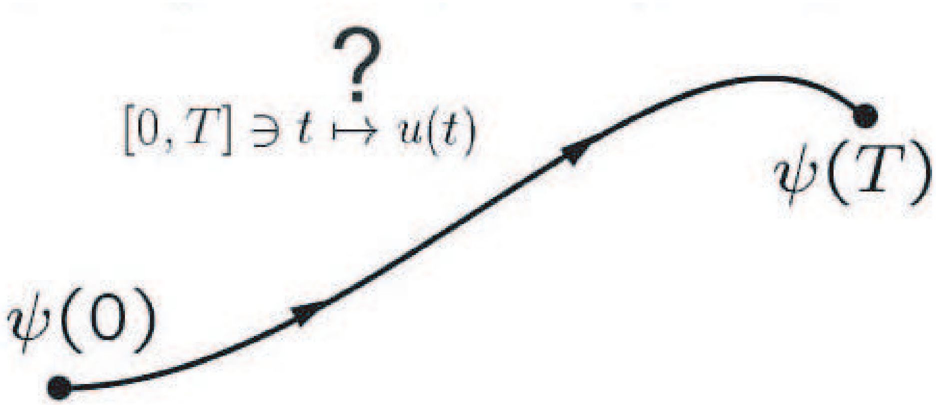
Contrôle et identification des systèmes quantiques

Mazyar Mirrahimi (*CAS ENSMP, Cermics ENPC*)
(C. Le Bris, P. Rouchon et G. Turinici)

February 1, 2005

Problème de contrôle

$$i\frac{d}{dt}\Psi = (H_0 + \epsilon(t)\ \mu)\Psi$$



$\Psi \in \mathcal{H}$: l'état du système,
H_0 l'Hamilitonian interne et μ le moment dipolaire sont des opérateurs Hermitiens sur $\mathcal{H}$.
$\epsilon(t)$: le contrôle.

Références

Contrôlabilité: (Sussmann-Jurdjevic 1972)(Ramakrishna et al. 1995): l'algèbre de Lie engendré par H_0/ι et μ/ι.

Planification des trajectoires:

Contrôle optimale: (C. Le Bris, Y. Maday, G. Turinici, O. Atabek, E. Cancès, H. Rabitz, ...)

Quantum learning control: (H. Rabitz, C. Le Bris, G. Turinici, ...)

"Feedback" en boucle ouvert:(H. Rabitz, W. Zhu, M. Pavon, P. Vettori, M. Sugawara, ...)

Contrôlabilité oscillateurs harmoniques:

Le système:

$$i\frac{d}{dt}\Psi = (H_0 + \epsilon(t)\mu)\Psi$$

Version EDP:

$$H_0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}x^2, \qquad \mu = -x$$

En terme d'opérateur: $a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \frac{\partial}{\partial x})$ et $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{\partial}{\partial x})$

$$H_0 = (a^\dagger a + \frac{1}{2})$$

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger)$$

$$[a, a^\dagger] = 1$$

Les relations de commutation:

$$
\begin{aligned}
[H_0, \mu] &= [a^\dagger a, a + a^\dagger] = a - a^\dagger \\
[H_0, a - a^\dagger] &= -(a + a^\dagger) \\
[a - a^\dagger, a + a^\dagger] &= 2
\end{aligned}
$$

Le système n'est pas contrôlable!

Partie contrôlable de dimension 2 (le théorème d'Ehrenfest):

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle a + a^\dagger \rangle &= \frac{1}{\iota}\langle a - a^\dagger \rangle \\
\frac{d}{dt}\langle a - a^\dagger \rangle &= \frac{1}{\iota}\langle a + a^\dagger \rangle - \frac{2u}{\iota}
\end{aligned}
$$

Partie non-contrôlable:

Transformation unitaire:

$$T(t) = \mathrm{exp}\left[\left\langle a^\dagger \right\rangle a - \langle a \rangle a^\dagger\right].$$

L'action sur $a \longrightarrow$ translation par la quantité $\langle a \rangle$ (Théorème de Glauber):

$$\begin{aligned} T(t)\ a\ T^\dagger(t) &= a + \langle a \rangle \\ T(t)\ a^\dagger\ T^\dagger(t) &= a^\dagger + \left\langle a^\dagger \right\rangle \end{aligned} \qquad (1)$$

