

APPROXIMATION NUMERIQUE
DES EQUATIONS DE MAXWELL
EN MILIEU HETEROGENE MONODIMENSIONNEL
PAR UN SOLVEUR DE RIEMANN EXACT

Guillaume Gimonet, Jean-Pierre Cioni
Loula Fezoui, Frédéric Poupaud

Avril 1995

N° 95-37

AN EXACT RIEMANN SOLVER
FOR THE NUMERICAL APPROXIMATION
OF MAXWELL EQUATIONS
IN A ONE-DIMENSIONAL HETEROGENEOUS MEDIA

Guillaume Gimonet ¹, Jean-Pierre Cioni ¹,
Loula Fezoui ¹ et Frédéric Poupaud ²

Abstract

We are here concerned with the numerical approximation of Maxwell equations in a one-dimensional heterogeneous media. We propose an accurate solver both in time and space (Godunov's scheme) which insures discrete conditions at the interface of different materials. Numerical solutions are compared to the ones obtained with an another solver based on an extension of the Steger and Warming scheme as well as to exact solutions for different test cases. Simulations involving high material indices (of values around hundred) are presented.

APPROXIMATION NUMERIQUE
DES EQUATIONS DE MAXWELL
EN MILIEU HETEROGENE MONODIMENSIONNEL
PAR UN SOLVEUR DE RIEMANN EXACT

Résumé

Nous nous intéressons ici à la résolution numérique du système de Maxwell monodimensionnel pour des milieux hétérogènes. Nous proposons un solveur précis en temps et en espace (schéma de Godunov) qui assure les conditions discrètes à l'interface de matériaux différents. Les solutions numériques sont ici comparées à celles obtenues à l'aide d'un autre solveur basé sur une extension du schéma de Steger et Warming ainsi qu'aux solutions exactes pour différents cas tests. Des simulations faisant intervenir des matériaux d'indice élevé (de l'ordre de la centaine) sont présentées.

¹CERMICS-INRIA, BP 93, 06 902 Sophia-Antipolis Cedex

²Laboratoire J.-A. Dieudonné, U.R.A. 168 du CNRS, Université de Nice Sophia-Antipolis, Parc Valrose, BP 71, 06108 NICE Cedex 02

Table des matières

1	Système de Maxwell sous forme conservative	2
2	Un modèle de réflexion-transmission	4
2.1	Domaine de propagation	4
2.2	Détermination de la solution exacte du problème	5
3	Approximation numérique	9
3.1	Discrétisation du problème à l'ordre un	9
3.1.1	Solveur de Steger et Warming	10
3.1.2	Solveur de Godunov	11
3.2	Extension aux ordres deux et trois	14
4	Expériences numériques	14
4.1	Domaine d'expérimentation	14
4.2	Matériaux d'expérience	16
4.3	Indice constant (milieu homogène)	17
4.4	Saut d'indice petit	19
4.5	Saut d'indice élevé	25
5	Synthèse	28
5.1	Coûts comparés des solveurs	28
5.2	Synthèse des résultats numériques obtenus	29
6	Problème de couche	29
6.1	Position du problème	29
6.2	Applications numériques	30
7	Conclusion	34

Introduction

L'objet de ce travail est l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu linéaire isotrope hétérogène à une variable d'espace, modélisée par le système de Maxwell. Des expériences numériques réalisées avec diverses méthodes (méthodes de volumes finis, différences finies, éléments finis) ont révélé la difficulté d'approcher avec une grande précision les solutions, en particulier dans le cas de géométries complexes et pour des indices de milieux assez grands [9].

Nous nous intéressons ici aux schémas numériques dits conservatifs décentrés. Nous rappelons tout d'abord que dans le cas des milieux homogènes (ie d'indices constants), tous les schémas décentrés se réduisent au schéma de Isaacson-Courant-Rees (ICR). Dans le cas d'un système linéaire à coefficients non constants, ce schéma peut s'étendre de diverses manières. Ainsi, nous rappelons dans la section 3 l'extension "naturelle" de la formulation de Steger et Warming déjà utilisée par ailleurs [1, 2].

Nous proposons ici, en alternative, une extension du schéma de Godunov basée sur la résolution exacte de problèmes de Riemann posés à l'interface des cellules. L'idée qui sous-tend ce travail est de construire un schéma qui satisfasse intrinsèquement les conditions de saut à l'interface des matériaux ($[\vec{n} \wedge \vec{E}] = 0$ et $[\vec{n} \wedge \vec{H}] = 0$). Nous comparons les résultats obtenus par les deux schémas présentés à la solution exacte dans chaque cas test considéré.

1 Système de Maxwell sous forme conservative

On note t le temps et \vec{x} la variable d'espace du problème: $\vec{x} \in \mathbb{R}^p, p = \{1, 2, 3\}$. Les champs électriques et magnétiques sont notés classiquement $\vec{E} = \vec{E}(\vec{x}, t)$ et $\vec{H} = \vec{H}(\vec{x}, t)$ (respectivement \vec{D} et \vec{B} pour les inductions électriques et magnétiques).

Nous considérerons dans cette étude des matériaux dits simples, caractérisés par des lois constitutives linéaires de la forme:

$$\vec{D} = \varepsilon(\vec{x})\vec{E} \text{ et } \vec{B} = \mu(\vec{x})\vec{H}, \quad (1)$$

où ε et μ sont respectivement les tenseurs de permittivité électrique et de perméabilité magnétique du milieu. Ces tenseurs sont a priori complexes, anisotropes et dépendent de la variable d'espace.

Dans le cas de milieux chargés, $\rho = \rho(\vec{x}, t)$ et $\vec{j} = \vec{j}(\vec{x}, t)$ désignent les densités de charge et de courant électrique.

L'ensemble des phénomènes électromagnétiques est modélisé par le système de Maxwell qui s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{rot}(\vec{E}) = 0, \\ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{rot}(\vec{H}) = -\vec{j}, \\ \operatorname{div}(\vec{D}) = \rho, \\ \operatorname{div}(\vec{B}) = 0. \end{array} \right.$$

Formulation du système de Maxwell en système hyperbolique conservatif

On suppose dès maintenant que les milieux étudiés sont hétérogènes, linéaires, isotropes, non polarisables, non magnétiques, c'est à dire que les tenseurs ε et μ sont réduits à des facteurs multiplicatifs dépendant de la variable d'espace dans les lois de comportement (1). Notons qu'une extension au cas de matrices complexes est également possible.

On considère des milieux sans charge ni courant et des champs \vec{B} et \vec{D} dépendant uniquement de la variable d'espace notée ici y . Le système de Maxwell monodimensionnel peut alors s'écrire sous la forme conservative suivante:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(A(y)\vec{W}) = 0,$$

$$\text{avec } \vec{W} = {}^t(B_x, B_z, D_x, D_z) \text{ et } A(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\mu} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\mu} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice A admet deux valeurs propres réelles $\lambda = \pm c$ (où $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$) de multiplicité deux. Le système de Maxwell définit donc un système hyperbolique linéaire conservatif. On rappelle que c désigne la vitesse de propagation de la lumière dans le milieu.

L'adimensionnement du système s'effectue en introduisant la permittivité ε_0 et la perméabilité μ_0 du vide. On pose alors $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$, $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$ et nous ferons par la suite les abus de notation $\varepsilon := \varepsilon_r$ et $\mu := \mu_r$.

Le système adimensionné s'écrit alors:

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y}(A(y)\vec{Q}) = 0,$$

en effectuant le changement de variable $\tau = c_0 t$ et en posant $\vec{Q} = {}^t(B_x, B_z, Z_0 D_x, Z_0 D_z)$. L'impédance du vide Z_0 est donnée par $Z_0 = \mu_0 c_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c_0} = \frac{1}{Y_0}$ où c_0 est la vitesse de propagation de la lumière dans le vide et Y_0 l'admittance. Les quantités intervenant dans la matrice A sont maintenant sans dimension.

Réduction de l'étude aux modes (TE) et (TM)

Considérons la matrice A définie précédemment.

Pour $j = \{1, \dots, 4\}$, notons δ_j le $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^4 .

Nous avons d'une part,

$$A\delta_1 = \frac{1}{\varepsilon}\delta_4, \quad A\delta_4 = \frac{1}{\mu}\delta_1$$

et d'autre part,

$$A\delta_2 = \frac{-1}{\varepsilon}\delta_3, \quad A\delta_3 = \frac{-1}{\mu}\delta_2.$$

Les deux sous-espaces de \mathbb{R}^4 , engendrés par les vecteurs δ_1 et δ_4 d'une part, et, δ_2 et δ_3 d'autre part, sont donc deux sous-espaces supplémentaires et stables par A , qu'on notera (TM) et (TE) .

