

# Quelques résultats sur l'agrégation d'échelles de préférences individuelles

Gilbert Caplain<sup>1</sup>  
Rapport de Recherche CERMICS 91.2<sup>2</sup>

Septembre 1991

<sup>1</sup>CERMICS-ENPC. e-mail : [caplain@enpc.fr](mailto:caplain@enpc.fr)

<sup>2</sup>Cet article a été publié dans les *Cahiers du CERMA*, n°12, juin 1991.

## Abstract

What kind of procedures can we use to aggregate individual preference orderings in order to obtain a “collective preference” ordering? This is an important question in economic theory. The aim of this paper is twofold. First, we comment about the well-known Condorcet’s paradox and Arrow’s Impossibility Theorem. This theorem states the impossibility to obtain a “satisfactory” aggregation procedure meeting some requirement usually termed as “ordinal noncomparability”. Second, we derive some results which can be obtained under assumptions different from Arrow’s, especially under an “ordinal comparability” assumption. A probabilistic extension of these results is finally derived.

This paper provides a possibly new insight on some results already available in the literature.

## Résumé

Selon quelles procédures peut-on agréger des échelles de préférences individuelles pour obtenir une “préférence collective”? C’est une question importante d’économie théorique. L’objet de cet article est double. Tout d’abord, nous exposons et commentons le paradoxe de Condorcet et le célèbre théorème d’impossibilité d’Arrow. Ce théorème énonce l’impossibilité d’obtenir une procédure de choix collectif “satisfaisante” se conformant à une condition dite de “non comparabilité ordinale”. Ensuite, nous montrons certains résultats qui peuvent être obtenus sous des hypothèses différentes de celles d’Arrow, plus particulièrement une hypothèse de “comparabilité ordinale”. Nous donnons finalement une extension probabiliste de ces résultats.

Cet article fournit des aperçus peut-être originaux sur des résultats qui existaient déjà dans la littérature.

## 1 Introduction

Considérant un ensemble d'individus et un ensemble d'éventualités possibles soumises au choix de ces individus, il s'agit d'étudier des procédures permettant de dégager un *choix collectif* à partir des *choix individuels*. C'est ce que l'on appelle le problème de *l'agrégation des échelles de préférences individuelles*.

Dès le *XVIII<sup>e</sup>* siècle, Condorcet avait observé que les procédures électives de prise de décisions à la majorité des voix pouvaient donner lieu à certains paradoxes. En considérant ces paradoxes de manière approfondie, Arrow, dans son célèbre *théorème d'impossibilité* (1951), a démontré qu'il n'existe pas de procédure de choix collectif vérifiant à la fois un certain nombre de propriétés très générales et "raisonnables". C'est ce que nous allons examiner en premier lieu (§ 2 à 4).

Dans son théorème, Arrow se limite à des procédures *électives*, dans lesquelles seul est pris en compte l'ordre de préférence de chaque individu, et non une quelconque "intensité" de ces préférences. Sous des hypothèses moins restrictives, supposant notamment que l'on dispose d'*échelles numériques* de préférences individuelles permettant des comparaisons entre individus – dans un sens qui sera précisé –, alors il existe des procédures de choix collectif vérifiant des hypothèses "raisonnables". Nous caractériserons ces procédures (§ 5 et 6), puis nous étudierons ce que donne une *extension probabiliste* des échelles individuelles (§ 7).

## 2 Le paradoxe de Condorcet

Les procédures de décision à la majorité des voix peuvent donner certains résultats paradoxaux. La remarque en a été faite dès 1785 par le savant et philosophe Condorcet dans son essai “*Application de l’analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*”. Illustrons le paradoxe de Condorcet sur un exemple volontairement simple.

Soit une collectivité de 3 individus a,b,c ayant à effectuer un choix parmi 3 éventualités x,y,z. Supposons que les préférences individuelles s’établissent ainsi :

- a préfère x à y et préfère y à z.
- b préfère y à z et préfère z à x.
- c préfère z à x et préfère x à y.

Selon la règle majoritaire, la collectivité préfère x à y, car les 2 individus a et c préfèrent x à y. De même, la collectivité préfère y à z, par deux voix (a et b) contre une. On pourrait donc s’attendre que la collectivité, préférant x à y et y à z – toujours selon la règle majoritaire – préfère x à z. Or, sur notre exemple, z est préféré à x, par deux voix (b et c) contre une ! Tel est le paradoxe.

Pour être plus précis, nous admettons que les préférences individuelles présentent la propriété de *transitivité des préférences* qui s’exprime ainsi : si un individu préfère une éventualité x à une autre éventualité y, et s’il préfère y à une troisième éventualité z, alors nécessairement, il préfère x à z<sup>1</sup>. Ce que le paradoxe de Condorcet met en évidence, c’est que *la règle majoritaire n’assure pas la transitivité du choix collectif* bien que la transitivité des choix individuels soit supposée assurée. Nous reviendrons plus loin sur cette question de la transitivité ; il est cependant utile d’illustrer dès maintenant, sur notre exemple, la notion de *manipulabilité*, ou *dépendance de l’ordre des choix*, de la procédure.

Pour dégager un choix collectif parmi plusieurs éventualités, il est concevable de procéder par une succession de choix binaires : on présente deux de ces éventualités aux électeurs, puis celle des deux qui a leur préférence est confrontée à une troisième,... et ainsi de suite. Examinons ce que cela donne sur notre exemple.

Si nos trois électeurs choisissent entre x et y, ils préfèrent x, comme nous l’avons vu. La confrontation entre x et z aboutit alors à l’adoption de z.

Par contre, si le premier choix se fait entre y et z – y est alors préféré à z –, la confrontation entre y et x aboutit alors à l’adoption de x.

De même, il est possible de “forcer” l’adoption de y en commençant à soumettre x et z au choix de nos trois électeurs.

---

<sup>1</sup>Dans la littérature, on utilise parfois les termes *cohérence* et *rationalité* pour désigner la transitivité dans ce contexte. Ces termes paraissent fâcheux en raison de la connotation qu’ils risquent de revêtir : il paraît singulier de qualifier de *rationnelle* une procédure de choix collectif simplement parce qu’elle respecte la transitivité !

De sorte que, dans la procédure majoritaire, la décision finale peut dépendre de l'ordre des choix binaires successifs. Dans certaines situations, telles que celle de notre exemple, *c'est l'instance chargée de fixer l'ordre des choix binaires qui décide de l'issue de la procédure !* On voit aisément que ce phénomène fâcheux est rendu impossible si le choix collectif est transitif dans la procédure que l'on considère<sup>2</sup>. Nous reviendrons sur ce point.

Un exemple historique de ce phénomène de manipulabilité est évoqué dans [2] : l'adoption du 17<sup>e</sup> amendement à la constitution des Etats-Unis prévoyant l'élection des sénateurs au suffrage direct, a été retardée de dix ans par des manœuvres parlementaires exploitant une telle cyclicité : le paradoxe se manifesta entre l'option du statu quo et deux versions proposées pour l'amendement.

### 3 Le théorème d'impossibilité d'Arrow

En 1951, l'économiste K.J. Arrow a démontré un célèbre théorème concernant les procédures de choix collectif [1]. La démarche d'Arrow se présente ainsi : il a considéré un certain nombre de propriétés, jugées "raisonnables", puis il a entrepris de caractériser les procédures de choix collectif présentant toutes ces propriétés.

Il existe plusieurs versions, équivalentes à peu de choses près, de ce théorème. Celle qui est présentée ici est plus récente, et plus simple en ce qui concerne l'énoncé de certaines conditions, que la version originelle.

Introduisons quelques notations. Nous considérons une communauté  $S$  d'individus, indicés par  $i$ . (Dans tout ce qui suit,  $S$  est fini, et contient au moins 3 individus.)  $x$  et  $y$  étant deux éventualités, nous notons :

$x P_i y$  si  $i$  préfère  $x$  à  $y$  .

$x I_i y$  si  $i$  est indifférent entre  $x$  et  $y$  .

$x R_i y$  si  $x P_i y$  ou  $x I_i y$  .

Nous supposons que la relation  $R_i$  est un *préordre complet*,  $I_i$  représentant l'équivalence dans ce préordre. Les propriétés de préordre complet se traduisent ainsi :

**Propriétés**  $T(P, I)$ . Pour toutes éventualités  $x$  et  $y$  , nous avons :

-  $x P y$  ou  $y P x$  ou  $x I y$  (ou exclusif).

