

# EULERIAN MODEL FOR DISPERSED TWO-PHASE FLOWS AND UPWIND NUMERICAL SOLUTION

Lionel Sainsaulieu<sup>1</sup> and Bernard Larrouturou<sup>2</sup>

## Abstract

We consider a non conservative hyperbolic model describing dispersed two-phase flows. We introduce a simplified approximate model, based on an analysis of the shock waves for the two-phase system. This allows us to derive an upwind method for two-phase flow simulation, which is very close to the usual second-order Roe method for pure gas flows.

# MODELISATION EULERIENNE DES ECOULEMENTS DIPHASIQUES DISPERSES ET RESOLUTION PAR UNE METHODE DECENTREE

## Résumé

Nous considérons un modèle hyperbolique non conservatif qui décrit les écoulements diphasiques dispersés. Nous introduisons un modèle approché, basé sur l'analyse des ondes de choc présentes dans l'écoulement diphasique. En utilisant ce modèle simplifié, nous proposons pour les écoulements diphasiques une méthode décentrée qui est très proche de la méthode de Roe d'ordre deux appliquée à un écoulement purement gazeux.

<sup>1</sup>CERMICS, Noisy-le-Grand

<sup>2</sup>CERMICS, Sophia-Antipolis

## 1. INTRODUCTION

Nous nous intéressons dans ce rapport à la modélisation Eulérienne d'écoulements diphasiques dans lesquels la phase liquide est présente sous forme de petites gouttes au sein du gaz. Suivant les travaux de la thèse du premier auteur [7], et dans l'optique d'une simulation de ces phénomènes par une méthode numérique décentrée de type MUSCL (*Monotone Upwind Schemes for Conservation Laws*), nous utilisons la modélisation développée dans [7], où l'écoulement diphasique est décrit par un système hyperbolique non conservatif.

Considérant ensuite l'approximation numérique de ce modèle, nous ajoutons plusieurs commentaires ou améliorations aux travaux de la thèse [7]. Nous proposons notamment une méthode de type MUSCL, plus simple et moins coûteuse que les méthodes utilisées dans [7]. On se limite ici à considérer des schémas d'intégration explicites à pas stationnaires.

Pour terminer, nous illustrons la méthode proposée en montrant son comportement d'une part pour le calcul de la propagation d'une onde acoustique dans un mélange diphasique, d'autre part pour un calcul bidimensionnel de l'écoulement d'un mélange diphasique dans une tuyère.

## 2. MODELISATION DES ECOULEMENTS DIPHASIQUES

### 2.1. Un modèle hyperbolique

Nous considérons un écoulement diphasique constitué d'un brouillard de gouttes suspendues dans une atmosphère gazeuse. On suppose que l'écoulement gazeux compressible autour des gouttes et l'écoulement liquide incompressible à l'intérieur des gouttes sont régis par les équations de Navier-Stokes. Cependant les nuages de gouttes rencontrés dans de tels écoulements, par exemple dans les moteurs de fusées, contenant typiquement de  $10^9$  à  $10^{12}$  gouttes par mètre cube, le problème de frontière libre associé n'est pas soluble. De plus nous ne sommes pas intéressés par la position précise de chaque goutte mais par des caractéristiques moyennes de l'écoulement. C'est pourquoi on s'intéresse à une modélisation Eulérienne dans laquelle chaque phase est considérée comme un fluide continu décrit par des quantités macroscopiques.

Nous notons  $\alpha$  la fraction volumique de la phase gazeuse,  $\rho_g$  la masse volumique de la phase gazeuse,  $\rho_l$  la masse volumique constante de la phase liquide,  $\mathbf{u}_g$  et  $\mathbf{u}_l$  les vitesses moyennes des phases gazeuse et liquide, et  $\varepsilon_g$  et  $\varepsilon_l$  les énergies spécifiques internes de la phase gazeuse et de la phase liquide respectivement.

**Remarque 1.** Pour les écoulements diphasiques qui nous intéressent, la fraction volumique de la phase gazeuse sera proche de 1. Tel est souvent le cas en pratique. Par

exemple, dans un moteur de fusée, l'oxygène liquide et l'hydrogène gazeux sont introduits dans la chambre du moteur dans des proportions proches de la stoechiométrie, si bien que les masses d'oxygène et d'hydrogène injectées sont comparables. La masse volumique du liquide  $\rho_l$  étant très grande devant la masse volumique  $\rho_g$  du gaz, on voit alors que  $\alpha$  est proche de 1 (au moins après l'atomisation secondaire). •

Le système macroscopique décrivant cet écoulement est obtenu par un processus de moyenne à partir des équations de Navier-Stokes qui décrivent l'écoulement au niveau microscopique; ce processus utilise certaines hypothèses simplificatrices, et notamment la remarque précédente. Dans [7], on obtient ainsi le système suivant qui régit l'évolution des quantités introduites ci-dessus:

$$\begin{aligned}
 (2.1.i) \quad & \partial_t(\alpha\rho_g) + \nabla \cdot (\alpha\rho_g\mathbf{u}_g) = \Gamma , \\
 (2.1.ii) \quad & \partial_t(\alpha\rho_g\mathbf{u}_g) + \nabla \cdot (\alpha\rho_g(\mathbf{u}_g \otimes \mathbf{u}_g)) + \alpha\nabla p - \text{div}\sigma' = \mathbf{I} , \\
 (2.1.iii) \quad & \partial_t(\alpha\rho_g e_g) + \nabla \cdot (\alpha\rho_g e_g \mathbf{u}_g + \partial p \mathbf{u}_g) + p\nabla \cdot ((1-\alpha)\mathbf{u}_l) \\
 & \quad - \nabla \cdot (\sigma' \mathbf{u}_g) - \nabla \cdot (\kappa_g \nabla \varepsilon_g) = H , \\
 (2.1.iv) \quad & \partial_t((1-\alpha)\rho_l) + \nabla \cdot ((1-\alpha)\rho_l \mathbf{u}_l) = -\Gamma , \\
 (2.1.v) \quad & \partial_t((1-\alpha)\rho_l \mathbf{u}_l) + \nabla \cdot ((1-\alpha)\rho_l(\mathbf{u}_l \otimes \mathbf{u}_l)) + (1-\alpha)\nabla p + \nabla \theta = -\mathbf{I} , \\
 (2.1.vi) \quad & \partial_t((1-\alpha)\rho_l e_l) + \nabla \cdot ((1-\alpha)\rho_l e_l \mathbf{u}_l) + (1-\alpha)\mathbf{u}_l \cdot \nabla p = -H .
 \end{aligned}$$

