformule de la manière suivante :
On cherche l'orbite du point $(0, 0, 2, 1)$ sous l'action du groupe $\overline{H}$ engendré par les deux matrices $\overline{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\overline{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$.
Remarque : $\overline{H}$ est un sous-groupe de $SL(4, \mathbb{R})$ et $\overline{H}/\{+Id, -Id\}$ est bien sûr toujours le produit libre $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/4$.

Proposition 2.7 *L'orbite du point $(0, 0, 2, 1)$ sous l'action de $\overline{S}$ et $\overline{R}$ est inclus dans $\mathbb{Z}^4$.*

Preuve : Il suffit de remarquer que a et c sont de même parité et que cette propriété est conservée par R et S. Ainsi, quand on applique R, $\frac{a+c}{2}$ et $\frac{a-c}{2}$ sont bien des éléments de $\mathbb{Z}$. $\square$

Remarque : On peut rendre explicite cette propriété en remarquant que $\overline{H}$ est conjugué à un sous groupe de $SL(4, \mathbb{Z})$. En écrivant les points sous la forme $((\tilde{a} + \tilde{b}) + \tilde{c}\sqrt{2}, (\tilde{a} - \tilde{b}) + \tilde{d}\sqrt{2}) = (\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d})$ (ce qui revient exactement à écrire que a et c sont de même parité), on obtient le sous groupe de $SL(4,\mathbb{Z})$ $\tilde{H}$ engendré par les deux matrices $\tilde{S} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ et $\tilde{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et on cherche l'orbite du point $(1,-1,0,1)$ sous l'action de $\tilde{H}$.

En traçant des projections de l'orbite du point $(0,0,2,1)$ sous l'action de $\overline{H}$, j'ai remarqué la propriété suivante :

Conjecture 2.2 *Si on note (a,b,c,d) un point de l'orbite de $(0,0,2,1)$ sous l'action de $\overline{H}$, on remarque les propriétés suivantes :*

$$\frac{1}{2} \leq \frac{b}{a} \leq 1$$

$$\frac{1}{2} < \frac{b}{a} < 1 \Longrightarrow \frac{3}{5} \leq \frac{b}{a} \leq \frac{5}{6}$$

Et plus généralement, pour tout $k > 0$, on a :

$$\frac{2(k-1)+1}{3(k-1)+2} < \frac{b}{a} < \frac{4(k-1)+1}{5(k-1)+1} \Longrightarrow \frac{2k+1}{3k+2} \leq \frac{b}{a} \leq \frac{4k+1}{5k+1}$$

Remarque : Le couple (c,d) vérifie évidemment les mêmes propriétés car $\overline{R}^2$ envoie (a,b,c,d) sur $(-c,-d,a,b)$. Par contre, je n'ai pu conjecturé aucune propriété concernant le couple (a,c).

Je n'ai pas réussi à démontrer cette propriété qui a pourtant l'air simple a priori.
J'ai par contre identifié des suites de matrices qui permettent d'atteindre les valeurs $\frac{2k+1}{3k+2}$ (valeurs minimales) et les valeurs $\frac{4k+1}{5k+1}$ (valeurs maximales).
Commençons par les valeurs maximales. 1 est atteint par la matrice $\overline{S}^{-1}\overline{R}$, $\frac{5}{6}$ est atteint par la matrice $\overline{S}^{-1}\overline{RSSR}$ et de manière générale, $\frac{4k+1}{5k+1}$ $(k \geq 1)$ est atteint par la matrice $\overline{S}^{-1}\overline{RS}(\overline{SR})^k$. En faisant le calcul, on trouve :

$$\overline{S}^{-1}\overline{RS}(\overline{SR})^n = (-1)^{n+1} \begin{bmatrix} -4n+2 & -5n+1 & n & 3n+1 \\ (1-5n)/2 & -4n+2 & (3n+1)/2 & n \\ 23n-8 & 33n-13 & -10n-2 & -13n-3 \\ (33n-13)/2 & 23n-8 & (-13n-3)/2 & -10n-2 \end{bmatrix}$$

et donc $\overline{S}^{-1}\overline{RS}(\overline{SR})^n.(0,0,2,1) = (-1)^{n+1}(5n+1, 4n+1, -33n-7, -23n-5)$.
Pour les valeurs minimales, $\frac{1}{2}$ est atteint par la matrice $\overline{S}^{-1}\overline{R}^2$, $\frac{3}{5}$ est atteint par la matrice $\overline{SR}^3\overline{S}^{-1}\overline{R}^2$ et de manière générale, $\frac{2k+1}{3k+2}$ $(k \geq 1)$ est atteint par la matrice $\overline{SR}^3(\overline{S}^{-1}\overline{R}^3)^{k-1}\overline{S}^{-1}\overline{R}^2$. En faisant le calcul, on trouve :

