

# DIVERSES FORMULATIONS DU COUPLAGE ENTRE MÉTHODE VOLUMIQUE ET MÉTHODE INTÉGRALE POUR L'ÉQUATION DE HELMHOLTZ ET L'ÉLECTROMAGNÉTISME

Armel de La Bourdonnaye  
CERMICS  
INRIA  
06902 Sophia-Antipolis Cedex  
France

## **Abstract**

Dans ce rapport nous analysons le couplage entre équations intégrales et méthodes volumiques pour deux problèmes de propagation en régime harmonique. Nous montrons que celui-ci peut se traiter par analogie avec les méthodes de sous-domaines en utilisant le complément de Schur. De plus, l'expression de la partie du complément qui vient des équations intégrales peut s'exprimer de façon exacte en fonction des opérateurs intégraux de la théorie de la diffraction. Ceci nous permet de prédire le comportement de la méthode de Schur tant primale que duale du point de vue du conditionnement. Nous joignons en annexe une note qui souligne le comportement différent de l'électromagnétisme et de l'acoustique de ce point de vue.

# SOME FORMULATIONS COUPLING VOLUMIC AND INTEGRAL EQUATION METHODS FOR HELMHOLTZ EQUATION AND ELECTROMAGNETISM

## **Résumé**

In this paper, we study the coupling between integral equations and volumic methods for two problems of propagation in frequency domain. We show that it can be viewed as a multidomain problem and we treat it using the Schur complement technique. The complement coming from the integral equation part is expressed with the integral operators of the scattering theory. This allows us to predict the behavior of the Schur method, either primal or dual, as far as its convergence speed is concerned. We add in appendix a note which explains the difference of behavior between electromagnetism and acoustics from this point of view.

# Introduction

Dans les problèmes de diffraction par un objet borné d'une onde acoustique ou électromagnétique de fréquence donnée, plusieurs méthodes sont utilisables. Lorsque l'objet est complexe, on peut décomposer le problème en un problème volumique qui tienne compte de l'hétérogénéité du matériau et un problème surfacique qui prenne en compte tout l'extérieur de l'objet à l'aide d'une formulation utilisant des équations intégrales. Des travaux dans ce sens sont présentés dans [4] ou [7]. Cette manière de procéder ressemble à la décomposition de domaine. En effet, nous avons ici deux domaines; l'un est borné et contient l'objet diffractant et l'autre est son complémentaire. L'utilisation de la méthode du complément de Schur décrite par exemple dans [6] est dans ce cas intéressante. Nous montrons ici que l'on peut exprimer la partie de ce complément qui traite le problème extérieur de manière très simple à l'aide des propriétés connues du projecteur de Calderon. On peut même agir de manière à modifier ce complément pour espérer améliorer la vitesse de convergence de l'algorithme de résolution sous-jacent. Nous allons commencer par faire l'exposé dans le cadre de l'acoustique. Nous verrons ensuite le cas de l'électromagnétisme.

## 1 Position du problème

Nous allons ici présenter le travail dans le cadre de la diffraction acoustique sur un objet dur. Soit  $\Omega_i$  un ouvert borné dont le bord  $\Gamma$  est régulier. Cet ouvert est placé à l'intérieur d'une

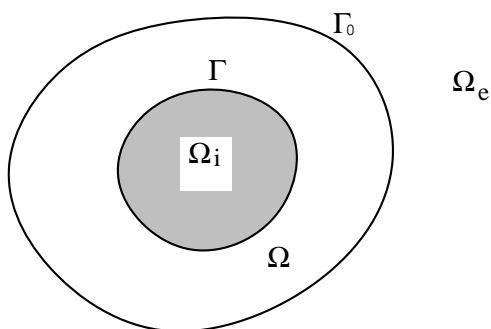


FIG. 1 - *La situation géométrique*

surface  $\Gamma_0$  sur laquelle s'exercera le couplage. L'ouvert entre les deux surfaces est noté  $\Omega$ , celui à l'extérieur de  $\Gamma_0$  est noté  $\Omega_e$ . Pour l'acoustique le problème s'écrit :

Soit  $g$  dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$ .

Trouver  $u$  dans  $H_{loc}^1(\Omega \cup \Gamma_0 \cup \Omega_e)$  vérifiant

- l'équation de Helmholtz  $\Delta u + k^2 u = 0$
- la condition aux limites  $\frac{\partial u}{\partial n} = g$  sur  $\Gamma$
- la condition de radiation de Sommerfeld  $\frac{\partial u}{\partial r} + iku = o\left(\frac{1}{r}\right)$  pour  $r$  tendant vers l'infini.

Ici,  $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$  est donné. A l'intérieur de  $\Omega$  l'opérateur peut être un peu plus compliqué. Par exemple  $k$  peut varier. De même on peut remplacer la condition aux limites de Neumann

par une condition de Dirichlet. On peut même envisager un problème non-linéaire à l'intérieur de  $\Omega$ .

Le problème est découpé en deux sous-problèmes. L'un dans  $\Omega$  et l'autre dans  $\Omega_e$ . Il y a évidemment plusieurs façons de faire ce découpage. On peut par exemple résoudre de chaque côté un problème de Dirichlet avec même donnée sur  $\Gamma_0$  et dire que sur l'interface les dérivées normales coïncident, on peut aussi faire le contraire. Nous allons étudier ces deux manières de faire du point de vue de leur formulation mathématique et leur efficacité attendue sur le plan numérique. Auparavant nous allons rappeler quelques résultats sur les équations intégrales et les projecteurs de Calderon.