---

<sup>2</sup>Un phénomène analogue à la manipulabilité apparaît aussi dans un contexte assez différent : l'organisation de tournois dans des jeux binaires (échecs ou tennis, par exemple). On sait que la probabilité, pour un compétiteur, d'être vainqueur final du tournoi, peut dépendre de la succession des rencontres adoptée, c'est-à-dire de l'*arbre binaire* représentant le tournoi. Cette dépendance reflète un phénomène lointainement analogue à la non-transitivité en théorie du choix. D'où l'exigence que la formation des paires, dans un tournoi, dépende d'un tirage au sort.

- $x P y$  et  $y P z$  implique  $x P z$  (transitivité de  $P$ ).
- $x I y$  et  $y I z$  implique  $x I z$  (transitivité de  $I$ ).
- $x I x$  (réflexivité de  $I$ ).
- A partir de ces propriétés, on montre aisément :*
- $x I y$  implique  $y I x$  (symétrie de  $I$ )
- $x I y$  et  $y P z$  implique  $x P z$  ; de même,  $x P y$  et  $y I z$  implique  $x P z$  .

Supposant que les préférences individuelles  $(P_i, I_i)$  vérifient les propriétés  $T(P_i, I_i)$ , nous cherchons à définir une **procédure de choix collectif** qui agrège ces préférences individuelles pour obtenir ce que nous appellerons une **préférence collective**  $(P, I)$ .

Dans la démarche d'Arrow, nous nous interdisons de prendre en compte une éventuelle *intensité* des préférences individuelles : nous souhaitons que les relations  $P$  et  $I$  se déduisent uniquement des relations  $P_i$  et  $I_i$ . Nous reviendrons plus loin sur cette restriction importante.

Cela étant dit, nous souhaitons (plus exactement, Arrow souhaite) que la procédure d'agrégation cherchée vérifie cinq propriétés que nous allons donner maintenant.

**Propriété A1. Universalité.** L'ensemble  $E$  des éventualités ouvertes au choix contient au moins 3 éléments. Par ailleurs, la procédure donne une préférence collective à partir de tout état des préférences individuelles  $(P_i, I_i)$ .

*Commentaire.* En somme, la procédure doit pouvoir traiter toutes les configurations imaginables de préférences des individus. Remarquons cependant que, à ce point, la "préférence collective" recherchée a encore le droit d'être l'indifférence totale ( $x I y$  pour tous  $x$  et  $y$  de  $E$ ) !

**Propriété A2. Unanimité.** Si tous les individus de  $S$  préfèrent strictement une éventualité  $x$  à une autre  $y$ , alors  $x P y$ . Autrement dit, une préférence unanime implique une préférence collective.

**Propriété A3. Indépendance à l'égard des choix extérieurs.** (*independence of irrelevant alternatives.* C'est l'axiome de Luce (1957) bien connu.) La relation de préférence collective entre deux éventualités quelconques  $x$  et  $y$  dépend seulement des préférences individuelles entre ces deux éventualités, et non pas des relations de préférences individuelles portant sur une quelconque troisième éventualité.

**Propriété A4. Préordre complet.** La préférence collective  $(P, I)$  satisfait aux propriétés  $T(P, I)$  : c'est un préordre complet.

L'introduction de la propriété A5 nécessite une définition. Si, dans une procédure, il existe un individu  $i$  tel que :

Pour tous  $x$  et  $y$  de  $E$ ,  $x P_i y$  implique  $x P y$ ,  
alors  $i$  est appelé un **dictateur** pour la procédure.

**Propriété A5. Absence de dictateur.** La procédure de choix collectif ne comporte pas de dictateur.

Nous pouvons maintenant énoncer le :

**Théorème d'impossibilité d'Arrow.** *Il n'existe pas de procédure de choix collectif satisfaisant à la fois aux cinq propriétés A1 à A5. Autrement dit : Toute procédure de choix collectif satisfaisant aux propriétés A1 à A4 comporte un dictateur.*

*Démonstration :* Nous allons considérer une procédure de choix collectif satisfaisant aux propriétés A1 à A4, et démontrer qu'une telle procédure comporte nécessairement un dictateur.

Soit  $V$  un ensemble d'individus de la collectivité  $S$  considérée ; soient  $x$  et  $y$  deux éventualités de  $E$ . On dit que  $V$  est *déterminant pour  $x$  contre  $y$* , dans la procédure de choix collectif considérée, si les préférences individuelles :

$$x P_i y \text{ pour } i \in V$$

$$y P_i x \text{ sinon}$$

entraînent la préférence collective  $x P y$ .

Selon la propriété A2 d'unanimité, l'ensemble vide n'est déterminant pour aucune alternative et  $S$  est déterminant pour toute alternative.  $S$  étant fini, parmi les sous-ensembles de  $S$  déterminants pour quelque alternative, il en existe au moins un, nécessairement non vide, d'effectif minimal : soit  $V_0$ . Soient  $x$  et  $y$  deux éventualités telles que  $V_0$  soit déterminant pour  $x$  contre  $y$ .

Nous allons d'abord démontrer que  $V_0$  a un seul élément.  $V_0$  n'étant pas vide, renumérotions éventuellement les individus de  $S$  de manière que l'individu 1 soit dans  $V_0$ . Notons  $V_2 = V_0 - \{1\}$  et  $V_3 = S - V_0$ . Soit  $z$  une éventualité autre que  $x$  et  $y$ .  $z$  existe selon la propriété A1. Soit l'état des préférences suivant :

$$x P_1 y P_1 z$$

$$z P_i x P_i y \text{ pour } i \in V_2$$

$$y P_j z P_j x \text{ pour } j \in V_3$$

Selon les propriétés A1 et A3, de cet état résulte une préférence collective  $(P, I)$  entre les 3 éventualités  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

On remarque que  $x P_i y$  pour  $i \in V_0$  et  $y P_i x$  pour  $i \in V_3$ . Donc, par définition de  $V_0$ ,  $x P y$ .

On remarque aussi que  $z P_i y$  pour  $i \in V_2$  et  $y P_j z$  pour  $j \in S - V_2$ . Si nous avions  $z P y$ , alors  $V_2$  serait déterminant pour  $z$  contre  $y$ ; or  $V_2$  a un élément de moins que  $V_0$  et  $V_0$  est d'effectif minimal parmi les ensembles déterminants.

Par conséquent,  $y P z$  ou  $y I z$ . Comme  $x P y$ , nous avons, selon la propriété A4 de préordre,  $x P z$ . Or,  $x P_1 z$  et  $z P_i x$  pour tout  $i \neq 1$ .  $\{1\}$  est donc déterminant pour  $x$  contre  $z$ . Or  $V_0$  est d'effectif minimal parmi les ensembles déterminants, et contient 1. Il en résulte que  $V_2$  est vide :  $V_2 = \{1\}$ .

Nous avons donc démontré qu'il existe un individu de  $S$ , ici numéroté 1, et une éventualité  $x$  de  $E$ , tels que cet individu soit déterminant pour  $x$  contre, en fait, toute autre éventualité ( $z$ , ci-dessus). Il nous reste à démontrer que  $\{1\}$  est déterminant pour toute éventualité contre toute autre, et est ainsi un dictateur au sens d'Arrow.

Soient  $y$  et  $z$  deux éventualités distinctes, et différentes de  $x$ .

Soit l'état des préférences suivant :

$y P_1 x P_1 z$  et, pour les autres individus  $j$  :  $z P_j y P_j x$ .

$x P_1 z$  et  $z P_j x$  donc,  $\{1\}$  étant déterminant pour  $x$ ,  $x P z$ . Tout le monde préfère  $y$  à  $x$  donc (propriété A2)  $y P x$ . Par conséquent, par transitivité,  $y P z$ . Cette préférence ne dépend pas de la présence de  $x$ , selon la propriété A3. Donc  $\{1\}$  est déterminant pour  $y$  contre  $z$ .

Soit enfin l'état des préférences :

$y P_1 z P_1 x$  et, pour les autres individus  $j$  :  $z P_j x P_j y$ .

$y P_1 z$  donc, selon ce qui précède,  $y P z$ . Tout le monde préfère  $z$  à  $x$  donc  $z P x$ . Par conséquent, par transitivité,  $y P x$ .  $\{1\}$  est donc bien déterminant, pour toute éventualité, contre  $x$ .