On a écrit successivement les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie pour la phase gazeuse puis pour la phase liquide. Dans ce système, les énergies spécifiques totales du gaz et du liquide sont :

$$e_g = \varepsilon_g + \mathbf{u}_g^2/2 \quad \text{et} \quad e_l = \varepsilon_l + \mathbf{u}_l^2/2 ,$$

alors que les pressions  $p$  et  $\theta$  sont données par

$$p = (\gamma - 1)\rho_g \varepsilon_g \quad \text{et} \quad \theta = \theta_0(1 - \alpha)^\delta .$$

Nous avons en général pour un écoulement diphasique  $\delta = 4/3$ . Enfin le tenseur des contraintes visqueuses  $\sigma'$  est donné par

$$\sigma' = \eta (\nabla \mathbf{u}_g + \nabla \mathbf{u}_g^T) + \left( \zeta^0 - \frac{2}{3}\eta \right) (\nabla \cdot \mathbf{u}_g) \mathbf{1} ,$$

où  $\eta = \eta^0(1 + 5(1 - \alpha)/2)$ . Dans ces équations,  $\eta^0$  et  $\zeta^0$  sont les coefficients de viscosité du gaz et  $\kappa_g = \kappa_g^0 \alpha$  est la conduction thermique du fluide diphasique.

Les termes source  $\Gamma$ ,  $\mathbf{I}$  et  $H$  qui apparaissent dans le membre de droite de (2.1) représentent respectivement les échanges de masse, impulsion et énergie entre les deux phases. Nous ne les décrirons pas en détail ci-dessous (voir [7]).

Nous envisageons la résolution du système (2.1) dans le cadre de la méthode des pas fractionnaires : les termes de convection, de production et de diffusion sont traités successivement à chaque pas de temps. Nous nous limiterons dans la suite aux seuls termes de convection, puisque c'est dans le traitement de ces termes que réside la spécificité des méthodes décentrées de type MUSCL [10], et nous omettrons toujours les termes algébriques de production et les termes de diffusion.

En se limitant aux termes de convection, nous observons que le système (2.1), tiré de [7], est très proche des modèles couramment utilisés pour la description d'écoulements diphasiques dispersés, si ce n'est la présence du terme de pression  $\nabla\theta$  dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement du liquide. Dans la modélisation développée dans [7], ce terme supplémentaire provient du fait que la pression effective de l'écoulement diphasique diffère de la pression du gaz  $p$ . En effet l'équation de conservation de l'impulsion totale s'écrit (sans les termes de diffusion):

$$\partial_t(\alpha\rho_g\mathbf{u}_g + (1-\alpha)\rho_l\mathbf{u}_l) + \nabla \cdot (\alpha\rho_g(\mathbf{u}_g \otimes \mathbf{u}_g) + (1-\alpha)\rho_l(\mathbf{u}_l \otimes \mathbf{u}_l)) + \nabla p_{\text{eff}} = 0 ,$$

où la pression effective est :

$$p_{\text{eff}} = p + \theta_0(1-\alpha)^{4/3},$$

la constante  $\theta_0$  caractérisant la pression d'arrêt du gaz sur les gouttes. La correction de pression  $\theta$  est petite devant la pression  $p$  du gaz: l'ajout du terme correspondant dans (2.1) est donc peu important du point de vue quantitatif. Mais il joue un rôle crucial du point de vue mathématique et pour la mise en oeuvre de méthodes de résolution numérique, notamment dans le cadre des méthodes MUSCL. En effet, si on omet le terme  $\nabla\theta$  dans les équations (2.1), le système cesse d'être hyperbolique; il présente des vitesses caractéristiques complexes, le problème aux valeurs initiales devient mal posé, et la méthodologie MUSCL ne peut être employée. Au contraire, le système (2.1) écrit ci-dessus, en l'absence des termes source et des termes de diffusion, est un système hyperbolique non conservatif, au moins dans la limite  $\alpha \rightarrow 1$ : il possède lorsque l'écart de vitesses entre les deux phases est subsonique, i.e si  $|\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_l| < c_g$  où  $c_g$  est la vitesse du son dans le gaz, six vitesses caractéristique réelles dont on peut calculer un développement limité en  $1-\alpha$  :

$$(2.2) \quad \begin{cases} \lambda_1 = u_g - c_g + o((1-\alpha)^{\delta-1}) , \\ \lambda_2 = u_g + c_g + o((1-\alpha)^{\delta-1}) , \\ \lambda_3 = u_l - \left(\frac{-\theta'(\alpha)}{\rho_l}\right)^{1/2} + o\left((1-\alpha)^{\frac{\delta-1}{2}}\right) , \\ \lambda_4 = u_l + \left(\frac{-\theta'(\alpha)}{\rho_l}\right)^{1/2} + o\left((1-\alpha)^{\frac{\delta-1}{2}}\right) , \\ \lambda_5 = u_g , \\ \lambda_6 = u_l . \end{cases}$$

On notera parfois ci-dessous:

$$\rho \mathbf{u} = \alpha \rho_g \mathbf{u}_g + (1 - \alpha) \rho_l \mathbf{u}_l ,$$

$$\rho e = \alpha \rho_g e_g + (1 - \alpha) \rho_l e_l ,$$

$$\varepsilon_l^e = \varepsilon_l - \frac{\theta_0 (1 - \alpha)^{\delta-1}}{(\delta - 1) \rho_l} .$$

**Remarque 2.** Pour simplifier, nous n'avons pas introduit dans le système (2.1) d'équations permettant de traiter les réactions chimiques en phase gazeuse. Il faut cependant noter qu'il est possible d'introduire des équations de conservation pour les fractions massiques des différents constituants de la phase gazeuse. Ces nouvelles équations ne posent pas de problème particulier tant du point de vue de l'analyse mathématique que de l'analyse numérique (voir par exemple [1,3,4]). •

## 2.2. Un modèle simplifié

Dans sa thèse [7], le premier auteur a introduit un solveur numérique de type Roe pour résoudre numériquement le système (2.1) ci-dessus. Plus précisément, la méthode utilisée dans [7] est un "Q-schéma", c'est-à-dire qu'elle utilise comme "matrice de Roe" une matrice Jacobienne évaluée à la demi-somme des deux états considérés. Cette méthode a été améliorée dans [5], où une matrice de Roe est déduite de conditions de Rankine-Hugoniot approchées.