Transformation: $\Phi = T(t)\ \Psi$

Partie non-contrôlable

Système transformé:

$$
\begin{aligned}
\iota \dot{\Phi} &= \left(T(a^\dagger a + \frac{1}{2})T^\dagger - \frac{1}{\sqrt{2}} u \; T(a + a^\dagger) T^\dagger \right) \Phi + \left(\iota \frac{dT}{dt} \right) T^\dagger \; \Phi \\
&= \left[a^\dagger a + \frac{1}{2} \right] \Phi + \left[\langle a \rangle \left\langle a^\dagger \right\rangle - \frac{u}{\sqrt{2}} (\langle a \rangle + \left\langle a^\dagger \right\rangle) \right] \Phi
\end{aligned}
$$

Quitte à un changement de phase globale:

$$
\iota \; \dot{\Phi} = \left[a^\dagger a + \frac{1}{2} \right] \Phi. \tag{2}
$$

Référence: M. Mirrahimi et P. Rouchon, Controllability of Quantum Harmonic Oscillators. IEEE Trans. Automatic Control : Vol 49, May 2004, p. 745-747.

Electrodynamique dans une cavité

Équation de Maxwell:

$$\frac{d^2}{dt^2}E = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}E + \frac{d}{dt}j \qquad \text{dans} \quad (0,T)\times\Omega$$

Quantification: $E(.,t) = \sum_n x_n(t)\phi_n$ avec $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi_n = \omega_n \phi_n$

$$\ddot{x}_n(t) = -c^2\ \omega_n\ x_n(t) - \mathsf{j}_n$$

$$\Rightarrow \quad H = \sum_n c\ \sqrt{\omega_n}\ (a_n^\dagger a_n + \frac{1}{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\ \mathsf{j}_n(a_n + a_n^\dagger)$$

Interprétation en terme de contrôle de résultat connu suivant:

Sources classiques $\longrightarrow$ état quasi-classiques (cohérents) du rayonnement voir CDG1, complément B_{III}, page 217.

Travaille en cours:

Coupler Le système avec des sources quantiques.

Modèle de Jaynes et Cumming: spin 1/2 + le mode résonnant du champ quantique avec une source cohérente de lumière comme contrôle.

$$H = \omega|e\rangle\langle e| + \omega_c\,(a^\dagger a + \frac{1}{2}) - \omega_R(a + a^\dagger)(|g\rangle\langle e| + |e\rangle\langle g|) - u(a + a^\dagger)$$

"Feedback" en boucle ouverte!

Le système:

$$i\frac{d}{dt}\Psi = (H_0 + \epsilon(t)\mu)\Psi$$

Condition initiale: $\Psi(t = 0) = \Psi_0$,

La cible: ϕ état propre de H_0 d'énergie λ.

Idée: On se prend pour Dieu en connaissant sans perturber $\Psi(t)$ et en modifiant en temps réel (feedback) le laser ϵ pour stabiliser $\Psi(t)$ vers ϕ quand $t \mapsto \infty$. Malheureusement, ce n'est possible qu'en simulation (pour l'instant...).

On simule le système en boucle fermée à partir de sa condition initiale pour en déduire un contrôle $t \mapsto \epsilon(t)$ en boucle ouverte ("pulse shaping").

Stabilisation par Lyapounov

But: Stabiliser le système autour de ϕ un état propre de H_0 d'énergie 0.

CLF: Control Lyapounov Function:

$$V(t, \Psi) = \frac{1}{2}\langle \Psi - \phi \mid \Psi - \phi \rangle.$$

Idée: faire décroître cette fonction de Lyapounov.

$$\frac{dV}{dt} = \epsilon(t)\ \Im(\langle \mu\Psi \mid \phi \rangle)$$

Loi de feedback: $\epsilon(t) = -\Im(\langle \mu\Psi \mid \phi \rangle)$.

Convergence:

Étude mathématique via le théorème d'invariance de LaSalle

$\longrightarrow$

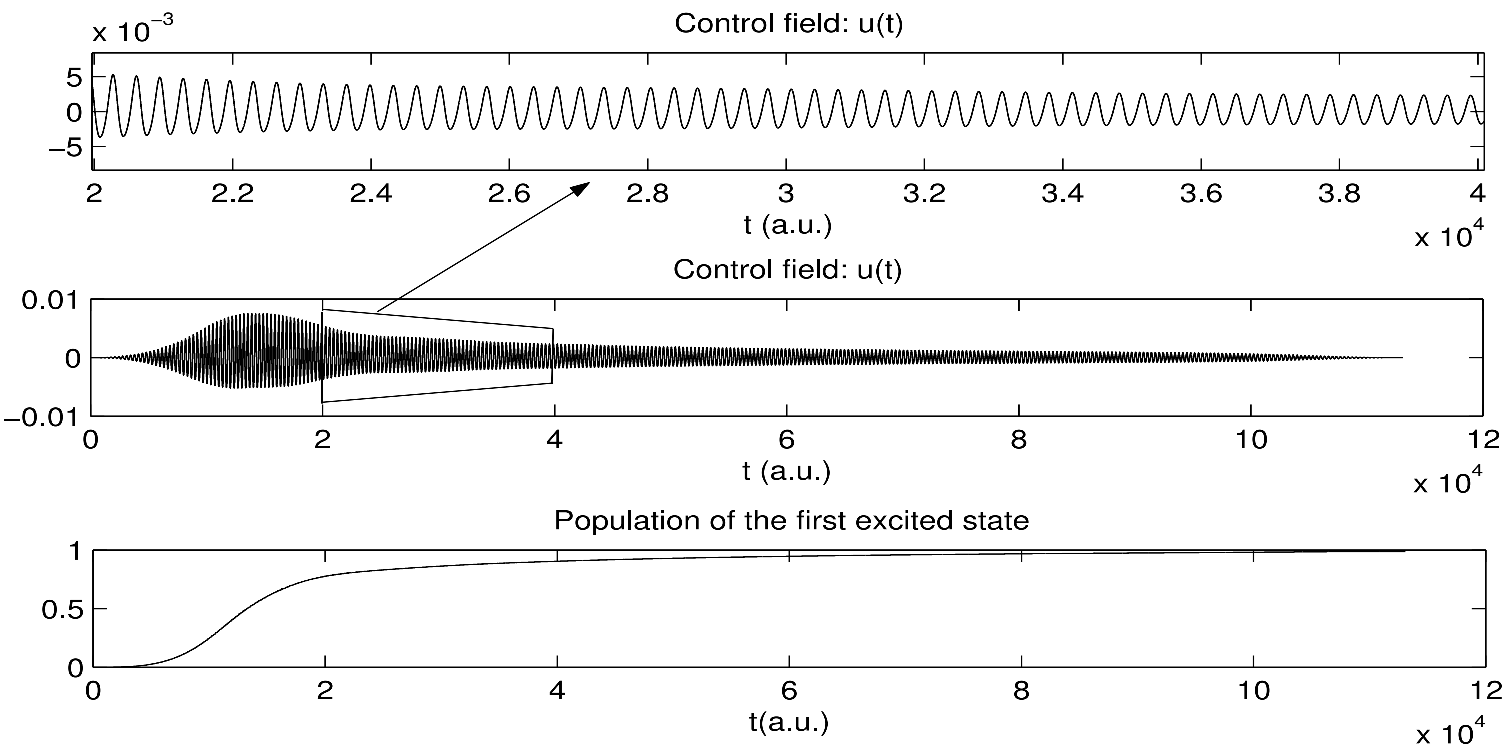
Contrôlabilité de linéaire tangent autour de la cible.

Références:

(M. Mirrahimi, P. Rouchon et G. Turinici) Lyapunov control of bilinear Schrödinger equation, Automatica: à apparaître.

(M. Mirrahimi, G. Turinici et P. Rouchon) Reference Trajectory Tracking for Locally Designed Coherent Quantum Controls, Journal of Physical Chemistry A: à paraître.