1 est donc bien un dictateur au sens d'Arrow, ce qui termine la démonstration du théorème.

## 4 Quelques commentaires sur les hypothèses du théorème d'Arrow

Un tel résultat, à la fois décevant et indiscutable, invite naturellement à examiner les hypothèses du théorème. Est-il possible d'atténuer l'une ou l'autre de ces propriétés, sans sortir (ou sans trop sortir) du domaine jugé "raisonnable" ?

La propriété A2 d'unanimité et la propriété A5 d'absence de dictateur paraissent difficilement critiquables et peu susceptibles d'être affaiblies. Nous allons examiner les propriétés A3, A1 et A4 dans cet ordre.

### L'indépendance à l'égard des choix extérieurs

Il est aisé d'observer que, si cette propriété est levée, cela peut entraîner des paradoxes bizarres dans le genre suivant : il arrivera que, deux éventualités  $x$  et  $y$  étant soumises au choix des individus, il se dégage une préférence collective  $x P y$ , et que la survenue d'une troisième éventualité  $z$  renverse cette préférence



en y  $P$  x sans que la préférence de chaque individu entre x et y se soit modifiée entretemps.

Ces bizarreries paraissent justifier pleinement le maintien de cette exigence. En outre, remarquons que l'adoption de cette condition réduit la quantité d'informations nécessaire à l'établissement d'un choix collectif, ce qui constitue un avantage de commodité en sus de son caractère évidemment "raisonnable".

Mentionnons, avant de poursuivre, qu'une technique de vote fréquemment utilisée dans des sondages, le vote par ordre dans une liste, viole ce principe d'indépendance. Ce mode de scrutin se présente *par exemple* ainsi : parmi trois options ou plus, chaque individu attribue trois points à son option préférée, deux points à l'option qui vient ensuite dans ses préférences, un point à la troisième et zéro point aux autres. On totalise les points obtenus ; l'ordre de préférence collective est alors donné par les sommes obtenues. Il est facile de voir que cette procédure transgresse la propriété A3 . (Voir [2] pour plus de détails.)

### L'universalité de la procédure

On peut estimer que l'exigence de portée universelle (propriété A1) est trop restrictive. Dans certaines situations, chaque type de classement envisageable n'est pas toujours plausible : on peut par exemple observer des situations de choix dans lesquelles des systèmes de valeurs largement reconnus dans la collectivité considérée imposent des restrictions de fait aux choix qui peuvent apparaître. Malheureusement, dans le problème ici abordé par Arrow, il ne s'agit pas seulement de trouver des procédures de choix collectif fonctionnant dans des situations de consensus ou de quasi-consensus, ce qui ne serait pas bien difficile ! Il s'agit aussi, et surtout, d'élaborer des procédures capables de fonctionner dans des situations où existent de larges dissensions dans la population considérée.

Une tentative a été faite pour examiner ce que donne une restriction envisageable : l'*unicité du critère de choix*, proposée par Duncan Black.

L'unicité du critère de choix correspond à l'hypothèse suivante : il est possible de ranger les éventualités proposées sur une échelle, de telle sorte qu'aucun individu de la collectivité considérée ne classe jamais une éventualité au-dessous, à la fois, de celle qui se trouve à sa gauche, et de celle qui se trouve à sa droite, sur l'échelle. Donnons un exemple : celui d'un éventail politique gauche-droite, avec 3 éventualités : g(auche), c(entre) et d(roite). L'hypothèse d'unicité du critère de choix, ce critère correspondant ici à l'éventail gauche-droite, se traduira par la supposition suivante (en se limitant ici aux préférences strictes) : les électeurs pourront présenter les préférences suivantes :

$g P c P d$  (électeurs "de gauche")

$d P c P g$  (électeurs "de droite")

$c P d P g$  ou  $c P g P d$  (électeurs "centristes")

, mais pas les préférences suivantes :

g P d P c ni d P g P c

qui placeraient le centre après, à la fois, la gauche et la droite.

Moyennant cette restriction à l'universalité, Black a démontré que la règle majoritaire classique vérifie la propriété A1 ainsi restreinte, et les propriétés A2 à A5, dès lors que le nombre d'individus est impair ([1], p.144).

Malheureusement, cette restriction paraît extrême : les électeurs, dans la plupart des situations réelles, ne classent certainement pas les options qui se présentent à eux en fonction d'un critère unique...

### La propriété de préordre complet

Des tentatives intéressantes ont été faites pour alléger (sans la supprimer tout à fait !) la condition de transitivité.

Parmi les propriétés ici notées  $T(P, I)$  (§ 3), la transitivité de la relation d'indifférence  $I$ , dans les préférences individuelles, est très sujette à critiques, car des études expérimentales de psychologie ont montré que l'indifférence exprimée par les individus est parfois intransitive [2]. Il peut arriver qu'un individu exprimant son indifférence entre  $x$  et  $y$ , ainsi qu'entre  $y$  et  $z$ , préfère cependant  $x$  à  $z$ . Par exemple, cela pourra se produire lorsque certaines options sont "trop proches" les unes des autres, dans un certain sens, pour être distinguées. Il serait dès lors singulier d'exiger de la préférence collective une propriété de  $I$ -transitivité qui ne serait peut-être déjà pas présente dans les préférences individuelles !

Si la  $I$ -transitivité paraît contestable dans la pratique, en revanche la  $P$ -transitivité (la transitivité de la préférence stricte) semble bien s'imposer. Une exigence un peu plus forte que la  $P$ -transitivité, le **semi-ordre**, a été examinée par Duncan Luce. Le semi-ordre correspond à une situation où la non-transitivité de l'indifférence a pour seule origine un *effet de seuil de perception* entre options "proches". Malheureusement, lorsque l'on remplace la propriété A4 du théorème d'Arrow par cette nouvelle condition de semi-ordre, cela ne lève pas l'impossibilité. En somme l'introduction, dans cette propriété A4 de préordre, d'un seuil de perception, était séduisante, mais n'arrange rien.

On peut donc se limiter à exiger la  $P$ -transitivité de la préférence collective, en autorisant une non-transitivité de la relation d'indifférence qui ait d'autres causes qu'un effet de seuil et d'approximation. La relation  $R$  de préférence-ou-indifférence cesse alors d'être un préordre complet, pour devenir un préordre partiel.

Une telle limitation d'exigence semble d'ailleurs philosophiquement satisfaisante : nous concevons bien qu'il puisse exister, dans la nature, des formes d'avantages ou d'inconvénients suffisamment diverses pour que cela n'ait pas de sens de prétendre les comparer ; le caractère partiel du préordre de préférence permet de prendre en compte ce phénomène.

Remarquons que la  $P$ -transitivité suffit à assurer la non-manipulabilité, ou indépendance de l'ordre des choix (§ 2).

Qu'obtenons-nous comme procédures possibles lorsque nous levons, dans la propriété de préordre, l'exigence de  $I$ -transitivité, conservant seulement la  $P$ -transitivité ? A. Gibbard a prouvé que, pour chaque système de préférence collective  $P$ -transitif obéissant aux autres conditions d'Arrow, il existe un groupe d'individus, qu'il a appelé **oligarchie**, tel que :

- toute préférence unanime et stricte de l'oligarchie est préférence collective ;
- pour chaque membre de l'oligarchie, soit  $i$ , une préférence stricte  $x P_i y$  rend impossible la préférence collective  $y P x$  (droit de veto).

Dans le cas où l'oligarchie comporte un seul membre, celui-ci est un dictateur au sens d'Arrow. A l'opposé, si l'"oligarchie" au sens de Gibbard contient tous les individus (ce n'est alors plus une oligarchie au sens habituel !), nous aboutissons à la règle du consensus, dans laquelle il y a indifférence collective dès lors que deux individus ont des préférences opposées. Plus l'oligarchie est nombreuse, moins la procédure correspondante est inégalitaire, mais plus rarement elle aboutit à une décision. En somme, selon le théorème de Gibbard, la  $P$ -transitivité, condition manifestement raisonnable, condamne à l'indécision ou à l'inégalité[2].

Le théorème d'Arrow et ses aménagements ultérieurs, que nous avons évoqués ici (d'autres possibilités sont explorées dans [2]) mettent en lumière les très lourdes contraintes théoriques qui pèsent sur les règles électorales. Il n'est pas possible de concilier trois objectifs jugés naturels : la transitivité de la préférence collective stricte, la possibilité d'aboutir effectivement à des décisions, et un certain degré d'égalité des pouvoirs des individus.