## 2 Rappels sur des opérateurs intégraux

Soit  $G(r) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$  le noyau de Green de l'équation de Helmholtz. Nous définissons alors quatre opérateurs intégraux.

**Définition 1**

$$\begin{aligned} \text{Pour } p \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad Sp(x) &= \int_{\Gamma} G(|x-y|)p(y)dy \\ \text{Pour } p \in H^{-1/2}(\Gamma), \quad Kp(x) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_x}(|x-y|)p(y)dy \\ \text{Pour } \phi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad K'\phi(x) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_y}(|x-y|)\phi(y)dy \\ \text{Pour } \phi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad D\phi(x) &= \oint_{\Gamma} \frac{\partial^2}{\partial n_x \partial n_y} G(|x-y|)\phi(y)dy \end{aligned}$$

On sait que  $S, K, K'$  sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre -1 et que  $D$  est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre +1 (cf. [2]). Il est facile de voir que  $K$  et  $K'$  sont transposés l'un de l'autre et que  $D$  et  $S$  sont symétriques.

Nous allons rappeler quelques propriétés des projecteurs de Calderon. On définit les deux opérateurs  $P^+$  et  $P^-$  comme suit, ils sont deux projecteurs complémentaires de  $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$  sur lui-même. Ces deux opérateurs sont couramment appelés dans la littérature *Projecteurs de Calderon*.

**Définition 2** Les projecteurs de Calderon  $P^+$  et  $P^-$  sont définis par :

$$P^{\pm} = \begin{pmatrix} \frac{I}{2} \pm K' & \mp S \\ \pm D & \frac{I}{2} \mp K \end{pmatrix}. \quad (1)$$

On sait que ce sont deux projecteurs complémentaires de  $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$  sur lui-même (i.e.  $P^+ + P^- = I, P^{\pm 2} = P^{\pm}$ ). Il en découle que

$$\begin{cases} SD &= K'^2 - \frac{I}{4} \\ DS &= K^2 - \frac{I}{4} \\ K'S &= SK \\ DK' &= KD \end{cases}$$

Ces deux projecteurs sont associés aux problèmes extérieurs et intérieurs de l'équation de Helmholtz. Plus précisément, l'image de  $P^+$  est l'ensemble des couples  $\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right)$  trace et trace normale d'une solution au problème de Helmholtz extérieur alors que son noyau est l'ensemble des couples  $\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right)$  trace et trace normale d'une solution au problème de Helmholtz intérieur. On a la situation symétrique pour  $P^-$ . Ainsi,  $(\alpha, \lambda) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$  est le couple trace et trace normale d'une solution du problème de Helmholtz extérieur si et seulement si

$$P^+ \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \lambda \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Toutes ces propriétés sont rappelées dans ([2]) par exemple.

### 3 Formulation primale du couplage

Dans cette formulation on résout d'abord un problème de Dirichlet pour chacun des deux sous-problèmes avec la même donnée sur  $\Gamma_0$ , puis on écrit que les dérivées normales des solutions extérieures et intérieures sont les mêmes. Afin de revenir à un problème homogène, notons  $u_0$  la solution de l'équation de Helmholtz dans  $\Omega$  vérifiant

$$\Delta u_0 + k^2 u_0 = 0 \quad (3)$$

$$u_0|_{\Gamma_0} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial n}|_{\Gamma} = g \quad (5)$$

Alors

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_0} = \frac{\partial u_0}{\partial n}|_{\Gamma_0} + S_i(u) = S_i(u + u_0) \quad (6)$$

où  $S_i$  est l'opérateur de Steklov-Poincaré intérieur qui, à  $u \in H^{1/2}(\Gamma_0)$  associe la dérivée normale de la solution de l'équation de Helmholtz dans  $\Omega$  avec 0 comme condition de Neumann sur  $\Gamma$  et  $u_0$  comme condition de Dirichlet sur  $\Gamma_0$ :

$$S_i : H^{1/2}(\Gamma_0) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_0) \quad (7)$$

$$u \mapsto \frac{\partial v}{\partial n} \quad (8)$$

où  $v$  vérifie :

$$v \in H^1(\Omega) \quad (9)$$

$$\Delta v + k^2 v = 0 \text{ dans } \Omega \quad (10)$$

$$v|_{\Gamma_0} = u \quad (11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma} = 0 \quad (12)$$

De même, pour le problème extérieur, on a

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma_0} = S_e(u). \quad (13)$$

Où  $S_e$  à une définition similaire à  $S_i$  mais pour le problème extérieur. Grâce aux rappels de la section précédente on peut écrire

$$S_e = -S^{-1}\left(\frac{I}{2} - K'\right) = \left(\frac{I}{2} + K\right)^{-1}D = D - \left(\frac{I}{2} - K\right)S^{-1}\left(\frac{I}{2} - K'\right). \quad (14)$$

Le couplage s'exprime alors par :

$$\int_{\Gamma_0} (S_e - S_i)(u)v = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u_0}{\partial n} \Big|_{\Gamma_0} v \forall v \in H^{1/2}(\Gamma_0) \quad (15)$$

On a la proposition suivante :

**Proposition 1** *La formulation (15) est symétrique.*

En effet,  $S_e$  est symétrique d'après la dernière égalité de la formule (14) et  $S_i$  l'est comme on peut le vérifier en utilisant

$$\int_{\Gamma_0} S_i(u)v = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v + \Delta uv = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v - k^2 uv \quad (16)$$

La symétrie de la formulation est importante, comme il a été montré par V. Levillain dans [7], pour la bonne qualité des solutions numériques en particulier au voisinage des fréquences singulières du problème intérieur. Pour la discrétisation du problème, on va utiliser la proposition suivante.