Un exemple: la liaison OH



Cas dégénéré

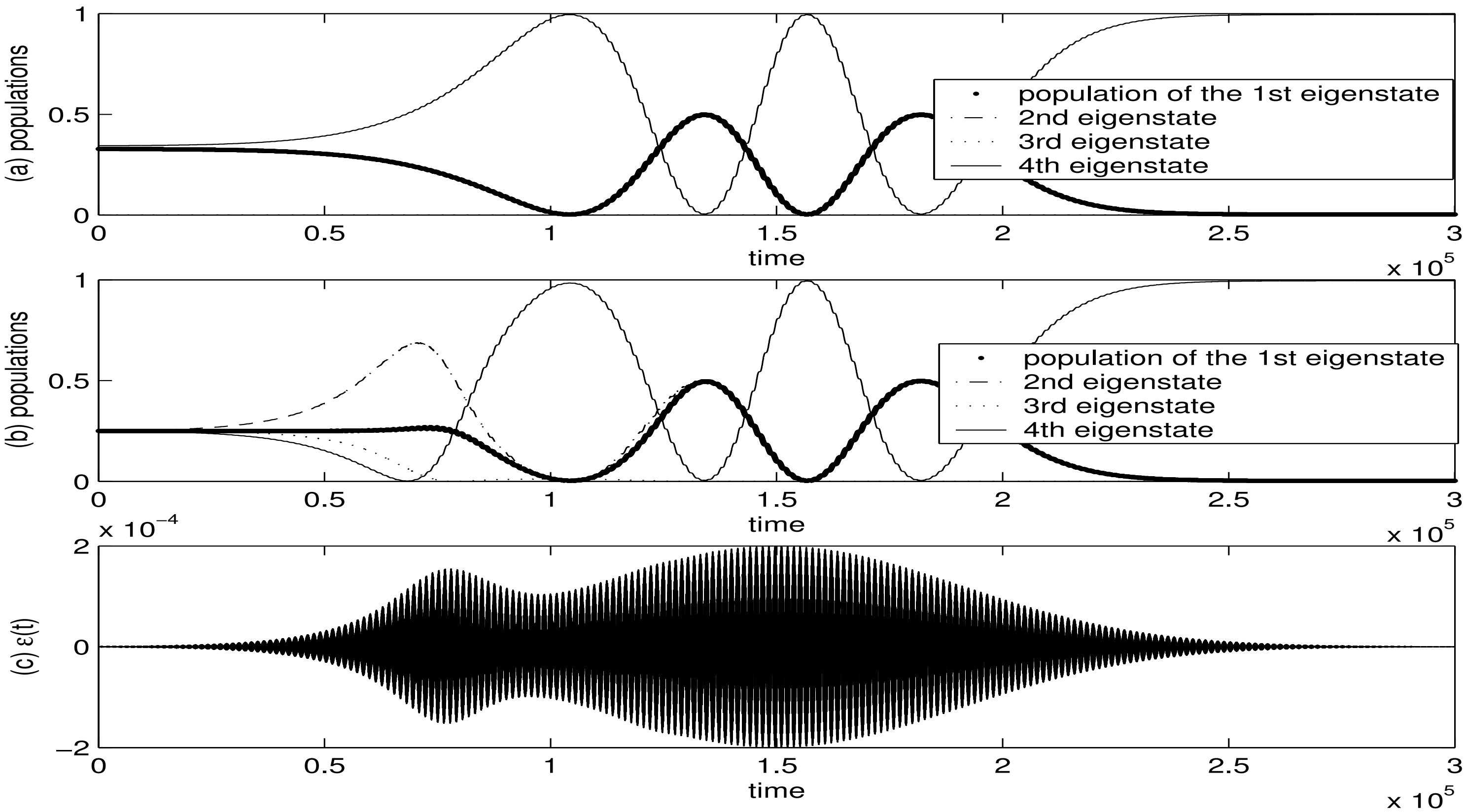
Idée: Viser une autre trajectoire passant par la cible.

$$V(t,\Psi) = \frac{1}{2}\langle \Psi - \Psi_r \mid \Psi - \Psi_r \rangle$$

avec $\Psi_r(T) = \phi$.

Exemple: Système à 4 états

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .004556 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.095683 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.095683 \end{pmatrix} \qquad \mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



(a) : les populations dans la trajectoire de référence $\Psi_r(t)$; (b): les populations dans la trajectoires su système $\Psi(t)$; (c): le contrôle.

Identification du système

$$
\begin{aligned}
i\frac{d}{dt}\Psi &= H_0\Psi + \epsilon(t)\mu\Psi \\
y(t) &= \langle\Psi|O|\Psi\rangle
\end{aligned}
$$

μ et H_0 partiellement inconnus.

problème: Connaissant $y(t)$ pour différents choix de contrôle $\epsilon(t)$, reconstruire les informations manquants sur le système.

Idée principale: trouver des champs de contrôle discriminants.

Travaux en cours

Identifiabilité: Fortement lié à la contrôlabilité du système. (travail en cours avec C. Le Bris, G. Turinici)

Identification (les méthodes numériques): optimal identification (OI). (travail en cours avec C. Le Bris, G. Turinici et H. Rabitz à la suite des travaux fait par JM. Geremia et H. Rabitz)

Prolongement: filtre de Kalman étendu.