## 5 A propos de l'intensité des préférences

Il existe une autre limitation à la portée du résultat d'Arrow, une limitation plus fondamentale que celles que nous venons d'examiner. Dans sa démarche, Arrow s'interdit de prendre en compte une "intensité" des préférences individuelles. Lorsqu'une éventualité  $x$  est préférée, par un individu  $i$ , à une éventualité  $y$ , nous ne cherchons pas à savoir si  $i$  préfère *fortement* ou *légèrement*  $x$  à  $y$ .

Par ailleurs, et corrélativement, Arrow s'interdit également de considérer des *comparaisons interpersonnelles d'utilité*. Cela signifie que l'on s'interdit des énoncés tels que : "*L'éventualité  $x$  est préférable pour l'individu  $i$  à l'éventualité  $y$  pour l'individu  $j$* ", soit que de tels énoncés n'aient pas de sens, soit que, ayant un sens, ils ne puissent cependant pas être vérifiés dans la pratique.

Sous cette hypothèse restrictive, il n'est pas possible d'ordonner tous les niveaux de préférence de *tous* les individus pour toutes les éventualités soumises

au choix, de manière pertinente, sur une échelle numérique par exemple. Il n'est alors pas pertinent, toujours sous cette hypothèse, d'envisager une *fonction d'utilité collective* qui serait obtenue comme une fonction croissante (par exemple la somme...) des niveaux numériques de préférences individuelles. Nous y reviendrons.

Ces limitations ainsi imposées par Arrow dans sa démarche se comprennent bien pour diverses raisons :

- Le problème a été soulevé, depuis Condorcet, à propos de scrutins : de procédures dans lesquelles les votants ne sont invités à transmettre que l'ordre de leurs préférences, non une *intensité* de celles-ci.
- L'utilisation d'intensités de préférences pose un problème de *stratégie* si celles-ci sont fournies par les individus eux-mêmes : il faudrait imaginer une procédure telle que chaque "votant" soit incité à transmettre ses véritables intensités de préférences, c'est-à-dire telle que le mensonge sur ces intensités ne puisse pas bénéficier au menteur. C'est là un très vaste et délicat sujet de théorie des jeux, dans lequel nous n'entrerons pas ici.
- Surtout, que signifie au juste une "intensité de préférence" ? L'appareil à mesurer les niveaux de préférence n'a pas (encore) été inventé...! si tant est, d'ailleurs, que de tels niveaux existent, ce qui ne peut déjà pas être exact dans l'hypothèse précédemment évoquée où la relation d'indifférence ne serait pas transitive.

Il importe pourtant de comprendre que cette limitation imposée par Arrow aux procédures qu'il envisageait, pour réaliste qu'elle soit en raison de limitations pratiques, est très restrictive et même draconienne. Il paraît intuitivement clair, en effet, qu'une procédure "judicieuse" de choix collectif doit prendre en compte, de quelque manière, des différences entre niveaux de préférences de chaque individu et(ou) des comparaisons interpersonnelles.

Si l'on suppose maintenant l'existence d'échelles numériques de préférences individuelles permettant des comparaisons interpersonnelles, alors il est théoriquement possible de contourner l'impossibilité mise en évidence par Arrow. C'est ce que nous allons examiner dans la suite de l'article.

Auparavant, il nous faut mieux préciser les diverses hypothèses qui peuvent être envisagées en ce qui concerne les échelles numériques de préférences individuelles et la mesure dans laquelle elles peuvent être comparées. Nous nous inspirons de [8].

Nous considérons donc, comme précédemment, une population  $S$  de  $n$  individus ( $n \geq 3$ ), et nous supposons que nous pouvons définir, pour chaque individu, une *échelle numérique de préférences*, c'est-à-dire une application monotone de l'ensemble  $E$  des éventualités susceptibles d'être soumises à son choix,

muni du préordre (ici supposé *complet*) de ses préférences, dans l'ensemble  $R$  des réels, muni de son ordre habituel  $\geq$ .

Une échelle numérique de préférences d'un individu peut être *ordinaire* lorsqu'elle est utilisée seulement pour refléter l'ordre de ces préférences sur l'ordre dans les réels : dans ce cas, toute composition de cette échelle avec une fonction croissante (strictement) de  $R$  dans  $R$  reflète le même ordre. Cette échelle peut par contre être *cardinale* lorsqu'elle prétend apporter aussi une information sur les intensités comparées des préférences de l'individu, dans un sens à préciser. Le point important ici, pour nous, est de remarquer que la composition d'une échelle cardinale avec une fonction croissante de  $R$  dans  $R$  ne redonnera la même échelle cardinale que si cette fonction est de plus *affine*.

Considérant maintenant plusieurs individus, les échelles de préférences définies pour ces individus seront supposées *comparables* s'il est jugé pertinent de comparer des niveaux figurant sur les échelles d'individus différents ; elles seront *non comparables* dans le cas inverse.

Nous sommes donc conduits à quatre combinaisons, quatre hypothèses possibles, concernant *les informations que nous supposons détenir* sur les préférences individuelles, et par conséquent les *propriétés d'invariance* que nous exigeons pour les procédures de choix collectif que nous souhaitons obtenir. L'idée importante, et naturelle, est la suivante : *ces procédures que nous recherchons ne doivent pas dépendre essentiellement de la représentation des échelles choisie, parmi des représentations équivalentes, c'est-à-dire reflétant en fait la même situation réelle*. Les quatre possibilités se présentent ainsi :

**La non-comparabilité ordinaire.** C'est la possibilité minimale en quantité d'information jugée pertinente. On ne connaît que l'ordre des préférences de chaque individu, et on s'interdit des comparaisons entre individus. Autrement dit, il sera demandé à la procédure recherchée d'être *invariante par composition des échelles numériques de préférences individuelles avec des applications croissantes sur  $R$ , éventuellement distinctes pour les différents individus*. Il est aisé de voir qu'il s'agit de l'hypothèse choisie par Arrow. Son théorème montre donc qu'il n'existe pas de procédure de choix collectif (satisfaisante au sens des propriétés que nous avons vues) dans cette hypothèse minimale.

**La non-comparabilité cardinale.** On considère que chaque individu mesure des "intensités" de préférences, dans un certain sens, mais on s'interdit toujours de considérer des comparaisons entre ces intensités pour des individus différents. Il sera alors demandé à la procédure collective recherchée d'être invariante par composition des échelles avec des applications affines de  $R$  dans  $R$ , éventuellement distinctes pour les différents individus. Sen ([9] cité dans [8]) a prouvé, là encore, l'inexistence d'une procédure collective "satisfaisante" au sens d'Arrow. *C'est donc la non-comparabilité, plus que le caractère ordinal, qui exclut les procédures collectives que l'on recherche.*

**La comparabilité cardinale.** C'est l'hypothèse la plus forte, en quantité d'information supposée disponible. Les échelles de préférences individuelles correspondent à des intensités, dans un sens à préciser, et l'on suppose que ces intensités peuvent être comparées pour des individus différents. Autrement dit, il sera demandé à la procédure recherchée d'être invariante par composition des échelles avec la même application affine. Sous cette hypothèse forte, il est simple de trouver des procédures de choix collectif obéissant à nos propriétés : par exemple, le préordre correspondant à la *somme* des niveaux individuels, préordre dit **utilitariste**, d'après Bentham, ou J.S. Mill (voir [3], par exemple). Plus généralement, les procédures existantes dans ce cas correspondent aux *sommes pondérées* des niveaux individuels, avec poids positifs. (Les poids seront égaux si l'on exige, de plus, une condition de symétrie, autrement dit d'égalité). On comprend bien ici qu'une telle procédure utilitariste n'a pas de sens si l'on ne fait pas une hypothèse de cardinalité.

**La comparabilité ordinale.** L'hypothèse de comparabilité cardinale paraissant bien exigeante, il est tentant de l'affaiblir, en conservant la comparabilité – nécessaire, nous l'avons évoqué, pour qu'une procédure de choix collectif satisfaisante puisse exister – et en supposant que les échelles de préférences individuelles sont seulement ordinales. Autrement dit, nous demanderons à la procédure recherchée d'être invariante par composition des échelles de préférences individuelles avec une même application croissante de  $R$  dans  $R$ . Nous allons établir un théorème de caractérisation des procédures de choix collectif dans cette hypothèse de comparabilité ordinale.