**Proposition 2** *La formulation (15) est la condensation sur  $\Gamma_0$  de la formulation variationnelle suivante : trouver  $(u, \lambda)$ ,  $\forall (v, \mu) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma_0)$ ,*

$$\int_{\Omega} (-\nabla u \cdot \nabla v + k^2 uv) + \int_{\Gamma_0} \left(\frac{I}{2} - K\right) \lambda v + \int_{\Gamma_0} Duv + \int_{\Gamma_0} \left(\frac{I}{2} - K'\right) u \mu + \int_{\Gamma_0} S \lambda \mu = \int_{\Gamma} gv \quad (17)$$

Preuve :

Pour le voir il suffit d'éliminer dans la formule (17) la variable  $\lambda$  et ce qui concerne  $u$  à l'intérieur de  $\Omega$  en intégrant par parties. En intégrant par parties sur  $\Omega$  il vient

$$\int_{\Omega} (-\nabla u \cdot \nabla v + k^2 uv) - \int_{\Gamma} gv = - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial n} v = - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u_0}{\partial n} v - S_i(u)v \quad (18)$$

D'autre part, en prenant  $\mu = S^{-1}\left(\frac{I}{2} - K'\right)v$ , il vient :

$$\int_{\Gamma_0} \left(\frac{I}{2} - K\right) \lambda v = \int_{\Gamma_0} S \lambda \mu \quad (19)$$

$$= - \int_{\Gamma_0} \left(\frac{I}{2} - K'\right) u \mu \quad (20)$$

$$= - \int_{\Gamma_0} \left(\frac{I}{2} - K\right) S^{-1} \left(\frac{I}{2} - K'\right) uv \quad (21)$$

$$= \int_{\Gamma_0} (S_e - D) uv \quad (22)$$

En prenant maintenant  $\mu = 0$ , on retrouve finalement bien l'expression (15).  $\square$

Pour discrétiser  $S_i$  nous allons utiliser cette formulation variationnelle. La méthode utilisée est celle des éléments finis. La matrice qui représente l'intégrale sur  $\Omega$  est  $\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$  où la

première colonne représente les degrés de liberté de  $\Omega$  qui ne sont pas sur l'interface  $\Gamma_0$  et la deuxième colonne représente ceux de l'interface. Alors, il est facile de voir que la matrice qui discrétise  $S_i$  est  $C - B^T A^{-1} B$ . Cette matrice est donc symétrique. Elle est appelée complément de Schur dans la littérature (cf. [1] ou [6] par exemple).

Pour  $S_e$  on pourrait raisonner de la même manière et, en confondant la notation des opérateurs et des matrices qui les représentent on aurait le complément de Schur du problème extérieur  $S_e = D - (\frac{I}{2} - K)S^{-1}(\frac{I}{2} - K')$ . Cependant, vu le coût de calcul et de stockage de ces matrices d'équations intégrales il vaut mieux directement utiliser  $S_e = -S^{-1}(\frac{I}{2} - K')$  et discrétiser cette formule. On ne calcule en effet que deux matrices d'équations intégrales au lieu de trois. De plus cette manière de faire permet de calculer  $S_e^{-1}$  plus facilement si c'est nécessaire. Cependant il faut faire attention au fait que la matrice n'est plus symétrique même si elle discrétise un opérateur symétrique. On peut donc être amené à la symétriser de force. Du point de vue de l'efficacité numérique on est amené à faire la remarque suivante :

**Remarque 1** *Comme  $S_i$  et  $S_e$  sont continus de  $H^{1/2}(\Gamma_0)$  dans  $H^{-1/2}(\Gamma_0)$  et d'inverses continus, la matrice de couplage est de spectre très dense dans sa partie supérieure. Il en résulte que les méthodes itératives utilisées pour résoudre le problème à l'interface vont converger de façon très lente si elles ne sont pas préconditionnées.*

On peut se référer à [8] pour la justification d'une telle assertion dans le cas d'opérateurs elliptiques. Nous avons donné pour notre part dans [4] un résultat allant aussi dans ce sens pour l'acoustique. Pour préconditionner, on peut multiplier par  $S$  la formulation du couplage, on a alors un opérateur du type Fredholm qui est déjà mieux conditionné. Cependant, il faut faire attention à ne pas perdre la symétrie par cette multiplication. D'autre part le système risque d'être singulier lorsque  $k$  est une fréquence de résonance du problème intérieur à  $\Gamma_0$ . Cette remarque nous amène à rechercher une autre manière de formuler le couplage que nous nommerons duale.

## 4 Formulation duale du couplage

Nous allons ici faire le contraire de ce que nous avons fait dans la section précédente. Nous résolvons donc dans chaque sous-domaine un problème de Neumann et le couplage est réalisé en disant que les traces des solutions intérieures et extérieures coïncident. Le terme de dual vient du fait que la variable de couplage n'est plus dans  $H^{1/2}(\Gamma_0)$ , mais dans son dual. En reprenant les notations de la section précédente, nous avons comme formulation du couplage : pour tout  $\mu \in H^{-1/2}(\Gamma_0)$ ,

$$\int_{\Gamma_0} (S_e^{-1} - S_i^{-1})(\lambda)\mu = \int_{\Gamma_0} u_0 \mu \quad (23)$$

Cette formulation est évidemment symétrique pour les mêmes raisons que la formulation primale. Pour calculer numériquement  $S_i^{-1}\mu$ , le plus simple est de résoudre le problème de Neumann ce qui revient à inverser la matrice  $\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$  de la section précédente et de ne conserver que les degrés de liberté situés sur  $\Gamma_0$ . Pour  $S_e^{-1}$  on peut utiliser la formule discrétisée  $S_e^{-1} = -(\frac{I}{2} - K')^{-1}S$  en prenant soin d'assurer la symétrie numérique. Pour le conditionne-

ment, on peut faire la remarque suivante :

**Remarque 2** Comme  $S_i$  et  $S_e$  sont bicontinus de  $H^{1/2}(\Gamma_0)$  dans  $H^{-1/2}(\Gamma_0)$  la matrice de couplage est de spectre creux dans sa partie supérieure. Il en résulte que les méthodes itératives utilisées pour résoudre le problème à l'interface vont converger de façon assez rapide.