$$\overline{SR}^3(\overline{S}^{-1}\overline{R}^3)^n\overline{S}^{-1}\overline{R}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -n-1 & -n-2 & -n-1 \\ (-n-1)/2 & 0 & (-n-1)/2 & -n-2 \\ -3n-2 & -3n-3 & -6n-8 & -9n-13 \\ (-3n-3)/2 & -3n-2 & (-9n-13)/2 & -6n-8 \end{bmatrix}$$

et donc $\overline{SR}^3(\overline{S}^{-1}\overline{R}^3)^n\overline{S}^{-1}\overline{R}^2.(0,0,2,1) = (-3n-5, -2n-3, -21n-29, -15n-21)$.
Ces calculs permettent d'infirmer une conjecture de P. Arnoux selon laquelle l'orbite du point serait à distance bornée d'un hyperplan. On dispose en effet de deux directions $(5,4,-33,-23)$ et $(-3,-2,-21,-15)$ vers lesquelles des points de l'orbite tendent en s'écartant de l'origine. En faisant quelques calculs supplémentaires on a : $\left(\overline{S}^{-1}\overline{R}^3\right)^n.(0,0,2,1) = (-n,-n,3n+2,2n+1)$ et $\left(\overline{SR}\right)^n.(0,0,2,1) = (-1)^{n+1}(-n,-n,-3n-2,-2n-1)$. On dispose donc de deux directions supplémentaires vers lesquelles des points de l'orbite tendent vers l'infini : $(-1,-1,3,2)$ et $(-1,-1,-3,-2)$. Or un simple calcul de déterminant montre que ces quatre directions sont libres. Ceci montre bien que les points de l'orbite ne peuvent être à distance bornée d'un hyperplan.

Point de vue arithmétique

D'un point de vue arithmétique, on peut essayer de calquer la méthode qui permet de démontrer que toutes les directions rationnelles ont un développement fini dans le cas de l'algorithme classique des fractions continues. Cette preuve utilise l'algorithme d'Euclide et montre que la suite des restes (qui sont des entiers) décroît strictement donc est nulle à partir d'un certain rang.
La proposition suivante montre qu'il existe une division euclidienne dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Proposition 2.8 *L'anneau* $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ *muni de la norme* $N(a+b\sqrt{2}) = |a^2-2b^2|$ *est euclidien.*

Preuve : On remarque tout d'abord que N est bien une norme car $N(a+b\sqrt{2}) = 0 \iff (a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2}) = 0 \iff a=b=0$. Il faut donc définir une division euclidienne sur $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
Soit p et q dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. On cherche v (le quotient) et r (le reste) tels que $p = qv + r$ et $N(r) < N(q)$.
On pose $\frac{p}{q} = a + b\sqrt{2}$ avec a et b dans $\mathbb{Q}$ et on considère x et y les entiers qui sont respectivement les plus proches des rationnels a et b. Alors, on a $v = x + y\sqrt{2}$ (et $r = p - qv$). En effet,

$$\begin{aligned}
N(r) &= N(p-qv) \\
&= N(q)N(p/q - v) \\
&= N(q)N(a+b\sqrt{2}-x-y\sqrt{2}) \\
&= N(q)\left((a-x)^2 - 2(b-y)^2\right) \\
&\leq N(q)(1/4 + 2*1/4) \\
&< N(q)
\end{aligned}$$

□

Remarque : On démontre de même que $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$, $\mathbb{Z}[i]$ et $\mathbb{Z}[\sqrt{2}i]$ sont euclidiens.

A partir de cette propriété, on peut tout d'abord se demander si l'équivalent de l'algorithme d'Euclide a un rapport avec l'algorithme que l'on a défini. D'après les calculs que j'ai fait, je n'ai trouvé aucun rapport entre les deux algorithmes. Il y a peu de chances qu'il y en ait car on sait que l'algorithme classique diminue la longueur OM si on part d'un point M de coordonnées $(a+b\sqrt{2}, c+d\sqrt{2})$. Or, le fait que $N(p+q\sqrt{2})$ diminue ne veut pas dire que le réel $|p+q\sqrt{2}|$ diminue.