Ces relations de Rankine-Hugoniot approchées sont tirées de l'étude des solutions du système de convection extrait de (2.1) :

$$(2.3.i) \quad \partial_t(\alpha \rho_g) + \partial_x(\alpha \rho_g u_g) = 0 ,$$

$$(2.3.ii) \quad \partial_t(\alpha \rho_g u_g) + \partial_x(\alpha \rho_g u_g^2) + \alpha \partial_x p = 0 ,$$

$$(2.3.iii) \quad \partial_t(\alpha \rho_g e_g) + \partial_x(\alpha \rho_g e_g u_g + \alpha p u_g) + p \partial_x((1 - \alpha) u_l) = 0 ,$$

$$(2.3.iv) \quad \partial_t((1 - \alpha) \rho_l) + \partial_x((1 - \alpha) \rho_l u_l) = 0 ,$$

$$(2.3.v) \quad \partial_t((1 - \alpha) \rho_l u_l) + \partial_x((1 - \alpha) \rho_l u_l^2) + (1 - \alpha) \partial_x p + \partial_x \theta = 0 ,$$

$$(2.3.vi) \quad \partial_t((1 - \alpha) \rho_l e_l) + \partial_x((1 - \alpha) \rho_l e_l u_l) + (1 - \alpha) u_l \partial_x p + \partial_x(\theta u_l) = 0 .$$

Les solutions onde de choc de ce système non-conservatif peuvent être définies comme les limites de profils visqueux solutions de (2.1) lorsque la viscosité tend vers 0 (voir [7]). L'analyse des solutions obtenues montre que ces ondes de choc sont de deux types : ou bien elles portent essentiellement sur les variables décrivant la phase gazeuse ( $\rho_g$ ,  $u_g$  et  $\varepsilon_g$ ) et les quantités  $\alpha$ ,  $u_l$  et  $\varepsilon_l$  restent presque constantes à la traversée de l'onde de choc, ou bien elles affectent essentiellement les quantités  $\alpha$ ,  $u_l$  et  $\varepsilon_l$  alors que la masse volumique, la vitesse et l'énergie interne du gaz varient peu à la traversée de

l'onde de choc. Nous dirons que ces dernières ondes sont des ondes de taux de vide. La distinction entre ces deux types d'ondes est rendue possible par le faible couplage entre la phase gazeuse et la phase liquide lorsque le taux de vide  $\alpha$  est proche de 1. Nous pouvons donner un exemple de ces deux types d'ondes de choc solutions de (2.3). Tout d'abord un choc entre deux états  $\mathbf{w}_l$  et  $\mathbf{w}_R$  qui affecte essentiellement les grandeurs de la dynamique des gaz (choc de vitesse égale à  $250 \text{ m.s}^{-1}$ ) :

	$\rho_g$	$\alpha$	$u_g$	$u_l$	$T_g$	$T_l$
$\mathbf{w}^L$	1.000	0.990000	0.00	0.000	300.00	300.00
$\mathbf{w}^R$	0.564	0.990008	-192.84	-0.192	233.39	299.99

et d'autre part une onde de taux de vide (de vitesse  $6 \text{ m.s}^{-1}$ ) :

	$\rho_g$	$\alpha$	$u_g$	$u_l$	$T_g$	$T_l$
$\mathbf{w}^L$	1.0000	0.9900	100.00	10.00	300.00	300.00
$\mathbf{w}^R$	0.9981	0.9714	101.98	7.397	299.81	300.01

C'est sur cette classification des ondes de choc que repose la méthode utilisée dans [5]. Cependant cette méthode, aussi bien que celle employée dans [7], nécessite à chaque pas de temps et pour chaque flux d'espace la décomposition d'un vecteur sur les vecteurs propres d'une matrice linéarisée de Roe dont les valeurs et vecteurs propres ne sont pas explicitement connus et doivent être évalués numériquement. Ceci conduit à une méthode numérique stable mais trop coûteuse.

Pour introduire une méthode plus économique, nous cherchons à tirer parti du découplage partiel mis en évidence ci-dessus pour nous ramener à un modèle dont on connaisse explicitement les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice de convection. Pour cela, nous introduisons le modèle simplifié suivant:

$$\begin{aligned}
 (2.4.i) \quad & \partial_t(\alpha\rho_g) + \partial_x(\alpha\rho_g u_g) = 0, \\
 (2.4.ii) \quad & \partial_t(\alpha\rho_g u_g) + \partial_x(\alpha\rho_g u_g^2) + \partial_x(\alpha p) = 0, \\
 (2.4.iii) \quad & \partial_t(\alpha\rho_g e_g) + \partial_x(\alpha\rho_g e_g u_g) + \partial_x(\alpha p u_g) = 0, \\
 (2.4.iv) \quad & \partial_t((1-\alpha)\rho_l) + \partial_x((1-\alpha)\rho_l u_l) = 0, \\
 (2.4.v) \quad & \partial_t(\rho_l u_l) + \partial_x\left(\frac{\rho_l u_l^2}{2} + \frac{\delta\theta_0(1-\alpha)^{\delta-1}}{(\delta-1)}\right) = 0, \\
 (2.4.vi) \quad & \partial_t((1-\alpha)\rho_l \varepsilon_l^\varepsilon) + \partial_x((1-\alpha)\rho_l u_l \varepsilon_l^\varepsilon) = 0.
 \end{aligned}$$

Seules les équations (2.4.ii), (2.4.iii) et (2.4.v) de ce système sont approchées, les trois autres équations conservatives (2.4.i), (2.4.iv) et (2.4.vi) étant exactement satisfaites par les solutions du système (2.3). Le système approché (2.4) peut-être obtenu par un développement formel à partir de (2.3) dans le cas où le rapport  $\epsilon = \frac{\rho_g}{\rho_l}$  est supposé petit, en étudiant la limite distinguée définie par  $1 - \alpha = O(\epsilon)$  (voir [8]).