## 5 Application à l'électromagnétisme

Nous gardons ici la même configuration géométrique. Nous supposons que  $\Omega_i$  est un corps métallique. Pour toute cette partie nous nous appuyons fortement sur les travaux de V. Levillain [7] et M. Cessenat [3]. Précisons quelques notations.

$$H_{rot}(\Omega) = \left\{ F, F \in L^2(\Omega)^3, rot F \in L^2(\Omega)^3 \right\}$$

$$H_{div}^{-1/2}(\Gamma_0) = \left\{ j, j \in TH^{-1/2}(\Gamma_0), div_{\Gamma_0} j \in TH^{-1/2}(\Gamma_0) \right\}$$

$$H_{rot}^{-1/2}(\Gamma_0) = \left\{ j, j \in TH^{-1/2}(\Gamma_0), rot_{\Gamma_0} j \in TH^{-1/2}(\Gamma_0) \right\}$$

Notons que les deux derniers espaces sont duaux l'un de l'autre au sens du produit scalaires  $L^2$ . Le problème à résoudre est :

Trouver  $(F, H)$  dans  $H_{rot,loc}(\mathbf{R}^3 - \Omega_i)$  vérifiant :

$$rot F - H = 0 \quad \text{hors de } \Omega_i, \quad (24)$$

$$rot H - k^2 F = 0 \quad \text{hors de } \Omega_i, \quad (25)$$

$$H \wedge n = -H_{inc} \wedge n \quad \text{sur } \Gamma_0, \quad (26)$$

$$n \wedge F = -n \wedge F_{inc} \quad \text{sur } \Gamma_0 \text{ et } \Gamma, \quad (27)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r \left( \frac{\partial F}{\partial r} - ikF \right) = 0 \quad \text{à l'infini.} \quad (28)$$

Comme dans le cas de l'acoustique nous allons définir quelques opérateurs.

$$P_1 : H_{div}^{-1/2}(\Gamma_0) \rightarrow H_{div}^{1/2}(\Gamma_0)$$

$$j \rightarrow n \wedge \int_{\Gamma_0} \nabla_y G(|x-y|) \wedge j dy$$

et

$$P_2 : H_{div}^{-1/2}(\Gamma_0) \rightarrow H_{div}^{-1/2}(\Gamma_0)$$

$$j \rightarrow n \wedge \left( \int_{\Gamma_0} G(|x-y|) \wedge j dy + \frac{\nabla_{\Gamma_0}}{k^2} \int_{\Gamma_0} G(|x-y|) div_{\Gamma_0} j dy \right)$$

Nous définissons alors de même deux projecteurs de Calderon.

$$P^\pm = \begin{pmatrix} \frac{I}{2} \pm P_1 & \pm k^2 P_2 \\ \pm P_2 & \frac{I}{2} \pm P_1 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Ces deux projecteurs agissent de  $(H_{div}^{-1/2})^2$  dans lui-même. Le fait que ce soient des projecteurs implique en particulier que

$$P_1 P_2 + P_2 P_1 = 0 \quad (30)$$

et

$$\frac{I}{4} = P_1^2 + k^2 P_2^2. \quad (31)$$

Lorsque l'on note  $m = n \wedge F$  et  $j = H \wedge n$  sur  $\Gamma_0$ , les solutions du problème extérieur sont caractérisées par :

$$\begin{pmatrix} j \\ m \end{pmatrix} = P^+ \begin{pmatrix} j \\ m \end{pmatrix} \quad (32)$$

Le couplage s'écrit alors, lorsque l'on prend la formulation  $S$  de Levillain (cf. [7] p.22)

$$-rotrotF + k^2 F = 0 \text{ sur } \Omega \quad (33)$$

$$rotF \wedge n - k^2 P_2(n \wedge F) + \left(\frac{I}{2} - P_1\right)(j) = -H_{inc} \wedge n \quad (34)$$

$$-\left(\frac{I}{2} + P_1\right)(n \wedge F) - P_2(j) = -n \wedge F_{inc} \quad (35)$$

Les deux dernières équations se résument en :

$$\begin{pmatrix} rotF \wedge n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j \\ 0 \end{pmatrix} - P^+ \begin{pmatrix} j \\ n \wedge F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -H_{inc} \wedge n \\ -n \wedge F_{inc} \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Nous allons encore appliquer la méthode de Schur, en écrivant une équation en  $n \wedge F$ . Le terme  $rotF \wedge n$  s'écrit sous la forme  $S_i(n \wedge F)$  où  $S_i$  est encore un opérateur du type Steklov-Poincaré. Il va de  $H_{div}^{-1/2}(\Gamma)$  dans lui-même et associe au courant magnétique  $m$  le courant électrique  $j$  pour un problème intérieur. Ensuite nous éliminons  $j$ . Nous obtenons alors, en notant  $m = n \wedge F$ ,

$$S_i(m) - k^2 P_2(m) - \left(\frac{I}{2} - P_1\right)P_2^{-1}\left(\frac{I}{2} + P_1\right)(m) = -H_{inc} \wedge n - \left(\frac{I}{2} - P_1\right)P_2^{-1}(n \wedge F_{inc}) \quad (37)$$