## 6 L'agrégation d'échelles ordinales comparables

Nous nous plaçons donc dans l'hypothèse de *comparabilité ordinale* qui vient d'être mentionnée. Nous allons caractériser, sous cette hypothèse, les préordres de choix collectif satisfaisant à un certain nombre de propriétés "raisonnables" que nous allons formuler tout d'abord. Nous allons trouver que ces préordres se mettent sous une forme *additive*, présentant ainsi une ressemblance inattendue avec les préordres utilitaristes que nous avons évoqués<sup>3</sup>.

Enonçons d'abord les propriétés que nous exigeons. Certaines d'entre elles sont analogues à des propriétés d'Arrow ; d'autres sont assez différentes.

**Propriété 1. Universalité.** L'ensemble  $E$  des éventualités ouvertes au choix peut contenir un nombre arbitraire d'éléments ; par ailleurs, quels que soient les niveaux de préférences individuelles associés par les  $n$  individus aux diverses

---

<sup>3</sup>Le résultat démontré ici n'est pas original : il s'agit d'une redécouverte par l'auteur. En fait, il se déduit à peu près immédiatement d'un résultat de Debreu [4], dans lequel celui-ci utilise un argument topologique de Thomsen et Blaschke (des références sont données dans [4]). Toutefois, il semble bien que la démonstration présentée ici soit différente de celle de Debreu, et plus simple. Par ailleurs, la *présentation* ici développée, notamment du *principe de partition*, semblerait intéressante et, peut-être, originale.

éventualités, c'est-à-dire les vecteurs images de ces éventualités dans  $R^n$ , la procédure donne un préordre de préférence collective entre ces vecteurs.

*Commentaire.* En somme, comme précédemment pour le théorème d'Arrow, la procédure doit pouvoir traiter toutes les configurations imaginables de préférences des individus, quelles que soient les valeurs réelles atteintes sur les échelles numériques de préférences individuelles.

**Propriété 2. Indépendance à l'égard des choix extérieurs.** *Analogue à la propriété utilisée par Arrow (§ 3).* La relation de préférence collective entre deux éventualités quelconques  $x$  et  $y$  dépend seulement des préférences individuelles entre ces deux éventualités (s'exprimant sur les échelles numériques de préférences individuelles), et non pas des niveaux de préférences portant sur une quelconque troisième éventualité.

**Propriété 3. Préordre complet.** La préférence collective est un préordre complet.

*Conséquence de ces trois propriétés.* La procédure de choix collectif que nous recherchons se traduira par un *préordre complet sur  $R^n$*  ; autrement dit, par une application de  $R^n$  dans un ensemble totalement ordonné  $J$  (dont nous ne savons pas encore si c'est  $R$ ), qui *représentera* ce préordre. Considérant un certain ensemble  $E$  d'éventualités, et l'image de  $E$  dans  $R^n$  par l'application produit des échelles individuelles – c'est-à-dire, pour chaque éventualité élément de  $E$ , le vecteur de  $R^n$  des niveaux attribués par les  $n$  individus à cette éventualité –, la procédure correspondra à une *optimisation sous contraintes* : parmi les vecteurs de  $R^n$  images de  $E$ , formant le *domaine admissible*, on cherchera un vecteur optimal pour le préordre, c'est-à-dire d'image maximale dans  $J$ . (Bien entendu, un tel optimum n'existera pas nécessairement, lorsque  $E$  sera infini.)

**Propriété 4 ou principe de partition.** Soit une partition de l'ensemble  $S$  des individus en deux sous-ensembles  $S_1$  et  $S_2$  contenant respectivement  $n_1$  et  $n_2$  individus ( $n_1 + n_2 = n$ ). Soit  $R^n = R^{n_1} \oplus R^{n_2}$  la décomposition associée de  $R^n$ . Soient  $X_i$  et  $Y_i$  deux vecteurs de  $R^{n_i}$ .

Si  $X_1$  est préféré à  $Y_1$  pour le préordre de choix collectif dans  $S_1$  et que  $X_2$  est préféré à  $Y_2$  ou indifférent, pour le préordre de choix collectif dans  $S_2$ , alors  $X_1 \oplus X_2$  est préféré à  $Y_1 \oplus Y_2$  pour le préordre de choix collectif dans  $S$ .

*Commentaire.* Il est important de bien comprendre ce que signifie ce principe de partition. Peut-être apparaîtra-t-il plus clair sous une autre formulation équivalente. Si un domaine  $H \subset R^n$  de vecteurs admissibles dans un problème d'optimisation particulier se décompose en somme directe  $H = H_1 \oplus H_2$  où  $H_i \subset R^{n_i}$ , alors l'optimisation séparée dans  $H_i$  pour la population  $S_i$ , pour  $i = 1$  et  $i = 2$ , réalise l'optimisation globale pour  $S$ . Autrement dit, si deux problèmes de choix concernant deux ensembles disjoints d'individus sont *indépendants* – dans le sens que le domaine des éventualités admissibles de chaque problème ne dépend pas du vecteur admissible finalement adopté pour l'autre

problème – alors ils peuvent être traités indépendamment : chacune des deux sous-populations n’a pas à considérer l’autre.

Sous cette forme, le principe de partition paraît bien s’imposer comme une propriété raisonnable<sup>4</sup>.

**Corollaire du principe de partition : propriété de Pareto :** le préordre de choix collectif est croissant strictement en chacune de ses  $n$  variables. On le voit aisément, en considérant une partition dans laquelle l’une des sous-populations contient un seul individu. (*En toute rigueur logique*, pour obtenir ce corollaire, il faut ajouter la condition (évidente en fait) que le préordre collectif d’une population constituée d’un seul individu est identique au préordre de préférence individuelle de cet individu.)<sup>5</sup>

**Propriété 5 ou principe de compensation.** Pour tout couple d’individus de  $S$  et pour tous nombres réels  $x, y$  et  $z$ , il existe un nombre réel  $w$  (dépendant éventuellement aussi des deux individus) tel que les vecteurs  $(x, y)$  et  $(z, w)$  représentent des états équivalents pour le préordre collectif de la population constituée par les deux individus. *Selon la propriété de Pareto, ce nombre  $w$  est unique.*

*Commentaire.* Ce principe de compensation apparaît comme une variante d’une propriété de *continuité* parfois supposée dans la littérature (Voir, par exemple, [6] pour des détails). Tout en étant raisonnable, il ne paraît pas s’imposer de manière absolument évidente. D’ailleurs, un préordre de choix collectif qui a été proposé ne vérifie pas ce principe (comme le lecteur pourra le vérifier aisément) : il s’agit du *leximin* de Rawls ([7] cité dans [6]). Le *leximin* (“lexicographique minimum”) classe les éventualités dans l’ordre lexicographique des niveaux préalablement rangés dans l’ordre croissant : autrement dit, il évalue chaque éventualité en fonction, en premier lieu, du niveau qu’elle atteint sur l’échelle de l’individu qu’elle défavorise le plus, puis, en cas d’égalité, du niveau atteint pour le deuxième plus défavorisé, et ainsi de suite. (Ce *leximin* a été proposé comme un préordre “très égalitaire”.)

Nous allons maintenant démontrer notre résultat, en commençant par un lemme, puis en prouvant le théorème proprement dit.

---

<sup>4</sup>Ce principe de partition est une variante de l’*axiome de séparabilité* qui, dans nos notations, s’exprime ainsi ( $R$  désigne toujours la préférence-ou-indifférence) :

$$(X_1, X_2) R (Y_1, X_2) \Leftrightarrow (X_1, Y_2) R (Y_1, Y_2)$$

(Voir par exemple [6], p.40.)

<sup>5</sup>Suivant la terminologie classique en économie, nous appelons *optimum de Pareto* dans un ensemble de solutions admissibles, un vecteur admissible tel que toute autre solution admissible soit *plus mauvaise* que ce vecteur pour au moins un individu. Le corollaire exprime qu’un optimum sous contrainte, pour notre préordre, sera un optimum de Pareto. D’où le nom ici donné au corollaire. Cette propriété de Pareto, souvent exigée d’emblée, apparaît ici seulement comme une *conséquence particulière* d’une propriété plus générale.