Insistons aussi sur le fait que le système (2.4) repose sur l'étude des ondes de choc pour le système non conservatif (2.3). On montre en effet dans [7] que, si les termes de diffusion associés au système (2.3) sont ceux de (2.1), alors les relations de Rankine-Hugoniot pour les ondes de choc du système (2.3) sont identiques aux relations de Rankine-Hugoniot pour le système conservatif suivant:

$$\begin{aligned}
 (2.5.i) \quad & \partial_t(\alpha\rho_g) + \partial_x(\alpha\rho_g u_g) = 0 , \\
 (2.5.ii) \quad & \partial_t(\rho u) + \partial_x(\alpha\rho_g u_g^2 + (1-\alpha)\rho_l u_l^2 + p + \theta) = 0 , \\
 (2.5.iii) \quad & \partial_t(\rho e) + \partial_x(\alpha(\rho_g e_g + p)u_g + (1-\alpha)(\rho_l e_l + p)u_l + \theta u_l) = 0 , \\
 (2.5.iv) \quad & \partial_t((1-\alpha)\rho_l) + \partial_x((1-\alpha)\rho_l u_l) = 0 , \\
 (2.5.v) \quad & \partial_t(\rho_l u_l) + \partial_x\left(\frac{\rho_l u_l^2}{2} + p + \frac{\delta\theta_0(1-\alpha)^{\delta-1}}{(\delta-1)}\right) = 0 , \\
 (2.5.vi) \quad & \partial_t((1-\alpha)\rho_l \varepsilon_l^\varepsilon) + \partial_x((1-\alpha)\rho_l u_l \varepsilon_l^\varepsilon) = 0 ,
 \end{aligned}$$

très proche de (2.4).

Une des différences entre (2.4) et (2.5) concerne l'omission du terme de pression  $p$  dans l'équation de conservation de l'impulsion de la phase liquide (2.4.v). Ceci est licite car les ondes de taux de vide sont en général d'intensité beaucoup plus faible que les ondes de choc du gaz si bien qu'elles ne peuvent être observées que lorsque la pression  $p$  du gaz est essentiellement constante (typiquement dans une direction perpendiculaire à une détente quasi unidimensionnelle du gaz).

Notons enfin que, si la pression  $p$  est donnée par la loi d'un gaz parfait, le premier système de trois équations est exactement le système de la dynamique des gaz dans lequel la masse volumique  $\rho_g$  du gaz a été remplacée par la quantité  $\alpha\rho_g$ . En effet, pour un gaz parfait, nous avons :

$$\alpha p = (\gamma - 1) \left( \alpha\rho_g e_g - \frac{1}{2} \frac{(\alpha\rho_g u_g)^2}{\alpha\rho_g} \right) ,$$

qui est analogue à la relation entre pression, énergie totale, impulsion et masse volumique pour la dynamique des gaz usuelle.

L'avantage de la méthode que nous proposons ici, qui consiste à remplacer le système (2.3) par le système plus simple (2.4), est donc de donner deux systèmes entièrement découplés dont l'un est celui de la dynamique des gaz et l'autre un  $p$ -système plus une équation sur l'énergie de la phase liquide. Il est très facile de voir que le système (2.4) est hyperbolique, et de calculer analytiquement les valeurs et vecteurs propres de la matrice Jacobienne correspondante.

**Remarque 3.** Comme on l'a dit, le système (2.4) est obtenu par un développement limité pour les petites valeurs de  $1 - \alpha$ . Si l'on souhaite, comme c'est parfois le cas dans des simulations d'écoulements industriels, utiliser le modèle pour des taux de vide

$\alpha$  assez éloignés de 1, il est possible de rajouter les termes manquants dans le membre de droite du système (2.4) (comme par exemple le terme  $p\alpha_x$  au membre de droite de l'équation (2.4.ii)). On obtient alors un système qui reste consistant avec (2.3) même pour des valeurs de  $\alpha$  éloignées de 1, et dont le membre de gauche, identique à celui de (2.4), est un système hyperbolique constitué de deux sous-systèmes découplés, dont la résolution numérique est beaucoup plus simple que celle de (2.3). Le système ainsi complété, étudié dans [8], ressemble d'une certaine façon à celui que propose Toro [9], qui écrit lui aussi un modèle dont le membre de gauche est hyperbolique sous forme conservative, rejetant quelques termes au membre de droite; cette ressemblance n'est que partielle, puisque le système (2.4), à la différence du modèle de Toro [9], repose sur une analyse détaillée du modèle non conservatif (2.3), et notamment sur (2.5). •

**Remarque 4.** Le système simplifié (2.4) offre aussi l'avantage, du fait du découplage entre les deux phases, de simplifier les difficultés posées par la dégénérescence du modèle lorsque  $\alpha$  tend vers 1. En effet, dans le système (2.4), les valeurs liées aux gaz ne sont plus concernées par cette singularité. Pour le liquide, on utilise simplement une coupure: si  $1 - \alpha$  est inférieur à une certaine valeur ( $10^{-8}$  en pratique), on ne résoud plus les équations de la phase liquide dans (2.4) (les termes de trainée, qui agissent alors seuls, rapprochent la vitesse du liquide de celle du gaz, ce qui est satisfaisant dans cette situation). •

### 3. RESOLUTION NUMERIQUE

Nous considérons maintenant la solution numérique du système (2.4). Nous introduisons pour cela un solveur de Riemann approché de type Roe.

Commençons par exposer la méthode dans le cas monodimensionnel. Nous travaillerons dans le système de variables  $\mathbf{u}$  défini par:

$$\mathbf{u}^T = (\alpha\rho_g, \alpha\rho_g u_g, \alpha\rho_g e_g, 1 - \alpha, u_l, \varepsilon_l^e) ,$$

et nous noterons le système conservatif (2.4) sous la forme

$$(3.1) \quad \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} .$$

Soit  $\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{d} \mathbf{f}(\mathbf{u})$ , la matrice jacobienne de la fonction flux  $\mathbf{f}$  en  $\mathbf{u}$ . Le solveur de Roe repose sur une linéarisation des relations de saut:

$$(3.2) \quad \sigma(\mathbf{u}^D - \mathbf{u}^G) = \mathbf{f}(\mathbf{u}^D) - \mathbf{f}(\mathbf{u}^G) ,$$

sous la forme

$$(3.3) \quad \sigma(\mathbf{u}^D - \mathbf{u}^G) = \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{u}^G, \mathbf{u}^D)(\mathbf{u}^D - \mathbf{u}^G) ,$$



où la fonction matricielle  $(\mathbf{u}^G, \mathbf{u}^D) \mapsto \mathbf{A}(\mathbf{u}^G, \mathbf{u}^D)$  est choisie de sorte que les relations (3.2) et (3.3) soient équivalentes. Nous imposons d'autre part à cette dernière fonction matricielle de vérifier d'une part que, pour tous  $\mathbf{u}^G$  et  $\mathbf{u}^D$ , la matrice  $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{u}^G, \mathbf{u}^D)$  a 6 valeurs propres réelles et que ses vecteurs propres engendrent  $\mathbf{R}^6$ , d'autre part que, pour tout  $\mathbf{u}$ , on a  $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{A}(\mathbf{u})$ , pour assurer la consistance du schéma numérique.