Soit \tilde{A} la restriction de A au sous-espace (TM) . Alors, \tilde{A} s'écrit dans la base canonique de \mathbb{R}^2 :

$$\tilde{A}(y) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon} \\ \frac{1}{\mu} & 0 \end{bmatrix} .$$

La restriction de A au sous-espace (TE) vaut alors $-\tilde{A}$. On peut donc se restreindre à l'étude du système de Maxwell dans le cas (TM) et retrouver ensuite le cas (TE) en changeant la matrice \tilde{A} en $-\tilde{A}$, aux changements près que cela comporte pour les conditions aux limites. Par la suite, on fera systématiquement l'abus de notation $A := \tilde{A}$, ceci afin de ne pas surcharger l'écriture.

2 Un modèle de réflexion-transmission

2.1 Domaine de propagation

Soit un domaine de propagation Ω hétérogène constitué de deux sous-domaines homogènes Ω^+ et Ω^- . On considère dans cette étude que Ω est monodimensionnel, c'est à dire qu'il est assimilable à la portion de l'espace \mathbb{R}^3 comprise entre les plans $(y = a, a < 0)$ et $(y = b, b > 0)$, que \vec{e}_y est la seule direction de propagation possible et que sa permittivité ε et sa perméabilité μ vérifient :

$$\begin{cases} \varepsilon(x, y, z) = \varepsilon(y) = \begin{cases} \varepsilon^- & \text{si } y < 0 \\ \varepsilon^+ & \text{si } y \geq 0 \end{cases} \\ \mu(x, y, z) = \mu(y) = \begin{cases} \mu^- & \text{si } y < 0 \\ \mu^+ & \text{si } y \geq 0 \end{cases} . \end{cases} \quad (2)$$

Le problème est d'étudier la propagation de l'onde électromagnétique émise par un signal $t(E(y, t = 0), H(y, t = 0))$ polarisé dans le plan (\vec{e}_x, \vec{e}_z) (fig. 1) .

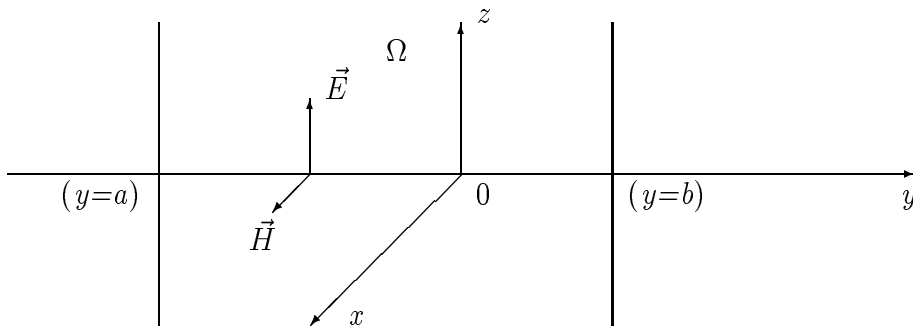


FIG. 1 - Milieu de propagation monodimensionnel (mode TM).

Conditions aux limites

Nous présentons ici très brièvement les conditions aux limites utilisées car le cas monodimensionnel ne présente aucune difficulté d'ordre numérique pour leur prise en compte et sont de plus exactes. On pourra cependant se référer à [6] pour plus de détails à ce sujet.

Nous considérons dans cette étude deux types de conditions aux limites:

- Conditions aux limites de type métal parfait: $\vec{n} \wedge \vec{E}|_{\partial\Omega} = 0$;
- Conditions aux limites absorbantes d'ordre un (condition de radiation de Silver-Müller):

$$\vec{n} \wedge \vec{E} = Z\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{H}) \text{ sur } \partial\Omega$$

où \vec{n} est la normale extérieure (égale ici à \vec{e}_y) et Z l'impédance locale du milieu.

Conditions d'interface

Les conditions d'interface expriment la continuité des composantes tangentielles des champs électrique et magnétique à l'interface matérielle [5]:

$$\begin{cases} [\vec{n} \wedge \vec{E}]_{\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-} = 0, \\ [\vec{n} \wedge \vec{H}]_{\partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

2.2 Détermination de la solution exacte du problème

Le champ électromagnétique exact ${}^t(\vec{E}, \vec{H})$ dans le cas $(TM)_z$ est solution du problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial y} = 0, \\ \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial y} = 0, & \forall y \in \Omega = (\Omega^- \cup \Omega^+) \cup (\partial\Omega^- \cap \partial\Omega^+), \\ E(y, t=0) = E_0(y), \\ H(y, t=0) = H_0(y), \end{cases} \quad (4)$$

où ${}^t(E, H) = {}^t(E_z, H_x)$. La perméabilité et la permittivité du milieu sont données par (2). On note classiquement $c^+ = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^+ \mu^+}}$, $Z^+ = \sqrt{\frac{\mu^+}{\varepsilon^+}}$, $Y^+ = \frac{1}{Z^+}$ et c^- , Z^- , Y^- avec des définitions similaires. De part et d'autre de l'interface, le problème hyperbolique se décompose en deux problèmes linéaires à coefficients constants:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{W}}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

où $\vec{W} = {}^t(H, E)$ et $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\mu} \\ \frac{1}{\varepsilon} & 0 \end{bmatrix}$.

On a à résoudre deux problèmes de Cauchy à gauche et à droite de $y = 0$ et l'unicité de la solution est assurée par les conditions d'interface (3) qui s'écrivent encore pour le problème monodimensionnel considéré:

$$\begin{pmatrix} E^+ \\ H^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^- \\ H^- \end{pmatrix} \text{ sur } \partial\Omega^+ \cap \partial\Omega^-, \quad (6)$$

où ${}^t(E^+, H^+)$ est solution du problème de Cauchy (4) sur Ω^+ et ${}^t(E^-, H^-)$ est solution du problème de Cauchy (4) sur Ω^- . Les champs électriques et magnétiques sont donc continus à l'interface des matériaux.

Nous allons maintenant calculer la solution exacte du problème (4) en appliquant la méthode des caractéristiques de part et d'autre de l'interface. Le système (5) diagonalisé s'écrit à gauche de l'interface:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{U} + \Lambda \frac{\partial}{\partial y} \vec{U} = 0, \quad (7)$$

où $\vec{U} = P^{-1} \tilde{W} = {}^t(u, v)$,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} c^- & 0 \\ 0 & -c^- \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ Z^- & -Z^- \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & Y^- \\ 1 & -Y^- \end{bmatrix}.$$

La formulation est identique avec les quantités c^+, Z^+, Y^+ à droite de l'interface.

On note $\vec{U}_0 = {}^t(u_0, v_0) = P^{-1} {}^t(E_0, H_0)$ la donnée de Cauchy du problème.

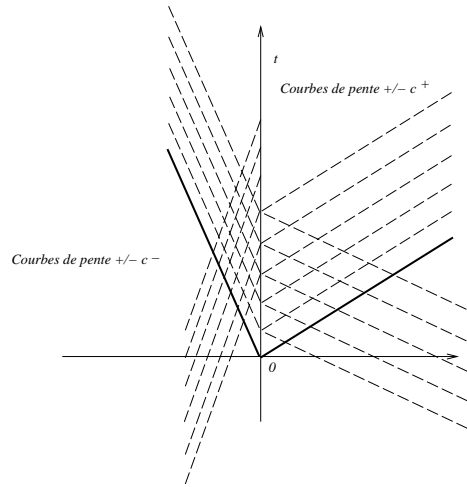


FIG. 2 - Courbes caractéristiques du système.

On a un ensemble de courbes caractéristiques sur lesquelles les composantes u et v de la solution du problème de Cauchy (7) sont constantes et ne dépendent que de la donnée initiale ${}^t(u_0, v_0)$. On montre ce système de courbes (qui sont des demi-droites car le système est à coefficients constants) sur la figure 2. La méthode des caractéristiques permet alors de déterminer les expressions de E et H qui sont répertoriées sur les tableaux 1 et 2 par zone d'espace-temps. On note:

$$- E_{av}^+(y, t) = (E_0 - Z^+ H_0) (y + c^+ t) \text{ le champ électrique avancé dans } \Omega^+,$$

- $E_{ret}^+(y, t) = (E_0 + Z^+ H_0)(y - c^+ t)$ le champ électrique retardé dans Ω^+ ,
- $H_{av}^+(y, t) = (H_0 - Y^+ E_0)(y + c^+ t)$ le champ magnétique avancé dans Ω^+ ,
- $H_{ret}^+(y, t) = (H_0 + Y^+ E_0)(y - c^+ t)$ le champ magnétique retardé dans Ω^+ ,
- Les champs sont notés de manière identique dans Ω^- .