**Lemme de symétrie :** *Pour tout préordre de préférence collective vérifiant les propriétés 1 à 5 sur une population  $S$  de  $n \geq 3$  individus, et pour chacun de ces individus, il existe une transformation de son échelle de préférences individuelle par une application bijective et croissante, telle que, exprimé dans les nouvelles échelles de préférences individuelles, le préordre de préférence collective soit symétrique, c'est-à-dire invariant par permutations d'individus.*

*Démonstration :* Soit un nombre réel  $u$  fixé pour toute la suite. Pour tout indice  $i$  différent de  $n$  et tout  $x_i$ , il existe (selon le principe de compensation et le principe de partition) un et un seul  $x_n$  tel que les états

$(u, u, \dots, x_i, u, \dots, u, u)$  et  $(u, u, \dots, u, u, \dots, u, x_n)$

soient équivalents pour le préordre. Soit  $\psi_i$  l'application définie par  $\psi_i(x_i) = x_n$  pour tout  $i$  différent de  $n$ . Nous prenons pour  $\psi_n$  l'identité. On remarque aisément que  $\psi_i$  est bijective et croissante et que  $\psi_i(u) = u$ . Par composition de nos échelles  $\{x_i\}$  avec les applications  $\psi_i$ , nous obtenons ainsi  $n$  nouvelles échelles de préférences individuelles – la  $n$ ème étant inchangée – telles que, exprimée dans ces échelles, la préférence collective est symétrique *lorsque  $n - 1$  des  $n$  niveaux égalent  $u$* . Il nous reste à montrer que cette symétrie est générale. Faisons-le dans le cas  $n = 3$  ; la démonstration se généralise facilement à un nombre plus grand d'individus.

Pour la suite de la démonstration, exprimons les niveaux de préférences individuelles dans les nouvelles échelles. Nous avons donc obtenu, pour tout réel  $v$  ( $I$  désignant, comme précédemment, l'indifférence collective) :

$(v, u, u) I (u, v, u) I (u, u, v)$

Par conséquent, selon le principe de partition, pour tout réel  $w$  :

1.  $(v, u, u) I (u, v, u)$  donne  $(v, u, w) I (u, v, w)$

2.  $(u, v, u) I (u, u, v)$  donne  $(w, v, u) I (w, u, v)$

3.  $(u, u, v) I (v, u, u)$  donne  $(u, w, v) I (v, w, u)$

En échangeant les rôles de  $v$  et  $w$ , qui sont ici symétriques, nous ajoutons les équivalences :

4.  $(w, u, v) I (u, w, v)$

5.  $(v, w, u) I (v, u, w)$

6.  $(u, v, w) I (w, v, u)$

Ainsi,  $(u, v, w)$  équivaut à  $(v, u, w)$  selon 1, et à  $(w, v, u)$  selon 6 ; ces deux derniers équivalent à  $(v, w, u)$  et  $(w, u, v)$ , respectivement selon 5 et 2. Enfin, 3 ou 4 donne l'équivalence avec la sixième permutation  $(u, w, v)$ . Nous avons donc la propriété de symétrie recherchée, dès lors que l'un des trois nombres égale  $u$ . Il est alors aisé de passer au cas général, en utilisant de nouveau le

principe de partition, la partition considérée se faisant cette fois entre  $u$  et les deux autres niveaux. Par exemple, pour tout réel  $z$ ,

$$(u, v, w) I (u, w, v) \text{ donne } (z, v, w) I (z, w, v),$$

et de même pour les autres équivalences. Ceci termine la démonstration du lemme.

Bien entendu, ces transformations des échelles de préférences individuelles n'étant généralement pas identiques pour les différents individus, les nouvelles échelles ne présentent plus la propriété de comparabilité.

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer notre résultat.

**Théorème 1 :** *Soit un ensemble  $S$  de  $n \geq 3$  individus, pour lesquels existent des échelles numériques de préférences individuelles ordinales et comparables  $\{x_i\}_{i \in S}$ . Pour tout préordre de choix collectif présentant les propriétés 1 à 5, il existe des applications  $\phi_i$  strictement croissantes de  $R$  dans  $R$  telles que ce préordre soit représenté par l'application :*

$$f(\{x_i\}) = \sum_{i \in S} \phi_i(x_i)$$

*Réciproquement, tout préordre représenté ainsi vérifie les propriétés 1 à 5.*

*Par ailleurs, pour tout sous-ensemble non vide  $T$  de  $S$ , le seul préordre collectif sur  $T$  compatible avec ce préordre sur  $S$  est représenté par cette même somme, restreinte à  $T$ .*

*Démonstration :* Nous considérons les échelles de préférences individuelles sous leur forme transformée selon le lemme précédent, de manière à avoir la propriété de symétrie. Soient  $\{y_i\}_{i \in S}$  les nouvelles échelles (qui ne sont plus comparables). En raison du principe de partition, le préordre sur  $S$  induit un préordre sur tout couple d'individus de  $S$ , et en raison de la symétrie, ce préordre ne dépend pas du couple considéré et est lui-même symétrique.  $u$  étant toujours le nombre réel précédemment choisi, pour tous  $y_1$  et  $y_2$  réels, d'après le principe de compensation, il existe un  $w$  unique tel que :

$$(y_1, y_2) I (u, w)$$

$I$  désignant toujours l'indifférence.

Notons :  $w = y_1 * y_2$ . L'opération  $*$  est commutative, en raison de la symétrie du préordre dans les échelles  $y_i$ ; elle est associative, d'après le principe de partition, car :

$$(a, b, c) I (u, [a * b], c) I (u, u, [[a * b] * c])$$

et :

$$(a, b, c) I (a, u, [b * c]) I (u, u, [a * [b * c]])$$

d'où l'égalité de  $[[a * b] * c]$  et  $[a * [b * c]]$ . (On remarque ici, incidemment, que  $a * b * c$ , en tant qu'application de  $R^3$  dans  $R$ , représente le préordre dans  $R^3$ . Cela se généralise, bien sûr, à  $R^n$ .) L'opération  $*$  a un élément neutre,  $u$ . Chaque réel a un inverse, d'après le principe de compensation : pour tout  $a$ , il existe  $b$  tel que  $(u, u)$  et  $(a, b)$  soient équivalents pour le préordre.

Il s'ensuit que  $R$  est un groupe commutatif pour l'opération  $*$ . En outre,  $x * y$  est croissant strictement en  $x$  et en  $y$ , d'après la propriété de Pareto. A  $y$  fixé,  $x \mapsto x * y$  est une bijection de  $R$  sur  $R$ , d'après la propriété de groupe.  $x * y$  étant monotone et bijectif en  $x$ , ainsi qu'en  $y$ , est donc *continu* en chacune des deux variables, selon la propriété connue, qu'une bijection croissante de  $R$  sur  $R$  est continue.

Ici, intervient un **lemme** que l'on peut énoncer ainsi : *Soit  $*$  une opération de groupe commutatif continu sur  $R$ , telle que  $x * y$  soit croissant en  $x$  (et donc en  $y$ ). Il existe un isomorphisme de groupe  $\phi$  de  $(R, *)$  sur  $(R, +)$ , croissant (donc continu). Ce lemme se démontre facilement<sup>6</sup>.*

Selon une remarque précédemment faite,  $\{y_i\}$  étant toujours nos échelles de préférences individuelles symétriques, le préordre collectif est représenté par l'application :

$$y_1 * y_2 * \dots * y_n$$

Il est donc aussi bien représenté par toute composition de cette application avec une application croissante de  $R$  sur  $R$ , par exemple avec  $\phi$ . Or, par la propriété d'isomorphie de groupe :

$$\phi(y_1 * y_2 * \dots * y_n) = \phi(y_1) + \phi(y_2) + \dots + \phi(y_n)$$

Les échelles  $y_i$  avaient été obtenues, dans le lemme de symétrie, à partir des échelles ordinales comparables  $x_i$ , par des applications  $\psi_i$  ( $\psi_n$  étant l'identité). Les applications  $\phi_i$  que nous recherchons sont donc obtenues par la composition :

$$\phi_i = \phi \circ \psi_i$$

ce qui démontre la première partie (la principale) du théorème. La réciproque est facile à vérifier. La troisième partie, concernant le préordre induit dans les sous-ensembles, se démontre aisément en utilisant le principe de partition.