S'inspirant de la linéarisée de Roe pour la dynamique des gaz [6], nous pouvons construire une linéarisée des relations de saut (3.2) qui satisfait ces deux dernières conditions sous la forme

$$(3.4) \quad \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{u}^G, \mathbf{u}^D) = \mathbf{A}(\bar{\mathbf{u}}) ,$$

où l'état moyen  $\bar{\mathbf{u}}$  est construit de la façon suivante:

$$(3.5.i) \quad \begin{cases} (\bar{\alpha}\rho_g)^{1/2} = \frac{(\alpha^D \rho_g^D)^{1/2} + (\alpha^G \rho_g^G)^{1/2}}{2} , \\ \bar{u}_g = \frac{(\alpha^D \rho_g^D)^{1/2} u_g^D + (\alpha^G \rho_g^G)^{1/2} u_g^G}{(\alpha^D \rho_g^D)^{1/2} + (\alpha^G \rho_g^G)^{1/2}} , \\ \bar{h}_g = \frac{(\alpha^D \rho_g^D)^{1/2} h_g^D + (\alpha^G \rho_g^G)^{1/2} h_g^G}{(\alpha^D \rho_g^D)^{1/2} + (\alpha^G \rho_g^G)^{1/2}} , \end{cases}$$

où:

$$h_g = e_g + \frac{p}{\rho_g} = \gamma \varepsilon_g + \frac{1}{2} u_g^2$$

est l'enthalpie spécifique du gaz, et:

$$(3.5.ii) \quad \begin{cases} 1 - \bar{\alpha} = \frac{(1 - \alpha^G) + (1 - \alpha^D)}{2} , \\ \bar{u}_l = \frac{u_l^G + u_l^D}{2} , \\ \bar{\varepsilon}_l^e = \frac{(\varepsilon_l^e)^G + (\varepsilon_l^e)^D}{2} . \end{cases}$$

Le schéma numérique (écrit ici sous forme non-conservative) prend la forme:

$$(3.6) \quad \mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \left( \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{u}_j^n, \mathbf{u}_{j+1}^n) \right)^- (\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_j^n) + \left( \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{u}_{j-1}^n, \mathbf{u}_j^n) \right)^+ (\mathbf{u}_j^n - \mathbf{u}_{j-1}^n) \right) ,$$

où  $\mathbf{u}_j^n$  est une approximation de la solution  $\mathbf{u}(x_j, t_n)$  de (2.4) au point  $x_j = j\Delta x$ ,  $t_n = n\Delta t$  et où

$$\tilde{\mathbf{A}}^+ = \frac{1}{2} \left( \tilde{\mathbf{A}} + |\tilde{\mathbf{A}}| \right) , \quad \tilde{\mathbf{A}}^- = \frac{1}{2} \left( \tilde{\mathbf{A}} - |\tilde{\mathbf{A}}| \right) .$$

**Remarque 5.** Pour le système conservatif (2.4), il est facile de vérifier que le schéma numérique (3.6) ci-dessus coïncide avec la méthode conservative basée sur le solveur de Roe. Cette similitude est encore vraie pour l'extension au second ordre (3.10) ci-dessous. Nous avons préféré écrire cette méthode sous forme non conservative car les approximations d'ordre supérieur du système (2.4) s'écrivent sous forme non-conservative (voir Remarque 3 et [8]). •

Nous cherchons ensuite à obtenir une approximation du second ordre qui conduit à des profils de choc plus raides et nous introduisons pour cela un schéma MUSCL, suivant les idées de Van Leer [10], utilisant notre solveur approché de type Roe. Etant donnée une approximation  $(\mathbf{u}_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$  de la fonction  $\mathbf{u}(x, t_n)$ , nous calculons les pentes:

$$(3.7) \quad \mathbf{s}_j^n = \frac{\mathbf{u}_{j+1}^n - \mathbf{u}_{j-1}^n}{2\Delta x},$$

qui sont corrigées avec un limiteur *min-mod* et nous introduisons une prédiction linéaire de  $\mathbf{u}(\cdot, t_n)$  de chaque coté des interfaces  $x_{j+1/2}$ , au temps  $t^n$ :

$$(3.8) \quad \mathbf{u}_{j \pm 1/2, \mp}^n = \mathbf{u}_j^n \pm \frac{\Delta x}{2} \mathbf{s}_j^n,$$

puis en  $t^{n+1/2}$ :

$$(3.9) \quad \mathbf{u}_{j \pm 1/2, \mp}^{n+1/2} = \mathbf{u}_{j \pm 1/2, \mp}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{u}_{j-1/2, +}^n, \mathbf{u}_{j+1/2, -}^n)(\mathbf{u}_{j+1/2, -}^n - \mathbf{u}_{j-1/2, +}^n).$$

Le schéma numérique devient alors:

$$(3.10) \quad \mathbf{u}_j^{n+1} = \mathbf{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \begin{aligned} & \left( \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{u}_{j+1/2, -}^{n+1/2}, \mathbf{u}_{j+1/2, +}^{n+1/2}) \right)^- (\mathbf{u}_{j+1/2, +}^{n+1/2} - \mathbf{u}_{j+1/2, -}^{n+1/2}) \\ & + \left( \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{u}_{j-1/2, -}^{n+1/2}, \mathbf{u}_{j-1/2, +}^{n+1/2}) \right)^- (\mathbf{u}_{j-1/2, +}^{n+1/2} - \mathbf{u}_{j-1/2, -}^{n+1/2}) \\ & + \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{u}_{j-1/2, +}^{n+1/2}, \mathbf{u}_{j+1/2, -}^{n+1/2})(\mathbf{u}_{j+1/2, -}^{n+1/2} - \mathbf{u}_{j-1/2, +}^{n+1/2}) \end{aligned} \right\}.$$