Zone	$2E(y, t)$
$y > c^+ t$	$E_{av}^+(y, t) + E_{ret}^+(y, t)$
$c^+ t > y > 0$	$E_{av}^+(y, t) + \gamma E_{av}^+(-y, t) + \delta E_{ret}^-(\frac{c^-}{c^+} y, t)$
$0 > y > -c^- t$	$E_{ret}^-(y, t) + \alpha E_{ret}^-(-y, t) + \beta E_{av}^+(\frac{c^+}{c^-} y, t)$
$y < -c^- t$	$E_{av}^-(y, t) + E_{ret}^-(y, t)$

TAB. 1 - *Solution exacte du système de Maxwell : champ électrique.*

Zone	$2H(y, t)$
$y > c^+ t$	$H_{av}^+(y, t) + H_{ret}^+(y, t)$
$c^+ t > y > 0$	$H_{av}^+(y, t) + \alpha H_{av}^+(-y, t) + \beta H_{ret}^-(\frac{c^-}{c^+} y, t)$
$0 > y > -c^- t$	$H_{ret}^-(y, t) + \gamma H_{ret}^-(-y, t) + \delta H_{av}^+(\frac{c^+}{c^-} y, t)$
$y < -c^- t$	$H_{av}^-(y, t) + H_{ret}^-(y, t)$

TAB. 2 - *Solution exacte du système de Maxwell : champ magnétique.*

Les coefficients α, β, γ et δ sont déterminés de manière unique par la condition de continuité (6) et sont explicités sur le tableau 3.

α	β	γ	δ
$\frac{Z^+ - Z^-}{Z^+ + Z^-}$	$\frac{2Z^-}{Z^+ + Z^-}$	$\frac{Z^- - Z^+}{Z^+ + Z^-}$	$\frac{2Z^+}{Z^+ + Z^-}$

TAB. 3 - *Coefficients.*

La polarisation $(\mathbf{TE})_z$

Signalons que dans le cas $(TE)_z$, le problème de Maxwell s'écrit sous la forme du problème de Cauchy suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial E}{\partial y} = 0, \\ \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\partial H}{\partial y} = 0, \\ E(y, t = 0) = E_0(y), \\ H(y, t = 0) = H_0(y). \end{array} \right. \quad \forall y \in \Omega = (\Omega^- \cup \Omega^+) \cup (\partial\Omega^- \cap \partial\Omega^+) \quad (8)$$

La résolution de ce problème est rigoureusement identique à celle qui est présentée plus haut. Il suffit, pour obtenir les expressions des champs E et H solutions du problème (8), de prendre des champs avancés de la forme $E_{av}(y, t) = (E_0 + ZH_0)(y + ct)$ et $H_{av}(y, t) = (H_0 + Y E_0)(y + ct)$, et des champs retardés de la forme : $E_{ret}(y, t) = (E_0 - ZH_0)(y - ct)$ et $H_{ret}(y, t) = (H_0 - Y E_0)(y - ct)$.

On a ainsi déterminé la solution pour les deux types de polarisation dans la totalité du domaine. Notons que cette méthode peut s'appliquer de manière analogue dans le cas de plusieurs discontinuités.

Coefficients de réflexion et de transmission

Soit une onde incidente référencée par *inc* se propageant dans un milieu constitué de deux matériaux homogènes différents. D'après les solutions théoriques des tableaux 1 et 2, on peut facilement retrouver les coefficients de réflexion et de transmission associés aux ondes réfléchi et transmise (référencées respectivement par *ref* et *trans*) créées à l'interface des matériaux.

Les définitions des coefficients de réflexion et de transmission sont données par:

$$C_{ref}(H) = \frac{|H^{ref}|}{|H^{inc}|}, \quad C_{trans}(H) = \frac{|H^{trans}|}{|H^{inc}|}$$

pour le champ magnétique et

$$C_{ref}(E) = \frac{|E^{ref}|}{|E^{inc}|}, \quad C_{trans}(E) = \frac{|E^{trans}|}{|E^{inc}|}$$

pour le champ électrique (cf. [5] par exemple).

A partir des tableaux 1 et 2, on obtient pour le champ magnétique:

$$C_{ref}(H) = \alpha = \frac{Z^+ - Z^-}{Z^+ + Z^-}, \quad C_{trans}(H) = \delta = \frac{2Z^+}{Z^+ + Z^-}.$$

De même, on a pour le champ électrique:

$$C_{ref}(E) = \gamma = \frac{Z^- - Z^+}{Z^+ + Z^-}, \quad C_{trans}(E) = \beta = \frac{2Z^-}{Z^+ + Z^-}.$$

De plus, la conservation de l'énergie totale de l'onde incidente se traduit ici par:

$$\begin{cases} \delta - \alpha = 1, \\ \beta - \gamma = 1. \end{cases}$$

3 Approximation numérique

On présente ici dans un premier temps la discrétisation du problème et sa formulation en volumes finis. Ensuite, nous traitons numériquement ce problème à l'aide de deux schémas. Le premier est écrit à partir d'une résolution approchée d'un problème de Riemann à l'interface entre les cellules (schéma de Steger-Warming) et l'autre à partir de la résolution exacte de ce problème de Riemann (schéma de Godunov) [4]. En milieu homogène, ces schémas sont tous équivalents au schéma *ICR*. Le domaine Ω étant divisé en deux sous-domaines homogènes, la différence entre les schémas n'apparaîtra qu'à l'interface entre ces sous-domaines.

3.1 Discrétisation du problème à l'ordre un

On étudie le système conservatif hyperbolique linéaire suivant :

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y}(A\vec{W}) = 0, \tag{9}$$

$$\text{avec } \vec{W} : [a, b] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{et } A : [a, b] \longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ (y, \tau) \longrightarrow \vec{W}(y, \tau) \quad y \longrightarrow A(y).$$

On rappelle que, dans le cas *(TM)*, \vec{W} et A sont définis par :

$$\vec{W} = \begin{pmatrix} B_x \\ Z_0 D_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\mu} \\ \frac{1}{\mu} & 0 \end{bmatrix}.$$

Soit un maillage de $[a, b]$ défini par $(y_i)_{i=0, \dots, N}$, $y_0 = a$, $y_N = b$ et une discrétisation en temps de la forme $\tau_n = n\Delta\tau$ ($n \in \mathbb{N}$) où $\Delta\tau$ est le pas de temps. On note Δy_i l'aire de

la cellule $(C_i)_{i \in \{0, \dots, N\}}$.

On considère alors les schémas numériques explicites, conservatifs, à trois points d'espace de la forme:

$$\frac{\vec{W}_i^{n+1} - \vec{W}_i^n}{\Delta\tau} \Delta y_i + (\tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}^n - \tilde{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}}^n) = 0,$$

où $\tilde{\mathbf{F}}$ est une approximation des flux continus à l'interface de la cellule $y_{i \pm \frac{1}{2}}$.

Nous proposons maintenant deux approximations décentrées pour le calcul des flux.

3.1.1 Solveur de Steger et Warming

Pour des systèmes non linéaires où la matrice jacobienne A ne dépend que de l'inconnue \vec{W} (cas des équations d'Euler par exemple), la fonction de flux proposée par Steger et Warming s'écrit en $y = y_{i+\frac{1}{2}}$:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}^n = A^+(\vec{W}_i^n) \vec{W}_i^n + A^-(\vec{W}_{i+1}^n) \vec{W}_{i+1}^n,$$

et respectivement pour $y = y_{i-\frac{1}{2}}$. On définit $A^\pm = P \Lambda^\pm P^{-1}$ où $\Lambda^+ = \text{diag}(\max(\lambda_k, 0))$, $\Lambda^- = \text{diag}(\min(\lambda_k, 0))$, λ_k étant les valeurs propres de A . Dans cette étude, A ne dépend pas de l'inconnue mais de la variable d'espace. Nous avons proposé par analogie [1] une écriture de ce flux adaptée au cas considéré:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}^n = A^+(y_i) \vec{W}_i^n + A^-(y_{i+1}) \vec{W}_{i+1}^n.$$

Le flux ainsi construit résulte en fait de la résolution de problèmes locaux posés aux interfaces des cellules. En $y = y_{i+\frac{1}{2}}$ par exemple, le problème de Riemann s'écrit:

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y} (A_{i+\frac{1}{2}} \vec{W}) = 0,$$

avec la donnée initiale:

$$\vec{W}(y, \tau = \tau_n) = \begin{cases} \vec{W}_i^n & \text{si } y < y_{i+\frac{1}{2}} \\ \vec{W}_{i+1}^n & \text{si } y > y_{i+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (10)$$

où $A_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(A_i + A_{i+1})$.