Compte tenu des relations (30) et (31), la relation précédente s'écrit :

$$S_i(m) - P_2^{-1}\left(\frac{I}{2} + P_1\right)(m) = -H_{inc} \wedge n - P_2^{-1}\left(\frac{I}{2} + P_1\right)(n \wedge F_{inc}) \quad (38)$$

La formulation utilisée ici n'est ni primale ni duale. En effet, les champs  $F$  et  $H$  jouent les mêmes rôles et sont dans les mêmes espaces. Pour les problèmes de conditionnement les choses se passent de manière assez différente du cas de l'acoustique. En effet l'opérateur  $P_1$  est compact et  $P_2$  va de  $H_{div}^{-1/2}$  dans lui-même(cf [7] ou [3]). On pourrait alors croire que l'opérateur de couplage a un spectre borné et sans point d'accumulation en 0. Hors il n'en est rien. En effet, nous avons montré dans [5] que le spectre de  $P_2$  avait deux branches, l'une tendant vers l'infini et l'autre vers 0 (nous reproduisons en annexe le texte de la note). Ceci fait que le conditionnement de l'opérateur de couplage est très mauvais. D'autre part, rien ne sert de rechercher une formulation duale puisque l'on remplacerait alors le spectre de  $P_2$  par celui de  $P_2^{-1}$  qui a le même inconvénient. Il faut donc préconditionner.



## 6 Conclusion

Nous avons ici réussi à exprimer, aussi bien dans le cadre de l'acoustique que dans celui de l'électromagnétisme, le complément de Schur pour le problème extérieur de manière simple grâce aux projecteurs de Calderon. Nous avons de plus donné quelques indications sur la manière d'améliorer le conditionnement du système. Cette technique laisse entrevoir de nouvelles méthodes numériques pour la résolution des systèmes couplés "éléments finis - équations intégrales" qui soient plus adaptées à la structure du problème continu que les méthodes classiques, que ce soient des inversions par méthodes directes sur la totalité du système ou des méthodes itératives globales.

## Références

- [1] V. AGOSHKOV, *Poincaré-Steklov operators and domain decomposition methods in finite dimensional spaces*, in Domain decomposition methods for partial differential equations, R. Glowinski, G. H. Golub, G. A. Meurant, and J. Périaux, eds., SIAM, Philadelphia, 1988, pp. 73–112.
- [2] A. BAMBERGER AND T. HA DUONG, *Diffraction d'une onde acoustique par une paroi absorbante: nouvelles équations intégrales*, Math. Meth. in the Appl. Sci., 9 (1987), pp. 431–454.
- [3] M. CESSENAT, *Resolution de problèmes de Maxwell en régime harmonique par des méthodes intégrales*, Tech. Rep., CEA, juin 1987.
- [4] A. DE LA BOURDONNAYE, *Accélération du traitement numérique de l'équation de Helmholtz par équations intégrales et parallélisation.*, Thèse de doctorat, Ecole polytechnique, Palaiseau, France, 1991.
- [5] ———, *Décomposition de  $H_{div}^{-1/2}(\Gamma)$  et nature de l'opérateur de Steklov-Poincaré du problème extérieur de l'électromagnétisme*, Note aux C.R.A.S., t. 316, Série I (1993), pp. 369–372.
- [6] Y. H. DE ROECK, *Résolution sur ordinateurs multiprocesseurs de problèmes d'élasticité par décomposition de domaines*, PhD thesis, Université Paris IX Dauphine, 1991.
- [7] V. LEVILLAIN, *Couplage éléments finis-équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène.*, Thèse de doctorat, Ecole polytechnique, 1991.
- [8] F.X. ROUX, *Spectral analysis of the interface operators associated with the preconditioned saddle-point principle domain decomposition method*, in Domain Decomposition Conference (Norfolk), 1991.

# Annexe

Equations aux dérivées partielles/Partial Differential equations

## Décomposition de $H_{div}^{-1/2}(\Gamma)$ et nature de l'opérateur de Steklov-Poincaré du problème extérieur de l'électromagnétisme.

Armel de La Bourdonnaye

**Résumé.** Nous montrons que si  $\Gamma$  est difféomorphe à  $S^2$ ,  $H_{div}^{-1/2}(\Gamma)$  peut s'écrire  $\nabla_{\Gamma}(H^{3/2}(\Gamma)) \dot{\oplus} rot_{\Gamma}(H^{1/2}(\Gamma))$ . Nous montrons ensuite que l'opérateur de Steklov-Poincaré du problème de l'électromagnétisme qui associe à la trace tangentielle  $E \wedge n$  du champ électrique le courant électrique  $j$  est, à un opérateur régularisant près, la somme directe d'un opérateur allant de  $\nabla_{\Gamma}(H^{3/2}(\Gamma))$  dans  $rot_{\Gamma}(H^{1/2}(\Gamma))$  et d'un opérateur allant de  $rot_{\Gamma}(H^{1/2}(\Gamma))$  dans  $\nabla_{\Gamma}(H^{3/2}(\Gamma))$ .