Venons-en maintenant à la description de la méthode utilisée en deux dimensions d'espace. La forme bidimensionnelle des équations (2.4) est:

$$(3.11.i) \quad \partial_t(\alpha \rho_g) + \partial_x(\alpha \rho_g u_g) + \partial_y(\alpha \rho_g v_g) = 0,$$

$$(3.11.ii) \quad \partial_t(\alpha \rho_g u_g) + \partial_x(\alpha \rho_g u_g^2) + \partial_y(\alpha \rho_g v_g) + \partial_x(\alpha p) = 0,$$

$$(3.11.iii) \quad \partial_t(\alpha \rho_g v_g) + \partial_x(\alpha \rho_g u_g v_g) + \partial_y(\alpha \rho_g v_g^2) + \partial_y(\alpha p) = 0,$$

$$(3.11.iv) \quad \partial_t(\alpha \rho_g e_g) + \partial_x(\alpha \rho_g e_g u_g) + \partial_y(\alpha \rho_g e_g v_g) + \partial_x(\alpha p u_g) + \partial_y(\alpha p v_g) = 0,$$

$$(3.11.v) \quad \partial_t((1-\alpha)\rho_l) + \partial_x((1-\alpha)\rho_l u_l) + \partial_y((1-\alpha)\rho_l v_l) = 0,$$

$$(3.11.vi) \quad \partial_t(u_l) + \partial_x\left(\frac{u_l^2}{2}\right) + \partial_y\left(\frac{u_l v_l}{2}\right) + \partial_x\left(\frac{\delta\theta_0(1-\alpha)^{\delta-1}}{\rho_l(\delta-1)}\right) = 0,$$

$$(3.11.vii) \quad \partial_t(\rho_l v_l) + \partial_x\left(\frac{u_l v_l}{2}\right) + \partial_y\left(\frac{v_l^2}{2}\right) + \partial_y\left(\frac{\delta\theta_0(1-\alpha)^{\delta-1}}{\rho_l(\delta-1)}\right) = 0,$$

$$(3.11.viii) \quad \partial_t((1-\alpha)\rho_l \varepsilon_l^\varepsilon) + \partial_x((1-\alpha)\rho_l \varepsilon_l^\varepsilon u_l) + \partial_y((1-\alpha)\rho_l \varepsilon_l^\varepsilon v_l) = 0.$$

Ces dernières équations sont invariantes par rotation et nous tirons parti de cette propriété pour nous ramener lors de la formulation volumes finis à la solution de problèmes de Riemann unidimensionnels (voir par exemple [4]). La méthode présentée ci-dessus s'étend donc sans difficulté.

Précisons cependant quelques détails, en écrivant d'abord le schéma bidimensionnel à l'ordre un. On cherche une approximation  $\mathbf{u}^n$  de la solution  $\mathbf{u}$  de (3.11) à la date  $t_n = n\Delta t$  qui est constante dans chaque cellule polygonale  $K$  du maillage. On calcule  $\mathbf{u}^{n+1}$  à partir de  $\mathbf{u}^n$  par:

$$(3.12) \quad \mathbf{u}_K^{n+1} = \mathbf{u}_K^n - \frac{\Delta t}{|K|} \sum_{A \in \partial K} |A| \phi_{\nu_{K,A}}(\mathbf{u}_K^n, \mathbf{u}_{K,A}^n) .$$

Ici,  $K$  désigne un polygône de la triangulation, la somme porte sur les différentes arêtes  $A$  de  $K$ ,  $\mathbf{u}_{K,A}^n$  désigne la valeur de  $\mathbf{u}^n$  dans le polygône voisin de  $K$  ayant  $A$  pour arête, et  $\nu_{K,A}$  est la normale extérieure à  $K$  sur l'arête  $A$ . On note que le schéma numérique (3.12) repose uniquement sur la résolution de problèmes unidimensionnels dans la direction des normales  $\nu_{K,A}$ , à l'aide de la fonction de flux  $\phi_{\nu_{K,A}}$  (voir [4]).

Pour passer à l'ordre deux, nous construisons maintenant une approximation de la solution qui, à chaque pas de temps, est affine dans chaque élément  $K$  de la triangulation et, en général, discontinue à travers les arêtes. Nous suivons ici une méthode introduite par Jouve et Le Floch [2].

Dans chaque élément  $K$ , nous écrivons:

$$(3.13) \quad \hat{\mathbf{u}}_K(x, y) = \mathbf{u}_K^n + p_K(x - x_K) + q_K(y - y_K)$$

où  $G_K = (x_K, y_K)$  est le barycentre du polygône  $K$ . Le gradient  $(\nabla \mathbf{u})_K = (p_K, q_K)^T$  est calculé par:

$$(3.14) \quad p_K = \frac{1}{|K|} \sum_{A \in \partial K} |A| \mathbf{u}_A^n \nu_{K,A}^x, \quad q_K = \frac{1}{|K|} \sum_{A \in \partial K} |A| \mathbf{u}_A^n \nu_{K,A}^y ,$$

où  $\nu_{K,A} = (\nu_{K,A}^x, \nu_{K,A}^y)^T$  et où les valeurs moyennes  $\mathbf{u}_A^n$  au centre des arêtes sont calculées comme les états moyens (définis par (3.5)) entre les états  $\mathbf{u}_K^n$  et  $\mathbf{u}_{K,A}^n$ .

Les valeurs de  $\hat{\mathbf{u}}_K$  aux milieux des arêtes sont utilisées comme arguments des fonctions de flux  $\phi_{\nu_{K,A}}$ . Auparavant, les pentes  $p_K$  et  $q_K$  calculées ci-dessus sont limitées de façon à ce que, dans chaque polygône  $K$ , on ait:

$$\min_{K' \text{ voisin de } K} \mathbf{u}_{K'}^n \leq \hat{\mathbf{u}}_K \leq \max_{K' \text{ voisin de } K} \mathbf{u}_{K'}^n .$$

Pour cela, on remarque qu'une fonction affine sur un polygône atteint ses extrema aux sommets, et on corrige chaque composante des pentes  $p_K$  et  $q_K$  en les multipliant par un coefficient *ad-hoc*. Pour la composante  $i$ , posons:

$$\hat{\mathbf{u}}_{K,i}^M = \sup_{(x,y) \in K} \hat{\mathbf{u}}_{K,i}(x, y) , \quad \hat{\mathbf{u}}_{K,i}^m = \inf_{(x,y) \in K} \hat{\mathbf{u}}_{K,i}(x, y) ,$$

et:

$$\mathbf{u}_{K,i}^M = \sup_{K' \text{ voisin de } K} \mathbf{u}_{K',i}^n, \quad \mathbf{u}_{K,i}^m = \inf_{K' \text{ voisin de } K} \mathbf{u}_{K',i}^n.$$

Nous posons maintenant:

$$\beta_{K,i}^M = \sup \left( 0, \frac{\mathbf{u}_{K,i}^M - \mathbf{u}_{K,i}^n}{\hat{\mathbf{u}}_{K,i}^M - \mathbf{u}_{K,i}^n} \right), \quad \beta_{K,i}^m = \sup \left( 0, \frac{\mathbf{u}_{K,i}^m - \mathbf{u}_{K,i}^n}{\hat{\mathbf{u}}_{K,i}^m - \mathbf{u}_{K,i}^n} \right),$$

et:

$$\beta_{K,i} = \inf (1, \beta_{K,i}^m, \beta_{K,i}^M),$$

et nous remplaçons les pentes  $p_{K,i}$  et  $q_{K,i}$  par  $\beta_{K,i}p_{K,i}$  et  $\beta_{K,i}q_{K,i}$  respectivement.