Ce procédé réalise donc une interpolation sur le tenseur $A(y)$ avant de résoudre un problème de Riemann et le champ approché par ce schéma ne satisfait pas à la condition d'interface du problème continu.

Il est licite si les variations de ε et μ sont assez régulières, lipschitziennes par exemple. Cependant, nous avons appliqué ce schéma à des fonctions constantes par morceaux mais pour des sauts des fonctions ε et μ relativement faibles et des simulations numériques seront présentées pour de tels cas.

3.1.2 Solveur de Godunov

Le flux de Godunov consiste à prendre une approximation des flux continus de la forme:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}^n = A_i \vec{W}_{i+\frac{1}{2}}^n \quad \text{avec} \quad \vec{W}_{i+\frac{1}{2}}^n = \vec{w}(0; \vec{W}_i^n, \vec{W}_{i+1}^n),$$

où l'on note $\vec{w}(y, \tau) = \vec{w}(\frac{y-y_{i+\frac{1}{2}}}{\tau-\tau_n}; \vec{W}_i^n, \vec{W}_{i+1}^n)$ la solution du problème de Riemann local en $y = y_{i+\frac{1}{2}}$ suivant:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y}(A\vec{w}) = 0, \quad (11)$$

avec la donnée initiale :

$$\vec{w}(y, \tau = \tau_n) = \begin{cases} \vec{W}_i^n & \text{si } y < y_{i+\frac{1}{2}} \\ \vec{W}_{i+1}^n & \text{si } y > y_{i+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Résolution exacte du problème de Riemann

On considère deux cellules d'intégration voisines C_i et C_{i+1} :

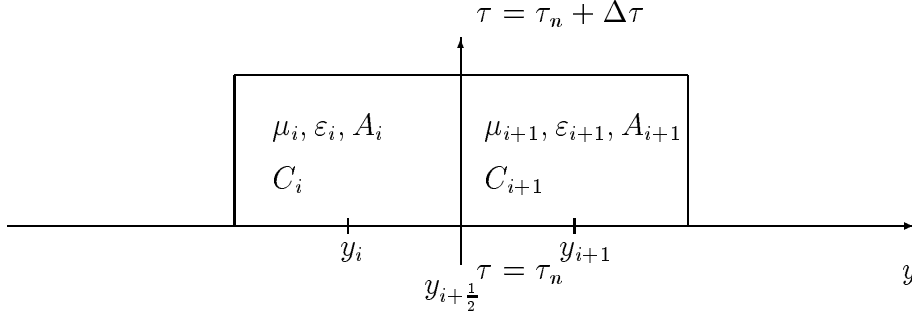


FIG. 3 - Cellules voisines.

Soit le système (9) avec la donnée initiale (10). On considère alors le problème de Cauchy de part et d'autre de la frontière $y = y_{i+\frac{1}{2}}$, et pour commencer à gauche.

Le problème de Riemann y est un problème linéaire à coefficients constants :

$$\frac{\partial \vec{W}}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y}(A_i \vec{W}) = 0.$$

Dans ce domaine, la solution du problème de Riemann est constante de part et d'autre de la courbe caractéristique (Γ_i) d'équation :

$$\frac{y - y_{i+\frac{1}{2}}}{\tau - \tau_n} = \frac{-1}{\sqrt{\mu_i \epsilon_i}} = -c_i.$$

Ceci définit donc deux zones du demi-espace-temps ($y < y_{i+\frac{1}{2}} ; \tau > 0$), notées I et II, respectivement en dessous et au dessus de la droite (Γ_i) . De la même manière, l'autre demi-espace-temps ($y > y_{i+\frac{1}{2}} ; \tau > 0$) est subdivisé en deux zones, notées III et IV,

respectivement au dessus et en dessous de la droite caractéristique (Γ_{i+1}) d'équation :

$$\frac{y - y_{i+\frac{1}{2}}}{\tau - \tau_n} = \frac{1}{\sqrt{\mu_{i+1}\varepsilon_{i+1}}} = +c_{i+1},$$

correspondant au problème de Riemann linéaire à coefficients constants à droite de la frontière. En résumé, nous obtenons quatre zones où la solution du problème de Riemann local est constante, réparties comme le montre la figure 4 :

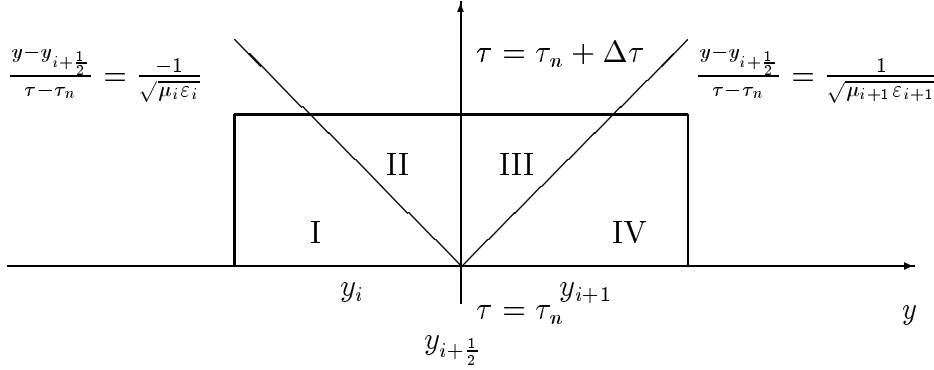


FIG. 4 - *Problème de Riemann local.*

La solution du problème de Riemann ne dépend que des états initiaux \vec{W}_i^n et \vec{W}_{i+1}^n et est constituée de quatre états constants $\vec{W}_{I,i}, \vec{W}_{II,i}, \vec{W}_{III,i+1}, \vec{W}_{IV,i+1}$ (cf. [7]). Les indices i et $i+1$ seront omis dans la suite des calculs afin de ne pas surcharger le texte. Les états \vec{W}_I et \vec{W}_{IV} sont respectivement égaux aux données de Cauchy \vec{W}_i^n et \vec{W}_{i+1}^n . Les états \vec{W}_I et \vec{W}_{II} ainsi que les états \vec{W}_{III} et \vec{W}_{IV} sont séparés par des discontinuités de contact, donc par des états propres correspondant aux valeurs propres associées $-c_i$ et c_{i+1} , tandis que les états \vec{W}_{II} et \vec{W}_{III} sont séparés par l'interface entre deux matériaux élémentaires constituée par la frontière entre les cellules C_i et C_{i+1} .

Les sauts entre les zones I et II, et les zones III et IV sont donnés par les conditions de Rankine-Hugoniot, terme habituellement employé en mécanique des fluides pour désigner les relations entre deux états séparés par une surface de discontinuité. L'opérateur A étant constant dans chaque sous-domaine, on obtient:

$$\begin{aligned} A_i(\vec{W}_{II} - \vec{W}_i^n) &= -c_i(\vec{W}_{II} - \vec{W}_i^n), \\ A_{i+1}(\vec{W}_{i+1}^n - \vec{W}_{III}) &= +c_{i+1}(\vec{W}_{i+1}^n - \vec{W}_{III}). \end{aligned} \quad (12)$$

Les états \vec{W}_{II} et \vec{W}_{III} sont alors déterminés de manière unique par les conditions d'interface (3) qui s'écrivent pour le problème discret:

$$A_{i+1}\vec{W}_{III} - A_i\vec{W}_{II} = 0. \quad (13)$$

Ceci traduit qu'à l'interface des matériaux, le saut de $A\vec{W}$ est nul. On voit donc que la troisième condition de saut est encore une condition de Rankine-Hugoniot, correspondant

à une valeur propre artificielle égale à zéro.

L'opérateur A est un tenseur antisymétrique et vérifie, par sa construction:

$$A \begin{pmatrix} \vec{B} \\ Z_0 \vec{D} \end{pmatrix} = \frac{1}{c_0} \vec{n} \wedge \begin{pmatrix} \vec{E} \\ -Z_0 \vec{H} \end{pmatrix}$$

Avec la troisième condition de saut (13), la résolution exacte du problème de Riemann au bord des cellules donne des champs \vec{E} et \vec{H} constants de part et d'autre de l'interface et ils vérifient les conditions d'interface discrètes:

$$[\vec{n} \wedge \vec{E}]_{ij} = 0 \text{ et } [\vec{n} \wedge \vec{H}]_{ij} = 0,$$

où ij désigne l'interface entre deux cellules voisines C_i et C_j . Cette condition exprime la continuité des parties tangentielles des champs approchés \vec{E} et \vec{H} .