### Decomposition of $H_{div}^{-1/2}(\Gamma)$ and Steklov-Poincaré operator of outside electromagnetism problem

**Abstract.** We show that, if  $\Gamma$  is diffeomorphic to  $S^2$ , then  $H_{div}^{-1/2}(\Gamma)$  is splitted in  $\nabla_{\Gamma}(H^{3/2}(\Gamma)) \dot{\oplus} rot_{\Gamma}(H^{1/2}(\Gamma))$ . Then we show that the Steklov-Poincaré operator for the outside electromagnetism problem, which maps the tangential component  $E \wedge n$  of the electric field to the electric current  $j$  is the direct sum of an operator going from  $\nabla_{\Gamma}(H^{3/2}(\Gamma))$  to  $rot_{\Gamma}(H^{1/2}(\Gamma))$  and an operator going from  $rot_{\Gamma}(H^{1/2}(\Gamma))$  to  $\nabla_{\Gamma}(H^{3/2}(\Gamma))$  modulo a regularizing operator.

## 6.1 Introduction

Nous nous proposons d'étudier le problème de diffraction électromagnétique et de préciser la nature des opérateurs qui rentrent en compte lorsque l'on utilise des méthodes d'équations intégrales. Ici  $\Gamma$  sera une surface  $C^{\infty}$  de  $\mathbf{R}^3$  difféomorphe à  $S^2$ . Nous notons  $TH^s(\Gamma)$  l'espace de Sobolev des vecteurs tangents à  $\Gamma$  qui sont composante par composante dans  $H^s(\Gamma)$ . Nous utilisons une notation similaire pour  $TL^2(\Gamma)$ . De même,  $H_{div}^{-1/2}(\Gamma) = \{v \in TH^{-1/2}(\Gamma); div_{\Gamma}v \in H^{-1/2}(\Gamma)\}$ . Nous allons tout d'abord décomposer l'espace  $TL^2(\Gamma)$  puis utiliser un raisonnement de densité pour décomposer  $TH^{-1/2}(\Gamma)$ . La décomposition de  $H_{div}^{-1/2}(\Gamma)$  suivra.

La deuxième partie consiste à analyser les opérateurs

$$P_1(j) = n \wedge \int_{\Gamma} \nabla_y G(|x-y|) \wedge j(y) dy \quad (39)$$

$$P_2(j) = n \wedge \left( \int_{\Gamma} G(|x-y|) j(y) dy + \frac{\nabla_{\Gamma}}{k^2} \int_{\Gamma} G(|x-y|) div_{\Gamma} j(y) dy \right) \quad (40)$$

où  $G$  est le noyau de Green de l'équation de Helmholtz :  $G(r) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$ .

## 6.2 Décomposition des espaces

Nous commençons par préciser quelques notations.  $\nabla_{\Gamma} : H^1(\Gamma) \rightarrow TL^2(\Gamma)$  est le gradient surfacique.  $rot_{\Gamma} : H^1(\Gamma) \rightarrow TL^2(\Gamma)$  est le rotationnel surfacique appliqué aux fonctions. On a l'identité :  $n \wedge \nabla_{\Gamma} = rot_{\Gamma}$ . L'opérateur  $div_{\Gamma} : TL^2(\Gamma) \rightarrow H^{-1}(\Gamma)$  est le transposé du gradient. On définit de même  $rot_{\Gamma}^* : TL^2(\Gamma) \rightarrow H^{-1}(\Gamma)$  comme le transposé de  $rot_{\Gamma}$ . C'est le rotationnel

appliqué aux vecteurs. On a alors l'identité  $rot_{\Gamma}^*(u) = div_{\Gamma}(n \wedge u)$  qui est la duale de la précédente.

Nous allons d'abord démontrer le lemme suivant qui justifie la restriction faite sur la topologie de  $\Gamma$ .

**Lemme 1** *Si  $\Gamma$  est difféomorphe à  $S^2$ , alors  $Im \nabla_{\Gamma} = Ker rot_{\Gamma}^*$ .*

Nous montrons d'abord ce résultat pour les fonctions de  $C^{\infty}(\Gamma)$ . C'est alors un résultat direct du fait que le groupe de cohomologie  $\mathbb{H}^1(\Gamma) = \mathbb{H}^1(S^2) = 0$  (on peut se référer à [2] pour ce résultat). En effet ce groupe est le quotient du noyau de  $rot_{\Gamma}^*$  par l'image du gradient, ces opérateurs étant ici pris au sens  $C^{\infty}$ . Pour conclure, il suffit d'utiliser la densité de  $C^{\infty}(\Gamma)$  dans les espaces de Sobolev.  $\square$

Le point suivant est de montrer le

**Lemme 2** *Sous l'hypothèse du lemme (1),*

$$TL^2(\Gamma) = rot_{\Gamma}(H^1(\Gamma)) \overset{\perp}{\oplus} \nabla_{\Gamma}(H^1(\Gamma)) \quad (41)$$

Nous avons au sens de la dualité,  $Im(rot_{\Gamma}) = Ker(rot_{\Gamma}^*)^{\top}$  car  $rot_{\Gamma}^*$  est défini comme le transposé de  $rot_{\Gamma}$ . Comme  $TL^2(\Gamma)$  est identifié à son dual et que  $Ker(rot_{\Gamma}^*)$  est fermé,

$$TL^2(\Gamma) = Im(rot_{\Gamma}) \overset{\perp}{\oplus} Ker(rot_{\Gamma}^*). \quad (42)$$

Alors il suffit d'utiliser le lemme 1 pour conclure.  $\square$

Nous allons utiliser un argument de densité pour montrer

**Lemme 3** *Sous les mêmes hypothèses,  $TH^{-1/2}(\Gamma) = rot_{\Gamma}(H^{1/2}(\Gamma)) \oplus \nabla_{\Gamma}(H^{1/2}(\Gamma))$*