J'ai également regardé si on n'avait pas directement une propriété de monotonie sur les normes : en partant du point $(0,0,2,1)$ et en appliquant successivement des matrices M_i, j'ai observé les valeurs $N(a+\sqrt{2}b)$ et $N(c+\sqrt{2}d)$ mais je n'ai pu conjecturer aucune propriété.

La question posée reste donc ouverte. Donnons quelques pistes pour poursuivre la recherche :

- A chaque direction μ-rationnelle correspond l'extrémité d'une géodésique fermée passant par l'origine (la plus courte), dont les coordonnées s'écrivent sous la forme $(a+b\sqrt{2}, c+d\sqrt{2})$. Peut-on caractériser ces quatre entiers (a,b,c,d) ?
- Peut-on comprendre l'un des cusps en fonction de l'autre ? En particulier, peut-on déduire l'une des orbites en fonction de l'autre ? Géométriquement, une des orbites correspond aux géodésiques qui passent par des milieux de côtés et l'autre par des sommets et on s'aperçoit qu'il y a une sorte de "Farey" qui permet d'obtenir, à l'intérieur d'un cône aux bords définis par des géodésiques passant par des milieux, la direction discriminante passant par des sommets (il suffit d'ajouter les deux vecteurs).
- Soit (a,b,c,d) l'extrémité d'une géodésique fermée. Peut-on donner un moyen simple pour savoir à quelle cusp elle appartient ?
- Quel rôle joue la conjugaison dans $Z[\sqrt{2}]$ (ou dans $Z[\mu]$) ?

Remerciements

Je tiens à remercier toute l'équipe de systèmes dynamiques qui a été très accueillante et particulièrement Pascal Hubert qui s'est toujours montré très disponible et a accepté de relire attentivement ce rapport.

Références

[Ar] ARNOUX, *Le codage du flot géodésique sur la surface modulaire*, L'enseignement mathématiques, Tome 40, fascicule 1-2 (1994).

[ArHu] ARNOUX, HUBERT, *Fractions continues sur les surfaces de Veech*, préprint n° 98-33, Institut de Mathématiques de Luminy (1998).

[Bea] BEARDON, *The geometry of discrete groups*, GTM 91, Springer Verlag (1982).

[BKS] BEDFORD, KEANE, SERIES, *Ergodic theory, symbolic dynamics and hyperbolic spaces*, Oxford Science Publications (1991).

[Bi] BILLINGSLEY, *Ergodic theory of information*, Wiley (1965).

[Bo] BOSMA, *Optimal continued fractions*, Indag. Math. A90 (1987), 353-379.

[CFS] CORNFEL, FOMIN, SINAI, *Ergodic theory*, Springer Verlag (1982).

[Fat] FATHI, *Systèmes dynamiques*, Cours de l'Ecole Polytechnique, Edition 1998.

[HW] HARDY, WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers*, cinquième édition, Oxford Science Publications (1979).

[Hur] HURWITZ, *Über eine besondere Art der Kettenbruchentwicklung reeller Grössen*, Acta Math. Ann., 39 (1891).

[Khi] KHINCHIN, *Continued fractions*, University of Chicago Press, Chicago (1964).

[Kra] KRAAIKAMP, *Metric and arithmetic results for continued fraction expansions*, thèse de l'université de Delft (1992).

[Lew] LEWIN, *Polylogarithms and associated functions*, North Holland (1981).

[Man] MAÑE, *Ergodic theory and differentiable dynamics*, Springer Verlag (1987).

[NZM] NIVEN, ZUCKERMAN, MONTGOMERY, *An introduction to the theory of numbers*, cinquième édition (1991), Wiley.

[Rie] RIEGER, *Mischung und Ergodizität bei Kettenbrüchen nach nächsten Ganzen*, J. reine angew. Math. 310, 171-181 (1979).

[Ros] ROSEN, *A class of continued fractions associated with certain properly discontinuous group*, Duke Math. J. 21, (1954), 549-563.

[Schm] SCMIDT, *Remarks on the Rosen λ-continued fractions*, à paraître.

[Schw] SCHWEIGER, *Ergodic theory of fibred systems and metric number theory*, Oxford Science Publications (1995).

[Ve] VEECH, *Teichmüller curves in moduli spaces, Eisenstein series, and an application to triangular billards*, Invent. Math. 97 (1989), 553-583.

Institut de Mathématiques de Luminy - Case 930 - 163 avenue de Luminy - 13288 Marseille cedex 09, France.
Tony.Lelievre@polytechnique.org