Il est alors possible de résoudre (12,13) algébriquement mais les tableaux (1,2) répertoriant les solutions exactes permettent d'écrire directement la solution du problème de Riemann :

$$\begin{cases} W_{1,II} = \frac{\delta}{2} \frac{\mu_i}{\mu_{i+1}} (W_{1,i+1}^n - Z_{i+1} W_{2,i+1}^n) + \frac{\beta}{2} (W_{1,i}^n + Z_i W_{2,i}^n), \\ W_{2,II} = \frac{\delta}{2} (W_{2,i}^n + Y_i W_{1,i}^n) + \frac{\beta}{2} \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{i+1}} (W_{2,i+1}^n - Y_{i+1} W_{1,i+1}^n). \end{cases}$$

On a également:

$$W_{1,III} = \frac{\mu_{i+1}}{\mu_i} W_{1,II} \text{ et } W_{2,III} = \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} W_{2,II}.$$

Ceci achève la résolution exacte du problème de Riemann aux interfaces des cellules ce qui permet d'explicitier complètement le schéma de Godunov:

$$\text{En } y = y_{i+\frac{1}{2}} : \quad \tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}^n = A_i \vec{W}_{i+\frac{1}{2}}^n$$

$$\text{soit } \tilde{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}}^n = A_i \vec{W}_i^n - c_i (\vec{W}_{II,i} - \vec{W}_i^n).$$

$$\text{En } y = y_{i-\frac{1}{2}} : \quad \tilde{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}}^n = A_i \vec{W}_{i-\frac{1}{2}}^n$$

$$\text{soit } \tilde{\mathbf{F}}_{i-\frac{1}{2}}^n = A_i \vec{W}_i^n - c_i (\vec{W}_i^n - \vec{W}_{III,i}).$$

Remarque:

L'expression en fonction des variables E et H de la solution du problème de Riemann à l'interface de deux cellules est:

$$\begin{cases} H_{II} = H_{III} = \frac{\delta}{2} (H_{i+1}^n - Y_{i+1} E_{i+1}^n) + \frac{\beta}{2} (H_i^n + Y_i E_i^n), \\ E_{II} = E_{III} = \frac{\delta}{2} (E_i^n + Z_i H_i^n) + \frac{\beta}{2} (E_{i+1}^n - Z_{i+1} H_{i+1}^n), \end{cases}$$

où l'impédance et l'admittance sont ici non adimensionnées.

D'après les tableaux 1 et 2 où figurent les solutions exactes du système de Maxwell, on

peut facilement vérifier que le schéma de Godunov (spatio-temporel), conditionnellement stable, est exact pour un nombre de Courant (CFL) maximum et égal à un sur tout le domaine. Nous utilisons ici un maillage tel que nous ayons le même nombre de points par longueur d'onde dans chaque couche de matériaux pour réaliser cette condition de CFL maximum.

Bien que le schéma de Godunov, d'ordre un en temps et en espace, soit exact pour un CFL égal à un, une extension aux ordres supérieurs est nécessaire car cette condition est irréalisable dans le cas multidimensionnel.

3.2 Extension aux ordres deux et trois

On peut réécrire les flux numériques (de Steger-Warming et de Godunov) sous la forme suivante:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{ij}^n = \Phi(\vec{W}_i^n, \vec{W}_j^n),$$

où l'indice ij désigne l'interface des cellules C_i et C_j ($j = i + 1$ et $j = i - 1$).

De telles approximations aboutissent à des solveurs précis au premier ordre seulement. Van Leer [8] a proposé une méthode (appelée MUSCL) pour accroître la précision du schéma sans modifier la fonction de flux numérique Φ . Cette méthode est basée sur une interpolation linéaire par morceaux au lieu d'une approximation constante par morceaux comme dans le cas d'un schéma d'ordre un.

L'extension du flux numérique aux ordres deux et trois en espace est ici obtenue en utilisant un β -schéma qui réalise une combinaison convexe des pentes centrées et décentrées de la solution aux noeuds i et j du maillage:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{F}}_{ij}^n = \Phi(\vec{W}_{ij}^n, \vec{W}_{ji}^n), \\ \vec{W}_{ij} = \vec{W}_i + \frac{1}{2} \{ (1 - 2\beta)(\vec{W}_j - \vec{W}_i) + 2\beta \vec{\nabla} \vec{W}_i^H \cdot \vec{l}_{ij} \}, \\ \vec{W}_{ji} = \vec{W}_j - \frac{1}{2} \{ (1 - 2\beta)(\vec{W}_j - \vec{W}_i) + 2\beta \vec{\nabla} \vec{W}_j^H \cdot \vec{l}_{ij} \}, \end{array} \right. \quad , \beta \in (0, 1),$$

où \vec{l}_{ij} est le vecteur associé au segment $[y_i, y_j]$, $\vec{\nabla} \vec{W}_i^H$ représente les gradients de Galerkin et β le paramètre de décentrage. D'autre part, nous avons choisi un schéma explicite de Runge-Kutta à trois pas pour obtenir un schéma d'intégration en temps d'ordre trois. Nous rappelons que le schéma spatio-temporel résultant est d'ordre trois en temps et en espace pour $\beta = 1/3$ (cf. [3]).

4 Expériences numériques

4.1 Domaine d'expérimentation

On considère dans un premier temps un milieu de propagation composé de deux matériaux: à droite de $y = 0$, le vide dont les caractéristiques sont précisées plus loin, et à gauche, un matériau de caractéristiques ε et μ . Pour tester numériquement les deux

schémas, nous allons d'une part envisager la propagation d'une onde plane de pulsation $\omega = 2\pi f$ ($f = 0,3 \text{ GHz}$) émise à l'instant $t = 0$ dans le vide par un signal de type pulse. En mode $(TM)_z$, ce pulse est un signal sinusoidal tronqué de la manière suivante :

$$\begin{cases} \vec{E}(y, t = 0) = E_0 \cos\left(\frac{\omega}{c_0}(y - y_0)\right) \chi_{[y_0 - \frac{\lambda_0}{4}, y_0 + \frac{\lambda_0}{4}]}(y) \vec{e}_z, \\ \vec{H}(y, t = 0) = H_0 \cos\left(\frac{\omega}{c_0}(y - y_0)\right) \chi_{[y_0 - \frac{\lambda_0}{4}, y_0 + \frac{\lambda_0}{4}]}(y) \vec{e}_x. \end{cases}$$

où $\chi_{[a,b]}(y)$ est la fonction caractéristique du segment $[a, b]$. On impose aux amplitudes algébriques E_0 et H_0 de vérifier $E_0 = -Z_0 H_0$, ce qui permet de ne s'intéresser qu'au signal suivant (se propageant à une vitesse négative):

$$\begin{cases} \vec{E}(y, t = 0) = +\cos\left(\frac{\omega}{c_0}(y - y_0)\right) \chi_{[y_0 - \frac{\lambda_0}{4}, y_0 + \frac{\lambda_0}{4}]}(y) \vec{e}_z, \\ \vec{H}(y, t = 0) = -\cos\left(\frac{\omega}{c_0}(y - y_0)\right) \chi_{[y_0 - \frac{\lambda_0}{4}, y_0 + \frac{\lambda_0}{4}]}(y) \vec{e}_x. \end{cases}$$

En pratique, on prendra $y_0 = \lambda_0 = 1 \text{ m}$. Notons que ce pulse (noté C^0 par la suite) est continu mais non dérivable sur \mathbb{R} au sens des fonctions. La figure 5 représente le champ électrique à l'instant initial $t = 0$.

Nous considérerons également un pulse incident deux fois continûment dérivable noté C^2 de la forme:

$$\begin{cases} \vec{E}(y, t = 0) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^3 \alpha_n \cos\left(2n \frac{\omega}{c_0}\left(y + \frac{y_0}{4}\right)\right) \chi_{[y_0 - \frac{\lambda_0}{4}, y_0 + \frac{\lambda_0}{4}]}(y) \vec{e}_z, \\ \vec{H}(y, t = 0) = -\vec{E}(y, t = 0), \end{cases}$$

avec $\alpha_0 = +0.43750$, $\alpha_1 = -0.53125$, $\alpha_2 = +0.06250$ et $\alpha_3 = +0.03125$.

Le champ électrique C^2 à l'instant initial est représenté sur la figure 6.