#### 4. ILLUSTRATION NUMERIQUE

Nous présentons ci-dessous les résultats obtenus avec la méthode présentée plus haut pour deux types d'écoulement diphasique.

##### 4.1. Propagation d'une onde acoustique

La vitesse du son dans un milieu diphasique est modifiée par les échanges de masse et d'impulsion entre les deux phases. En considérant uniquement les échanges d'impulsion, nous donnons ci-dessous une expression de la vitesse du son dans un milieu diphasique modifiée par l'inertie des particules, avant de comparer ce résultat à celui d'une simulation numérique.

Nous supposons que les particules sont très fines. Du fait des forces de trainée, les vitesses du gaz et des particules sont très proches: nous les supposons égales dans le raisonnement qui suit. En négligeant la correction de pression due à la présence des gouttes, la conservation de la masse totale et de l'impulsion totale de l'écoulement diphasique s'écrivent alors:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} &= 0, \\ \partial_t \rho \mathbf{u} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \nabla p &= 0. \end{aligned}$$

Linéarisant ce système autour d'un état constant  $(\rho^0, \mathbf{0})$ , nous posons  $\rho = \rho^0 + \rho'$ ,  $p = p^0 + p'$ , et obtenons:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho' + \rho^0 \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + \frac{1}{\rho^0} \nabla p &= 0, \end{aligned}$$

d'où:

$$\partial_t^2 \rho' - \Delta p' = 0.$$

Pour déterminer la vitesse du son dans ce milieu diphasique, nous allons relier les variations  $p'$  de la pression du gaz aux variations  $\rho'$  de la masse volumique totale. Nous obtiendrons une équation des ondes sous la forme:

$$\partial_t^2 p' - c^2 \Delta p' = 0 ,$$

pour la vitesse du son  $c$  donnée par:

$$(4.1) \quad c = \frac{c_g}{\sqrt{\alpha^2 + \frac{\alpha(1-\alpha)\rho_l}{\rho_g}}} ,$$

où  $c_g$  est la vitesse du son dans le gaz.

Pour obtenir cette formule, considérons une onde acoustique dans le milieu diphasique. Nous notons  $\rho'_g$  et  $\alpha'$  les variations de la masse volumique du gaz et du taux de vide:  $\rho_g = \rho_g^0 + \rho'_g$  et  $\alpha = \alpha^0 + \alpha'$ . Sous l'effet de l'onde acoustique, un élément de volume  $v^0$  du milieu diphasique va changer de volume; notons  $v'$  sa variation. La conservation de la masse de la phase liquide s'écrit:

$$\rho_l(1 - \alpha^0)v^0 = \rho_l(1 - \alpha^0 - \alpha')(v^0 + v') ,$$

d'où, au premier ordre:

$$v'(1 - \alpha^0) - \alpha'v^0 = 0 .$$

De même, la conservation de la masse de la phase gazeuse s'écrit:

$$\alpha^0 \rho_g^0 = (\alpha^0 + \alpha')(\rho_g^0 + \rho'_g)(v^0 + v') ,$$

soit:

$$\alpha' \rho_g^0 v^0 + \rho'_g \alpha^0 v^0 + v' \alpha^0 \rho_g^0 = 0 .$$

Eliminant  $v'$  entre ces deux équations, nous obtenons:

$$\alpha' = -\alpha^0(1 - \alpha^0) \frac{\rho'_g}{\rho_g^0} .$$

Alors, la variation de la masse volumique totale  $\rho = \alpha \rho_g + (1-\alpha)\rho_l$  (on omet maintenant les indices 0 pour simplifier) s'exprime en fonction de la variation de la masse volumique de la phase gazeuse, car:

$$\rho' = \alpha \rho'_g + \alpha' \rho_g - \alpha' \rho_l = \left( \alpha^2 + \frac{\alpha(1-\alpha)\rho_l}{\rho_g} \right) \rho'_g .$$

Nous pouvons enfin relier les variations de la pression du gaz aux variations de la masse volumique totale  $\rho$ . En effet les ondes acoustiques sont isentropiques, si bien que:

$$p' = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho_g} \right)_s \rho'_g = c_g^2 \rho'_g ,$$

d'où:

$$p' = \left( \frac{c_g^2}{\alpha^2 + \frac{\alpha(1-\alpha)\rho_l}{\rho_g}} \right) \rho' ,$$

ce qui donne la formule annoncée pour la vitesse du son dans le milieu diphasique.

Nous avons comparé la valeur fournie par cette formule au résultat d'une simulation numérique de la propagation du son dans un milieu diphasique. Pour cela, nous avons simulé un tube unidimensionnel dont la condition aux limites à gauche est une oscillation de pression de faible amplitude à  $1\text{ kHz}$ . On peut ensuite mesurer très simplement la vitesse du son à l'aide d'un double décimètre sur un profil instantané de la pression dans le tube (voir Figures 1 à 3; le tube a une longueur de 50 centimètres). Nous avons effectué les calculs pour différentes valeurs du taux de vide et du diamètre des gouttes. Les résultats obtenus montrent une dépendance de la vitesse du son par rapport au taux de vide  $\alpha$  qui correspond très bien au modèle analytique (4.1). On observe de plus sur les planches que le signal s'amortit d'autant plus que le rayon  $r$  des gouttes est plus grand (au moins tant que l'approximation d'égalité des vitesses des deux phases est valable).

**Figure 1:** Propagation d'une onde acoustique dans un mélange diphasique ( $\alpha = 0.999$ ,  $r = 10^{-7} m$ ): vitesse du son observée:  $247 m/s$ , vitesse du son prédite par (4.1):  $245 m/s$ .