Soit  $u \in TH^{-1/2}(\Gamma)$ . Par densité de  $TL^2(\Gamma)$  dans  $TH^{-1/2}(\Gamma)$ , on a  $u = \lim_{H^{-1/2}} u_n$  avec  $u_n$  dans  $TL^2(\Gamma)$ . On décompose  $u_n = \nabla_{\Gamma}v_n + rot_{\Gamma}w_n$  en utilisant le lemme 2. Alors,  $div_{\Gamma}u_n = div_{\Gamma}(\nabla_{\Gamma}v_n)$ . On utilise le fait que  $div_{\Gamma}u_n = \Delta_{\Gamma}v_n$  tend dans  $H^{-3/2}(\Gamma)$  vers  $div_{\Gamma}u$  pour affirmer que  $v_n$  à une limite  $v$  dans  $H^{1/2}(\Gamma)$  quotienté par les constantes. Alors  $\nabla_{\Gamma}v_n$  tend vers  $\nabla_{\Gamma}v$  dans  $TH^{-1/2}(\Gamma)$ . On procède de même avec  $rot_{\Gamma}w_n$  pour montrer que cette suite converge vers  $rot_{\Gamma}w$  dans  $TH^{-1/2}(\Gamma)$ . Alors on peut écrire  $u = \nabla_{\Gamma}v + rot_{\Gamma}w$ . Ceci achève la preuve du lemme.  $\square$

Ici, nous ne pouvons plus écrire l'orthogonalité des deux espaces car le produit scalaire  $L^2$  n'a pas de sens sur  $TH^{-1/2}$ .

Nous pouvons enfin donner la décomposition de  $H_{div}^{-1/2}(\Gamma)$ .

**Proposition 3** *Sous les hypothèses du lemme (1), nous avons*

$$H_{div}^{-1/2}(\Gamma) = \nabla_{\Gamma}(H^{3/2}(\Gamma)) \overset{\perp}{\oplus} rot_{\Gamma}(H^{1/2}(\Gamma)) \quad (43)$$

Il suffit pour cela de constater, à partir du lemme précédent, que la divergence ne contrôle que l'image du gradient. Si  $u \in TH^{-1/2}(\Gamma)$  s'écrit  $u = \nabla_{\Gamma}v + rot_{\Gamma}w$  avec  $v$  et  $w$  dans  $H^{1/2}(\Gamma)$ , alors  $div_{\Gamma}u = \Delta_{\Gamma}v$ . La condition  $div_{\Gamma}u \in H^{-1/2}(\Gamma)$  impose alors  $v \in H^{3/2}(\Gamma)$ .  $\square$

Ici, on récupère l'orthogonalité des deux sous-espaces.

Les résultats précédents donnent en particulier une base hilbertienne des espaces de Sobolev des champs tangents. En effet, si  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la base formée des fonctions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami, et  $e_0$  la fonction constante qui correspond à la valeur propre nulle, alors  $(\nabla_{\Gamma}e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $(rot_{\Gamma}e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une base hilbertienne de  $TH^s(\Gamma)$  pour tout  $s$ . De plus ces vecteurs sont vecteurs propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami vectoriel.

### 6.3 Etude des opérateurs intégraux

Nous allons maintenant étudier les opérateurs  $P_1$  et  $P_2$  mentionnés ci-dessus. Nous rappelons (cf. [1] ou [3]) que  $P_1$  agit de  $H_{div}^{-1/2}(\Gamma)$  dans  $H_{div}^{1/2}(\Gamma)$  et  $P_2$  de  $H_{div}^{-1/2}$  dans lui-même. Si l'on note  $\mathcal{P}^+ = \begin{pmatrix} \frac{I}{2} + P_1 & k^2 P_2 \\ P_2 & \frac{I}{2} + P_1 \end{pmatrix}$ , alors  $\mathcal{P}^+$  agit de  $(H_{div}^{-1/2}(\Gamma))^2$  dans lui-même. C'est le projecteur de Calderon associé au problème extérieur. Ainsi, si  $(j, n \wedge E)$  est un couple courant électrique, trace du champ électrique, il vérifie  $(\mathcal{P}^+ - I)(j, n \wedge E) = 0$ . L'opérateur de Steklov-Poincaré qui associe  $j$  à  $E \wedge n$ , s'écrit alors  $Su = \frac{P_2^{-1}}{k^2} \left( \frac{I}{2} - P_1 \right) = \left( \frac{I}{2} - P_1 \right)^{-1} P_2$ .

Pour l'opérateur  $P_1$ , les choses sont assez claires :

**Lemme 4** *Avec les notations précédentes, on a les inclusions suivantes,*

(i)  $P_1(\nabla_\Gamma(H^{3/2}(\Gamma))) \subset TH^{3/2}(\Gamma)$ ,

(ii)  $P_1(\text{rot}_\Gamma(H^{1/2}(\Gamma))) \subset TH^{1/2}(\Gamma)$

*Et  $P_1$  est un opérateur continu de  $H_{div}^{-1/2}(\Gamma)$  dans  $H_{div}^{1/2}(\Gamma)$ , et compact sur chacun des deux sous espaces de décomposition.*

Il suffit de noter que la singularité du noyau est en  $r^{-1}$ . Pour  $P_2$ , on a le lemme suivant.