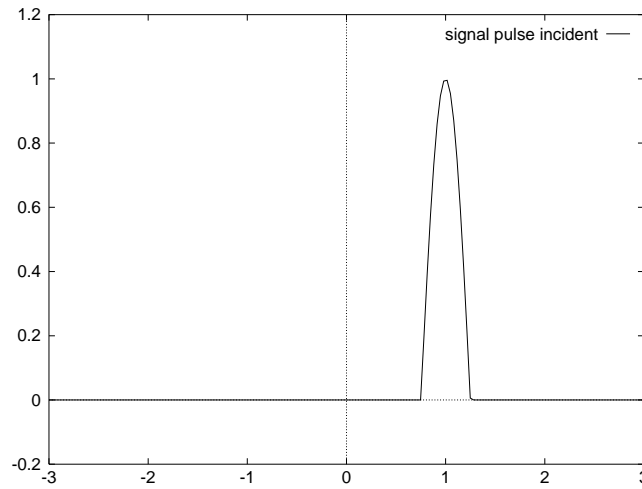


FIG. 5 - *Signal pulse incident C^0 .*

Dans tous les cas tests présentés par la suite, le pas du maillage correspond à 30 points par longueur d'onde pour le pulse C^0 tandis qu'il correspond à environ 15 points par longueur d'onde pour la plus haute fréquence contenue dans le pulse C^2 ($n=3$).

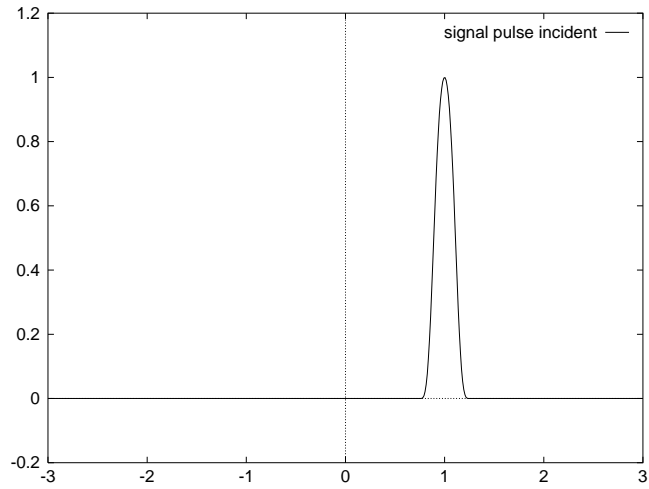


FIG. 6 - *Signal pulse incident C^2 .*

4.2 Matériaux d'expérience

Pour tester la fiabilité de la méthode, nous avons considéré différents indices de matériaux ne correspondant pas nécessairement à des matériaux existants. On donne dans les tableaux suivants une liste de matériaux réels dont les indices varient entre 1.6 et 26. On rappelle les valeurs des caractéristiques du vide:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_0 \approx (36\pi \cdot 10^9)^{-1} SI, \\ \mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7} SI, \\ c_0 \approx 0,3 m/ns, \\ Z_0 \approx 120\pi Ohm. \end{array} \right.$$

Matériaux diélectriques

Les matériaux diélectriques servent de substrat pour les matériaux ferro-électriques et ferro-magnétiques, qui sont d'indices beaucoup plus forts. On donne les caractéristiques relatives au vide de quelques diélectriques dans le tableau ci-dessous.

MATERIAU	PERMITTIVITE	PERMEABILITE	INDICE
Résine	2.65	1	1.628
Verre	3.80	1	1.949
Epoxy	3.85	1	1.961
Alumine	10	1	3.162

Matériaux ferro-électriques

Pour de tels matériaux, la permittivité ε est complexe: $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$, ($i^2 = -1$). Dans les matériaux ferro-électriques, la propagation des ondes électromagnétiques s'accompagne d'une dissipation d'énergie électromagnétique, liée à la partie imaginaire de ε .

Ces matériaux servent d'activateurs élastiques, et sont utilisés sur des épaisseurs très

faibles (de l'ordre du μm au mm). Leurs indices peuvent atteindre des valeurs très fortes (de l'ordre de plusieurs milliers). On donne un exemple de matériau ferro-électrique : le *PZT* pour Plomb Zirconium Titanate.

MATERIAU	PERMITTIVITE		PERMEABILITE	INDICE
	Réelle	Imaginaire		
PZT	700	≈ 1	1	26.457

Matériaux ferro-magnétiques

Pour de tels matériaux, la permittivité ε et la perméabilité μ sont complexes : $\varepsilon = \varepsilon' + i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}$, $\mu = \mu' + i\mu''$ ($\mu'' \ll \mu'$). Il y a dissipation d'énergie en conductivité. Un exemple de matériau ferro-magnétique est le matériau dont sont constituées les bandes magnétiques. Nous considérerons dans nos expériences un matériau semblable aux bandes magnétiques, à savoir $\varepsilon' \approx 100$ et $\mu' \approx 100$, mais qui ne dissipe pas d'énergie.

4.3 Indice constant (milieu homogène)

Nous avons vérifié formellement et numériquement que dans un milieu homogène, les schémas de Steger-Warming et de Godunov sont rigoureusement équivalents à l'ordre un et à l'ordre trois de précision au schéma Isaacson-Courant-Rees.

En particulier, les schémas d'ordre un sont exacts pour un nombre de Courant (CFL) égal à un et ceci quelque soit la régularité de la solution initiale. Cependant, cette condition optimale pour le nombre de Courant est irréalisable en dimension deux ou trois d'espace et l'utilisation d'un schéma au moins d'ordre deux en espace est alors nécessaire. En ce qui concerne le schéma d'ordre un, un nombre de Courant fixé à 0.8 est en fait plus représentatif de son comportement en dimension deux ou trois d'espace. Les comparaisons des champs électriques calculés et de la solution exacte sont montrées sur les figures 7 (CFL=1) et 8 (CFL=0.8). On peut noter un fort taux de dissipation de la solution obtenue pour un CFL inférieur à un. Les solutions obtenues au même temps avec le schéma d'ordre trois sont reportées pour les deux pulses considérés sur les figures 9 et 10 (CFL = 1.4 pour le schéma d'ordre trois).

On peut remarquer que la précision de la solution dépend fortement pour le schéma d'ordre trois de la régularité de la solution initiale. En effet, ce schéma utilise les gradients de la solution pour réaliser l'interpolation de la solution aux bords des cellules et ceux-ci ne sont pas définis en tous points pour le pulse de régularité C^0 . On notera a contrario la très bonne adéquation entre les solutions numérique et exacte pour le pulse de régularité C^2 (fig 10).

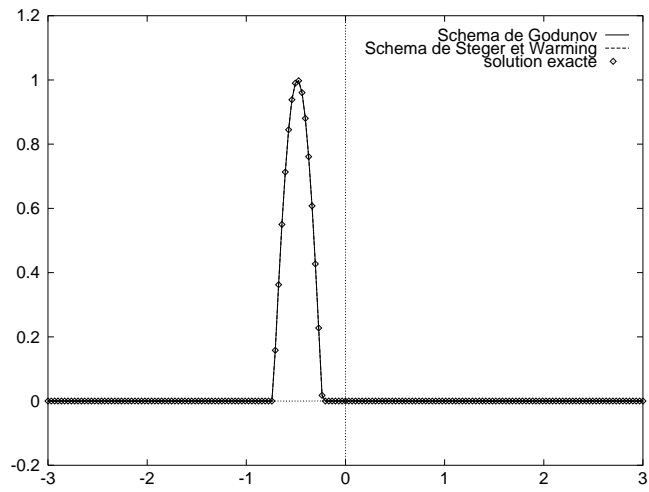


FIG. 7 - $t=5$ ns : *Ordre un*, $CFL=1$, solveurs vs solution exacte, pulse C^0 .

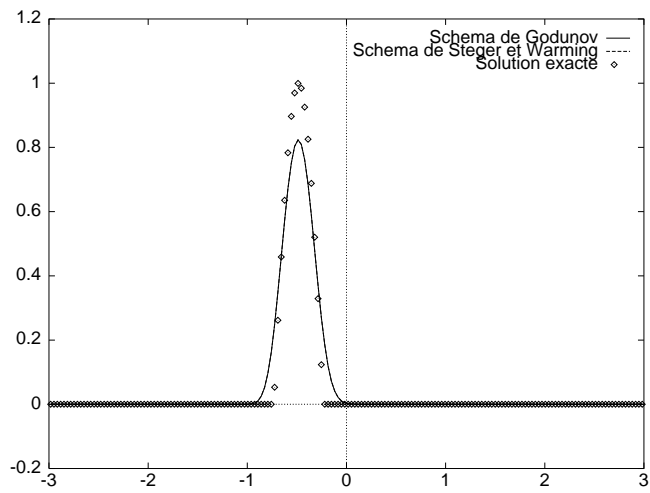


FIG. 8 - $t=5$ ns : *Ordre un*, $CFL=0.8$, solveurs vs solution exacte, pulse C^0 .