---

<sup>6</sup>*Idée de la démonstration* : Pour tout réel  $x$  et tout entier positif  $p$ , on note :  $x^{*p} = x * x * \dots * x$   $p$  fois. L'application  $x \mapsto x^{*p}$  est, on le vérifie, bijective croissante de  $R$  sur  $R$ . Donc, pour tout  $x$ , il existe un  $y$  unique tel que  $y^{*p} = x$ ; on note  $y = x^{*\frac{1}{p}}$ . On définit alors, pour  $p$  et  $q$  entiers positifs :

$$x^{*\frac{p}{q}} = (x^{*\frac{1}{q}})^{*p}$$

et  $x^{*-\frac{p}{q}}$  = l'inverse de  $x^{*\frac{p}{q}}$ . Fixons maintenant  $x_1$  supérieur à  $u$ . Pour tout rationnel  $a$ , nous posons :  $\phi(x_1^{*a}) = a$ . Il est alors aisé de montrer que  $\phi$  est ainsi défini sur une partie dense de  $R$  et se prolonge par continuité en l'isomorphie cherchée.

On peut examiner ce que donne une propriété supplémentaire de *symétrie* (autrement appelée parfois *anonymité* dans la littérature) de la procédure de choix collectif entre les individus :

**Propriété 6 ou principe de symétrie.** Le préordre collectif est invariant par permutation des individus : exprimé en fonction des échelles *comparables*, il est symétrique.

*Commentaire.* Cette propriété de symétrie traduit une condition d'*égalité* entre les individus vis-à-vis du préordre collectif. Bien entendu, elle n'a de sens ici qu'en raison de l'hypothèse de comparabilité.

Il est aisé de voir que, si l'on impose cette propriété supplémentaire, les applications  $\phi_i$  doivent être identiques.

Pour tout préordre de choix collectif correspondant à notre théorème 1, sur notre population  $S$ , et pour tout individu  $i$  de  $S$ , posons :  $y_i = \phi_i(x_i)$  . Le préordre collectif est alors représentable par l'expression :

$$f(\{y_i\}) = \sum_{i \in S} y_i$$

Cela confère aux échelles  $\{y_i\}$  un certain aspect d'*échelles cardinales*, par la forme purement additive que présente alors le préordre, et qui nous rappelle les préordres utilitaristes apparaissant sous d'autres hypothèses plus exigeantes (§ 5). (Ces échelles "cardinales", cependant, ne sont comparables que sous l'hypothèse de symétrie.) D'ailleurs, cette forme purement additive n'est conservée, naturellement, que par composition des échelles  $y_i$  avec une application affine.

C'est là le point à remarquer dans notre résultat : nous nous sommes placés dans un cadre *ordinal comparable*, ne supposant donc, *a priori*, aucun caractère de cardinalité. Les propriétés que nous avons requises ne contiennent pas davantage, du moins explicitement, un tel caractère. Or, voici que ce caractère de cardinalité surgit dans notre résultat, en fait, comme *un aspect sous lequel l'expression de notre préordre est "la plus simple" dans un certain sens.*

Il est intéressant de mentionner une analogie avec une situation connue en physique. Les choses apparaîtront plus clairement avec l'hypothèse de symétrie, sous laquelle les "échelles cardinales induites" sont comparables. Nous avons donc supposé l'existence, dans notre population  $S$ , d'échelles ordinales comparables  $\{x_i\}$ . Toute composition de ces échelles avec une bijection croissante de  $R$  dans  $R$  redonne des échelles ordinales comparables. Or, tout préordre symétrique obéissant à nos propriétés 1 à 5 *privilégie, parmi ces représentations possibles des échelles, l'une d'entre elles - à une application affine près - avec laquelle l'expression du préordre est "plus simple" qu'avec les autres représentations.* Il y a là une certaine analogie avec les échelles de températures en thermodynamique. Il est connu que la température n'est pas une grandeur

sommable : une échelle thermodynamique, *a priori*, ne fait qu'exprimer une relation de préordre (“être plus chaud que”). Toute composition d'une échelle de température avec une application croissante donne une autre échelle de température “correcte”. Cependant, les échelles de type Celsius-Kelvin – les échelles reliées “affinement” à l'échelle Kelvin – se révèlent *privilegiées pour des raisons de représentation* : certaines lois thermodynamiques s'expriment “plus simplement” dans ces échelles : par exemple la loi des gaz parfaits et la loi du rendement thermique de Carnot.

Cet aspect de cardinalité, qui apparaît à travers notre résultat, est encore renforcé par l'*extension probabiliste* que nous allons examiner maintenant.

## 7 Une extension probabiliste

Considérant un ensemble  $E$  d'éventualités possibles, on peut envisager des *combinaisons probabilistes* de ces éventualités. L'extension probabiliste de  $E$  sera l'ensemble des éventualités définies ainsi :

“pour chaque  $e$  de  $E$ , probabilité  $\lambda_e$  d'obtenir  $e$ .”

où les  $\lambda_e$  sont des nombres réels compris entre 0 et 1, nuls sauf un nombre fini, et de somme 1. On pourra noter :

$$\sum_{e \in E} \lambda_e e$$

L'usage de cette notation est justifié par certaines propriétés algébriques, qu'il serait aisé de détailler<sup>7</sup>. *Par exemple* :

$$\lambda_1(\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2) + \lambda_3 e_3 = (\lambda_1 \mu_1) e_1 + (\lambda_1 \mu_2) e_2 + \lambda_3 e_3$$

Nous allons mentionner deux propriétés d'extension probabiliste, susceptibles d'être présentées par nos échelles, puis nous caractériserons les préordres collectifs vérifiant ces deux propriétés en sus des propriétés 1 à 5 précédemment mentionnées.

**Propriété 7 : extension probabiliste des échelles individuelles.** Soit  $i$  un individu quelconque de  $S$ , soient 2 éventualités  $e_0$  et  $e_1$  évaluées pour  $i$  à des niveaux :

$$x_i(e_0) = v_0 < x_i(e_1) = v_1$$

Toute combinaison probabiliste  $e_\lambda = (1-\lambda)e_0 + \lambda e_1$  ( $\lambda \in ]0, 1[$ ) est évaluée sur l'échelle  $x_i$  ; le niveau  $v_\lambda = x_i(e_\lambda)$  est compris entre  $v_0$  et  $v_1$ , croît strictement avec  $\lambda$  et dépend seulement de  $v_0$ ,  $v_1$ ,  $\lambda$  et éventuellement de l'individu  $i$ .

<sup>7</sup>Ce formalisme d'extension probabiliste semble avoir été introduit par Von Neumann et Morgenstern dans leur théorie du choix aléatoire. (Se reporter, par exemple, à [5].) Le résultat d'extension probabiliste qui suit n'est donc vraisemblablement pas original.

Cela est supposé aussi, récursivement, si  $e_0$  et  $e_1$  sont elles-mêmes des combinaisons probabilistes d'éventualités ; les niveaux obtenus sont identiques pour des combinaisons probabilistes algébriquement équivalentes.

*Commentaire.* La croissance stricte supposée de  $v_\lambda$  avec  $\lambda$  est manifestement raisonnable : en présence d'une éventualité incertaine, il est évidemment avantageux de voir croître la probabilité de la composante la plus avantageuse... Par ailleurs, on remarque que cette propriété 7 est invariante par composition de l'échelle  $x_i$  avec une bijection croissante : elle est intrinsèque au préordre individuel, non dépendante de sa représentation.

**Propriété 8 : indifférence probabiliste.** Le préordre collectif connaît une extension probabiliste telle que, quelles que soient deux éventualités  $e_0$  et  $e_1$  équivalentes pour ce préordre, toute combinaison probabiliste de ces deux éventualités leur soit équivalente pour ce même préordre.

*Commentaire.* Cette hypothèse semble tout à fait raisonnable à première vue. Elle pourrait pourtant être critiquée, pour la raison suivante : supposons une situation où  $e_0$  et  $e_1$  sont des éventualités très inégalitaires et "injustes", favorisant des individus différents : *on pourrait juger souhaitable* qu'un hasard décide qui sera favorisé. La prise en compte de cette considération conduirait à exiger une propriété de *convexité* probabiliste. Mais nous nous en tiendrons ici à notre hypothèse d'*indifférence* probabiliste.

Si nous supposons ces deux propriétés, nous obtenons un résultat qui complète le théorème précédent.