**Lemme 5** *L'opérateur  $P_2$  se décompose de la manière suivante :  $P_2 = (A + B)(I + K)$  où  $A$  opère continûment de  $\nabla_\Gamma(H^{3/2}(\Gamma))$  dans  $\text{rot}_\Gamma(H^{1/2}(\Gamma))$ ,  $B$  opère continûment de  $\text{rot}_\Gamma(H^{1/2}(\Gamma))$  dans  $\nabla_\Gamma(H^{3/2}(\Gamma))$  et  $K$  est un opérateur compact. Il s'en suit que, modulo un opérateur compact,  $P_2$  est la somme de deux opérateurs à supports disjoints, l'un compact et l'autre non borné.*

Preuve :

Soit  $u \in H^{1/2}(\Gamma)$ . Alors

$$P_2(\text{rot}_\Gamma u) = n \wedge \left( \int_\Gamma G(|x - y|) \text{rot}_\Gamma u dy \right) = n \wedge \left( \int_\Gamma \text{rot}_{\Gamma_y} G(|x - y|) u dy \right). \quad (44)$$

On effectue ensuite la transformation suivante :

$$n \wedge \left( \int_\Gamma \text{rot}_{\Gamma_y} G(|x - y|) u dy \right) = n_x \wedge \left( \int_\Gamma n_y \wedge \nabla_y G(|x - y|) u(y) dy \right). \quad (45)$$

On effectue alors la transformation  $\nabla_x G(|x - y|) = -\nabla_y G(|x - y|)$  et on décompose  $n_y$  en  $n_x + (n_y - n_x)$ . il vient alors

$$P_2(\text{rot}_\Gamma u) = \nabla_\Gamma \left( \int_\Gamma G(|x - y|) u(y) dy \right) + n_x \wedge \left( \int_\Gamma (n_y - n_x) \wedge \nabla_x G(|x - y|) u(y) dy \right) \quad (46)$$

Le premier terme du membre de gauche est dans  $\nabla_\Gamma(H^{3/2}(\Gamma))$ . Le second est un terme qui est nul si  $n_x - n_y$  est proportionnel à  $x - y$ , ce qui est le cas si  $\Gamma$  est plane ou est une sphère (la courbure doit être isotrope). Dans le cas général, la singularité du noyau est une discontinuité en 0. L'opérateur envoie continûment  $H^s(\Gamma)$  dans  $TH^{s+2}(\Gamma)$ .

Prenons maintenant  $u \in H^{3/2}(\Gamma)$ . Alors,

$$P_2(\nabla_\Gamma u) = n \wedge \left( \int_\Gamma G(|x - y|) \nabla_\Gamma u dy \right) + \frac{\nabla_\Gamma}{k^2} \int_\Gamma G(|x - y|) \Delta_\Gamma u(y) dy \quad (47)$$

En raisonnant comme ci-dessus, on obtient :

$$P_2(\nabla_\Gamma u) = \text{rot}_\Gamma \left( \int_\Gamma G(|x - y|) \left( I + \frac{\Delta_\Gamma}{k^2} \right) u(y) dy \right) + R(u) \quad (48)$$

où

$$R(u) = n_x \wedge \int_{\Gamma} (\pi_x - \pi_y) \nabla_x G(|x - y|) u(y) dy \quad (49)$$

avec  $\pi_x, \pi_y$  les projections orthogonales sur les plans tangents à  $\Gamma$  en  $x$  et  $y$ . Comme auparavant,  $R$  envoie continûment  $H^s(\Gamma)$  dans  $TH^{s+2}(\Gamma)$ .

Ainsi, en notant

$$A(\nabla_{\Gamma} u) = \text{rot}_{\Gamma} \left( \int_{\Gamma} G(|x - y|) \left( I + \frac{\Delta_{\Gamma}}{k^2} \right) u(y) dy \right) \quad (50)$$

et

$$B(\text{rot}_{\Gamma} u) = \nabla_{\Gamma} \left( \int_{\Gamma} G(|x - y|) u(y) dy \right) \quad (51)$$

on a bien le résultat annoncé.  $\square$

On en déduit finalement la proposition suivante pour l'opérateur de Steklov-Poincaré :

**Proposition 4** *En reprenant les définitions de  $A$  et  $B$  énoncées ci-dessus,  $Su = (A + B)(2I + K')$  où  $K'$  est un autre opérateur compact.*

Il suffit d'utiliser l'expression de  $S$  donnée en début de section et le fait que  $P_1$  est compact.  $\square$

## 6.4 Conclusion

Nous avons montré, à l'aide de la décomposition de  $H_{div}^{-1/2}(\Gamma)$ , que l'opérateur de Steklov-Poincaré du problème extérieur se sépare en deux opérateurs, l'un compact et l'autre non borné. Dans le cas de la sphère, il est possible d'être plus précis. En utilisant la remarque de la fin de la section 2 avec les harmoniques sphériques, il est facile de montrer que  $A = B^{-1}$  et  $K' = 0$ . Une des conséquences de ce résultat est que, lorsque l'on veut résoudre le problème d'équations intégrales sur le plan numérique par une méthode itérative, on est dans la plus mauvaise situation qui soit puisque le spectre de la matrice tend vers 0 et l'infini et est très dense aux deux extrémités. Cependant la décomposition utilisée doit permettre de construire des préconditionneurs efficaces en tenant compte de la nature mathématique des opérateurs qui entrent en jeu.

## Références

- [1] M. CESSENAT, *Resolution de problèmes de Maxwell en régime harmonique par des méthodes intégrales*, Tech. Rep., CEA, juin 1987.
- [2] C. GODBILLON, *Éléments de topologie algébrique*, Hermann, Paris, 1971.
- [3] V. LEVILLAIN, *Couplage éléments finis-équations intégrales pour la résolution des équations de Maxwell en milieu hétérogène.*, Thèse de doctorat, Ecole polytechnique, 1991.