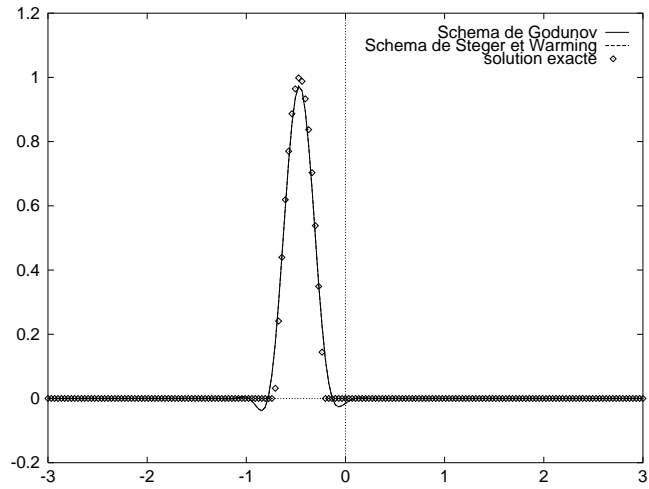


FIG. 9 - $t=5 \text{ ns}$: Ordre trois, $CFL=1.4$, solveurs vs solution exacte, pulse C^0 .

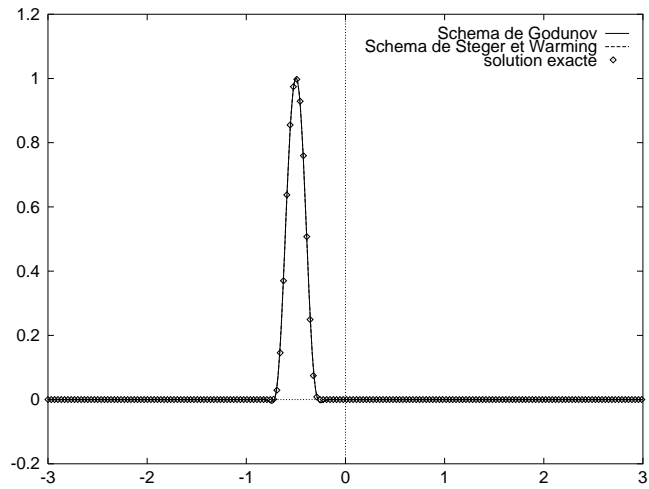


FIG. 10 - $t=5 \text{ ns}$: Ordre trois, $CFL=1.4$, solveurs vs solution exacte, pulse C^2 .

4.4 Saut d'indice petit

On prend ici $\varepsilon = 4$ et $\mu = 1$ ce qui correspond à un matériau d'indice égal à deux. Cela correspondrait à un matériau assez transparent, type verre.

Test des solveurs de Riemann sur des états constants

Pour valider le solveur de Riemann exact, nous allons dans un premier temps considérer des champs initiaux électriques et magnétiques constants sur l'ensemble du domaine et égaux à un. La solution est alors stationnaire.

On s'intéresse à l'évolution du champ d'induction électromagnétique dans le milieu hétérogène. Ainsi, le champ d'induction électrique initial est pris égal à ε à gauche de l'interface et égal à un à droite (de même pour le champ d'induction magnétique avec μ).

On représente sur la figure 11 l'induction électrique obtenue avec le schéma de Steger et Warming après deux itérations. Ce champ comporte des oscillations au voisinage de l'interface entre le vide et le matériau qui se traduisent par une discontinuité du champ électrique à l'interface des matériaux. En revanche, le schéma de Godunov redonne à l'ordre un la solution exacte (fig. 12).

$$\varepsilon = 4, \mu = 1$$

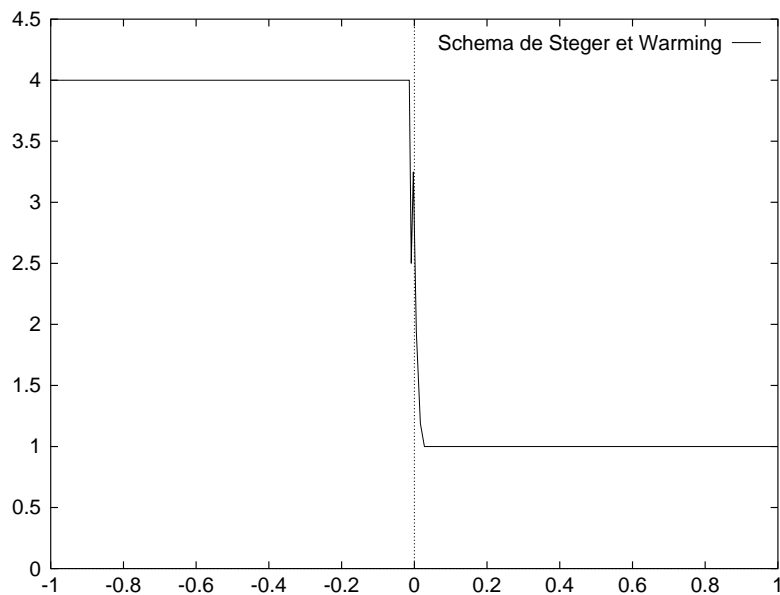


FIG. 11 - *Ordre un: schéma de Steger et Warming.*

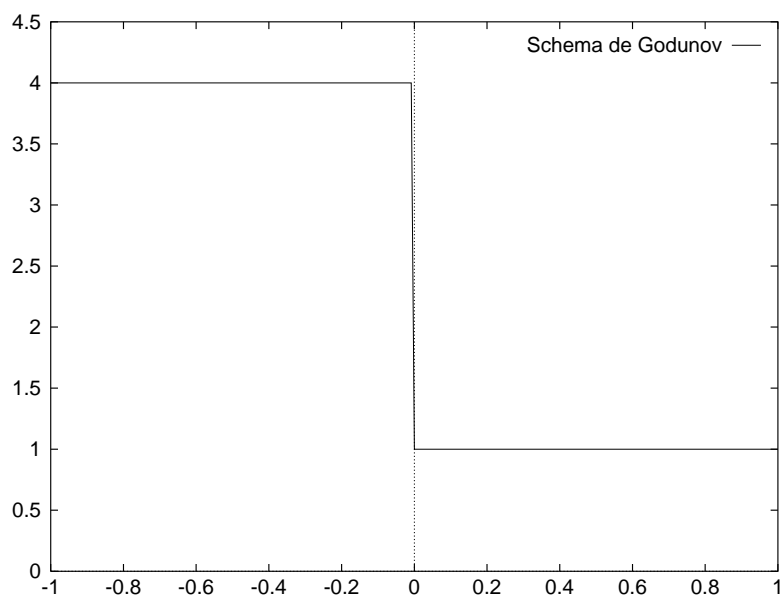


FIG. 12 - *Ordre un: schéma de Godunov.*

Test sur un signal pulse

Le signal électrique émis à $t = 0$ est représenté sur la figure 6. Sur les figures des pages qui suivent, on donne la traversée de l'interface matérielle (au temps $t = 3.75 \text{ ns}$) et le début du transport (à $t = 5 \text{ ns}$) du champ électrique dans le matériau diélectrique pour les deux solveurs.

Tout comme dans un milieu homogène, le schéma de Godunov est exact à l'ordre un pour un nombre de Courant égal à un dans chaque sous-domaine. Nous avons donc repris tout comme dans le cas de matériaux homogènes une valeur de 0.8 pour le CFL afin d'illustrer le comportement du schéma d'ordre un en dimension supérieure (fig. 14,15). Les autres résultats ont été obtenus à l'aide d'un schéma d'ordre trois (CFL=1.4).

On peut noter que le schéma de Steger-Warming génère des oscillations au voisinage de l'interface quelque soit l'ordre de précision du schéma (fig. 14,16) Nous obtenons d'autre part une très bonne approximation de la solution par le schéma de Godunov d'ordre trois (fig. 18,19) pour un CFL supérieur à un (CFL=1.4).

On donne également sur la figure 13 l'évolution chronologique des champs électriques approchés par les deux solveurs et du champ exact au voisinage de l'interface. L'amplitude du champ approché par le schéma de Steger-Warming est régulière mais ne correspond pas à celle de la solution exacte. Cette instabilité sur l'amplitude n'est que locale, pour de faibles indices toutefois.