**Figure 2:** Propagation d'une onde acoustique dans un mélange diphasique ( $\alpha = 0.99$ ,  $r = 10^{-11} m$ ): vitesse du son observée:  $105 m/s$ , vitesse du son prédite par (4.1):  $105 m/s$ .

**Figure 3:** Propagation d'une onde acoustique dans un mélange diphasique ( $\alpha = 0.99$ ,  $r = 10^{-7}$  m): vitesse du son observée: 106.5 m/s, vitesse du son prédite par (4.1): 105 m/s.

#### 4.2. Ecoulement dans une tuyère

Nous considérons maintenant deux situations d'écoulement d'un mélange diphasique dans une tuyère.

Le premier cas de calcul, présenté sur les Figures 4 à 6, correspond à des gouttes extrêmement fines (de rayon  $10^{-9}$  m). Le gaz et les gouttes sont injectés dans la tuyère à la vitesse de 20 mètres par seconde. Les gaz sont accélérés par la détente qui se forme à la sortie du col. Les forces de traînée sont dans ce cas très importantes par rapport à l'inertie des gouttes, si bien que les vitesses des gouttes et du gaz s'égalisent très rapidement. On observe que les isovaleurs de la pression du gaz et les vitesses du gaz sont semblables à celles que l'on aurait obtenues pour un écoulement gazeux monophasique. Les isovaleurs du taux de vide montrent que le taux de vide diminue très légèrement sur la partie supérieure de la tuyère juste avant le col : en cet endroit, le gaz est plus comprimé et comparativement, les gouttes incompressibles occupent un plus grand volume.



**Figure 4:** Ecoulement diphasique dans une tuyère ( $r = 10^{-9} m$ ): champ de pression du gaz.

**Figure 5:** Ecoulement diphasique dans une tuyère ( $r = 10^{-9} m$ ): champ des vitesses du gaz.

**Figure 6:** Ecoulement diphasique dans une tuyère ( $r = 10^{-9} m$ ): isovaleurs du taux de vide  $\alpha$ .

Le second cas de calcul est plus intéressant du point de vue des aspects diphasiques. Ici les gouttes ont un rayon de 50 micromètres, le gaz est injecté à la vitesses de  $300 m.s^{-1}$  alors que les gouttes sont injectées à  $20 m.s^{-1}$ . Les isovaleurs de la pression du gaz et les vitesses du gaz sont à nouveau semblables à celles d'un écoulement monophasique. Par contre les isovaleurs du taux de vide et le fichier de vitesse de la phase liquide montrent un comportement propre pour les gouttes : les gouttes qui viennent du haut du convergent sont déviées par l'écoulement gazeux et la géométrie

du convergent. Au niveau du col, du fait de leur inertie, ces gouttes ont tendance à continuer tout droit et au col, leurs vitesses ne sont pas alignées avec l'axe de la tuyère comme pour le gaz. On observe que le taux de vide au col est plus important sur la partie supérieure de la tuyère que sur l'axe : les gouttes s'étant regroupées au centre, la fraction volumique de gaz sur la paroi de la tuyère est plus importante que sur l'axe. (Figures 7 à 10).

Ces résultats numériques montrent que le modèle proposé permet de reproduire des comportements physiques attendus dans ce type de géométrie.

**Figure 7:** Ecoulement diphasique dans une tuyère ( $r = 50 \mu m$ ): champ de pression du gaz.

**Figure 8:** Ecoulement diphasique dans une tuyère ( $r = 50 \mu m$ ): agrandissement du champ des vitesses du gaz au col.

**Figure 9:** Ecoulement diphasique dans une tuyère ( $r = 50 \mu m$ ): isovaleurs du taux de vide  $\alpha$ , avec agrandissement au col.

**Figure 10:** Ecoulement diphasique dans une tuyère ( $r = 50 \mu m$ ): agrandissement du champ des vitesses du liquide au col.

## 5. CONCLUSIONS

Nous avons présenté une modélisation Eulérienne des écoulements diphasiques constitués d'un brouillard de gouttes suspendu dans une atmosphère gazeuse, bien posée d'un point de vue mathématique. Pour simplifier la résolution numérique de ce modèle par rapport aux méthodes étudiées dans des travaux précédents, nous avons introduit un modèle approché qui décrit de façon satisfaisante les ondes de choc rencontrées dans de tels écoulements diphasiques. De plus, ce modèle simplifié est constitué

de deux systèmes hyperboliques à trois équations qui sont découplés, et dont le premier est analogue au système de la dynamique des gaz. La résolution de ce modèle par une méthode décentrée de type MUSCL peut donc se faire par l'insertion de modules simples dans un code de calcul d'écoulements gazeux déjà existant.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. FEZOU, B. LARROUTUROU, "On the equations of multi-component perfect or real gas flow", Nonlinear hyperbolic problems, Carasso Charrier Hanouzet & Joly éd., Lecture notes in mathematics, **1402**, pp. 69-98, Springer Verlag, Heidelberg, (1989).
- [2] F. JOUVE, P. LE FLOCH, *Communication privée*.
- [3] B. LARROUTUROU, "How to preserve the mass fraction positivity when computing compressible multi-component flows", J. Comp. Phys., **95**, (1), pp. 59-84, (1991).
- [4] B. LARROUTUROU, "Remarks on finite-volume approximations of multi-dimensional and multi-species flows", Rapport CERMICS, (1992), à paraître.
- [5] P. A. RAVIART, L. SAINSAULIEU, "Mathematical and numerical modelling of two-phase flows", Computing methods in applied sciences and engineering, Glowinski éd., pp. 119-132, Nova Science Publisher, New-York, (1991).
- [6] P. L. ROE, "Approximate Riemann solvers, parameters vectors and difference schemes", J. Comp. Phys., **43**, pp. 357-372, (1981).
- [7] L. SAINSAULIEU, "Modélisation, analyse mathématique et numérique d'écoulements diphasiques constitués d'un brouillard de gouttes", Thèse, Ecole Polytechnique, (1991).
- [8] L. SAINSAULIEU, "Finite-volume approximation of two-phase fluid flows based on an approximate Roe-type Riemann solver", Rapport CERMICS 92-10, (1992).
- [9] E. F. TORO, "Riemann-problem based techniques for computing reactive two-phase flows", "Numerical combustion", Dervieux Larrourou éd., pp. 472-481, Lecture Notes in Physics, **351**, Springer-Verlag, Heidelberg, (1989).
- [10] B. VAN LEER, "Towards the ultimate conservative difference scheme: III. Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow", J. Comp. Phys., **23**, pp. 263-275, (1977).