**Théorème 2 :** *Soit un ensemble  $S$  de  $n \geq 3$  individus, pour lesquels existent des échelles numériques de préférences individuelles ordinales et comparables  $\{x_i\}_{i \in S}$ , vérifiant de plus la propriété 7 d'extension probabiliste. S'il existe un préordre collectif vérifiant les propriétés 1 à 5, ainsi que la propriété 8 d'indifférence probabiliste, les applications  $\phi_i$  associées (selon le théorème 1) ont la propriété d'extension probabiliste linéaire :*

$$\forall e_0, e_1 \in E, \forall \lambda \in ]0, 1[, \text{ (on pose } e_\lambda = (1 - \lambda)e_0 + \lambda e_1),$$

$$\phi_i[x_i(e_\lambda)] = (1 - \lambda)\phi_i[x_i(e_0)] + \lambda\phi_i[x_i(e_1)]$$

*Les préordres collectifs recherchés sont alors les préordres représentés par les applications de la forme :*

$$f(\{x_i\}) = \sum_{i \in S} p_i \phi_i(x_i)$$

*( $p_i$  positifs fixés).*

*Si l'on impose de surcroît l'hypothèse de symétrie (propriété 6), le préordre collectif demandé est unique : les  $\phi_i$  précédents étant alors identiques et notés  $\phi$ , ce préordre collectif est représentable par :*

$$f(\{x_i\}) = \sum_{i \in S} \phi(x_i)$$

*Démonstration* : Soit donc un préordre collectif vérifiant les propriétés 1 à 5 , ainsi que la propriété 8 , et  $\phi_i$  les applications associées. Pour alléger l'écriture, notons  $y_i = \phi_i(x_i)$  . Le préordre collectif est alors représentable par :  $\sum_{i \in S} y_i$  . Nous devons démontrer que l'échelle  $y_i$  , qui a la propriété d'extension probabiliste, l'a sous une forme linéaire. Soient deux éventualités  $e_0$  et  $e_1$  de  $E$  évaluées, par les individus 1 et 2 de  $S$ , ainsi :

$$y_1(e_0) = v_0 ; y_1(e_1) = v_1 ;$$

$$y_2(e_0) = v_1 ; y_2(e_1) = v_0 ;$$

les autres individus de  $S$  étant indifférents entre les deux éventualités. Le préordre collectif, représentable par la somme des  $y_i$ , est donc indifférent entre  $e_0$  et  $e_1$  . D'après la propriété 8 d'indifférence probabiliste, il est donc indifférent entre toutes les combinaisons :

$$e_\lambda = (1 - \lambda)e_0 + \lambda e_1$$

pour tout  $\lambda \in [0, 1]$  . Considérons  $e_{\frac{1}{2}}$  . Notons  $u_i = y_i(e_{\frac{1}{2}})$  pour  $i = 1$  et  $i = 2$  .  $u_1$  et  $u_2$  sont bien définis, selon la propriété 7 d'extension probabiliste.  $e_{\frac{1}{2}}$  et  $e_0$  étant indifférents pour le préordre, nous avons :

$$u_1 + u_2 = v_0 + v_1$$

Si l'on considère un troisième individu de  $S$  , et le  $u_3$  associé, on peut remplacer 1 ou 2 par 3 ci-dessus, et nous obtenons :

$$u_1 + u_2 = u_2 + u_3 = u_1 + u_3 = v_0 + v_1$$

Il en résulte que les  $u_i$  sont tous égaux entre eux, et égaux à  $\frac{1}{2}v_0 + \frac{1}{2}v_1$  . Nous avons donc la relation linéaire souhaitée pour le cas particulier  $\lambda = \frac{1}{2}$  . Par des dichotomies successives, cette relation peut aisément être étendue à tous les nombres de  $]0, 1[$  qui sont des fractions binaires. Ces fractions constituent une partie dense de  $]0, 1[$  ; par conséquent, la relation linéaire se généralise à tout l'intervalle, en utilisant le fait que, selon la propriété 7,  $y_i(e_\lambda)$  est monotone en  $\lambda$  .

Nous avons donc trouvé que, pour tout préordre collectif vérifiant les propriétés demandées, les échelles  $\phi_i(x_i)$  associées à ce préordre ont la propriété d'extension probabiliste linéaire. Pour chaque  $i$ , on vérifie aisément que les

échelles ayant cette propriété se déduisent toutes les unes des autres par des transformations affines. Par conséquent, les applications  $\phi_i$  associées, pour  $i$  fixé, aux différents préordres collectifs possibles, se déduisent les unes des autres par transformations affines. Dans ces transformations, la constante additive peut être négligée ici, car la représentation d'un préordre se définit à une constante additive près. Il reste donc à considérer la partie multiplicative : les applications associées aux différents préordres possibles, pour  $i$  fixé, sont proportionnelles les unes aux autres : elles sont toutes de la forme  $p_i\phi_i$  ( $\phi_i$  désignant l'une d'entre elles, associée à l'un des préordres), avec des poids  $p_i$  positifs, pour maintenir la croissance stricte en chaque variable. On remarque ici que, pour chaque préordre possible, ces poids sont définis à une constante multiplicative près.

Si maintenant nous exigeons la propriété de symétrie, les applications  $\phi_i$ , nous l'avons vu, sont identiques : nous les notons  $\phi$ . Alors, les échelles  $\phi(x_i)$  sont comparables. L'exigence de symétrie implique alors que les poids  $p_i$  soient égaux. Etant définis à une constante multiplicative près, ils peuvent donc être pris tous égaux à 1. D'où, dans ce cas, un seul préordre collectif possible.

Ceci termine la démonstration du théorème.

On peut ici noter que l'existence d'un préordre collectif obéissant aux hypothèses du théorème 2, hypothèses qui portent sur la collectivité considérée, implique l'existence d'échelles ordinales ayant la propriété d'extension probabiliste linéaire, qui est une propriété purement individuelle, indépendante de l'appartenance de l'individu à une collectivité ou à une autre.

## 8 Conclusion

Après avoir examiné le célèbre théorème d'impossibilité d'Arrow, nous avons abordé le problème de l'agrégation d'échelles de préférences individuelles sous des hypothèses différentes de celles envisagées par Arrow : nous avons supposé l'existence d'échelles numériques de préférences individuelles *ordinales* et *comparables* (§ 5). Sous cette hypothèse, nous avons établi la forme générale des préordres de préférence collective obéissant à un certain nombre de propriétés "raisonnables", notamment à un *principe de partition* (§ 6) : nous avons trouvé que, pour tout tel préordre, il existe une représentation de chaque échelle de préférences individuelle (c'est-à-dire une transformation de celle-ci par composition avec une bijection croissante) telle que ce préordre se représente alors par la somme des niveaux individuels sur les échelles ainsi représentées.

En outre, supposant deux autres propriétés d'*extension probabiliste*, nous avons complété ce résultat en mettant en évidence (§ 7) une propriété probabiliste caractérisant ces représentations d'échelles individuelles précédemment mentionnées.

**Circonstances ; remerciements.** C'est à propos de problèmes philosophiques que j'ai été conduit, vers 1978, à réfléchir sur le sujet de l'agrégation d'échelles de préférence. Je remercie le



professeur Hervé Moulin, alors au laboratoire d'économétrie de l'Ecole Polytechnique, de s'être intéressé à mes réflexions (vers 1983) et de m'avoir donné des indications bibliographiques.

## Bibliographie

- [1] Kenneth J. Arrow. **Choix collectif et préférences individuelles.** *Calmann-Lévy, 1974.*
- [2] Douglas Blair & Robert Pollak. La logique du choix collectif. *Pour la science, octobre 1983.*
- [3] Georges Bordes. Individualisme, ordinalisme et bien-être social. *Annales de l'INSEE n°41 1981.*
- [4] Gérard Debreu. Topological methods in cardinal utility theory. *dans : Mathematical methods in the social sciences, édité par Arrow, Karlin & Suppes. Proceedings of the first Stanford Symposium, 1959. Stanford University Press, 1960.*
- [5] Peter C. Fishburn. Expected utility theories : a review note. *dans : Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. 141 : Mathematical Economics and Game Theory. Springer Verlag, 1977.*
- [6] Hervé Moulin. Choix social cardinal : résultats récents. *Laboratoire d'Econométrie de l'Ecole Polytechnique, cahier A242 0482, avril 1982.*
- [7] J. Rawls. **A theory of justice.** *Belknap Press, Cambridge, Mass., 1971.*
- [8] Amartya K. Sen. On weights and measures : informational constraints in social welfare analysis. *Econometrica, vol.45 n°7. 1977.*
- [9] Amartya K. Sen. **Collective Choice and Social Welfare.** *San Francisco : Holden Day & Edinburgh : Oliver & Boyd. 1970.*