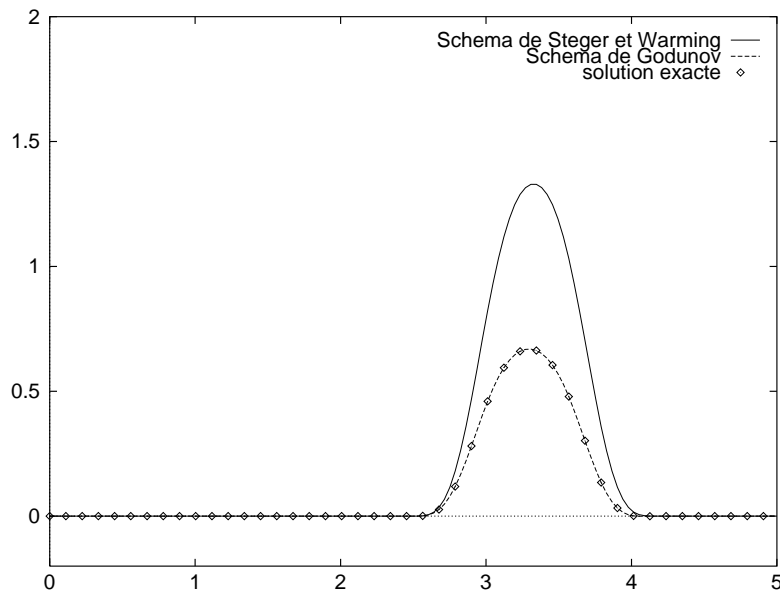


FIG. 13 - Evolution chronologique du champ E à l'interface (temps en ns).

$$\varepsilon = 4, \mu = 1$$

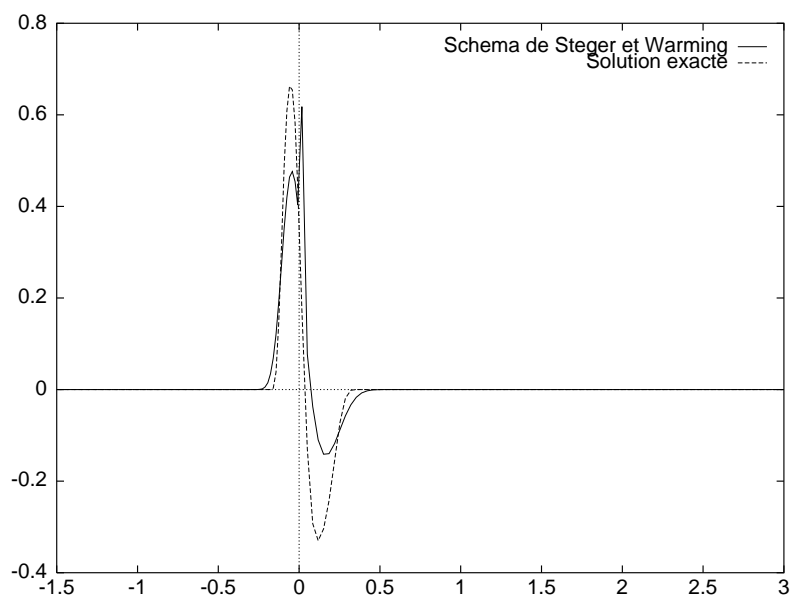


FIG. 14 - $t=3.75$ ns : Ordre un, schéma de Steger et Warming vs solution exacte.

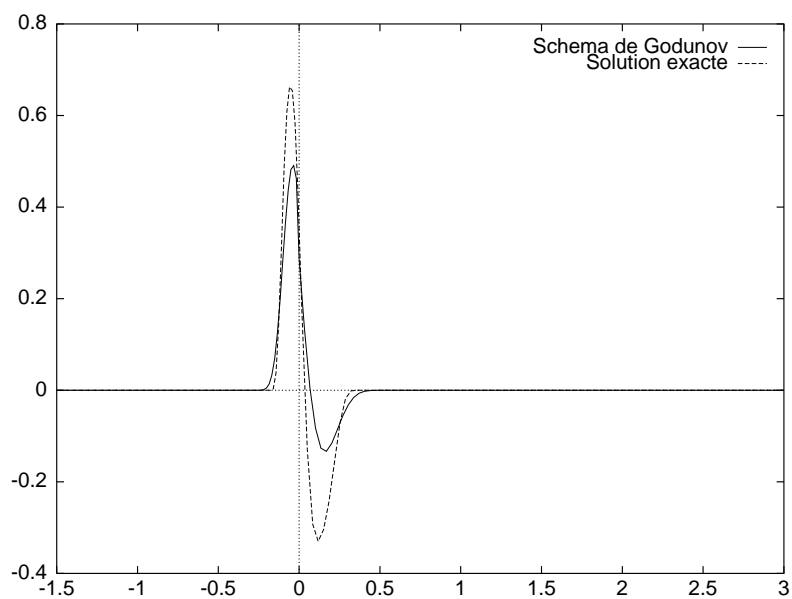


FIG. 15 - $t=3.75$ ns : Ordre un, schéma de Godunov vs solution exacte.

$\varepsilon = 4, \mu = 1$

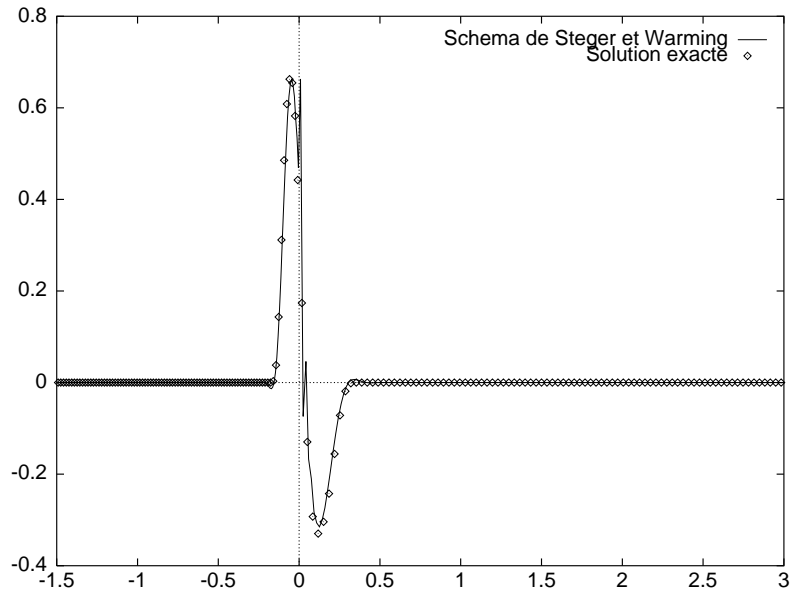


FIG. 16 - $t=3.75$ ns : Ordre trois, schéma de Steger et Warming vs solution exacte.

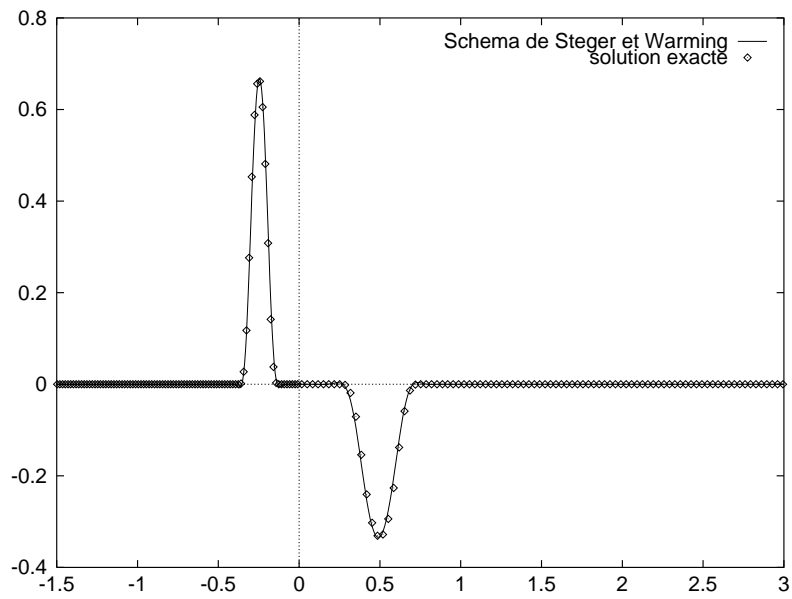


FIG. 17 - $t=5$ ns : Ordre trois, schéma de Steger et Warming vs solution exacte.

$\varepsilon = 4, \mu = 1$

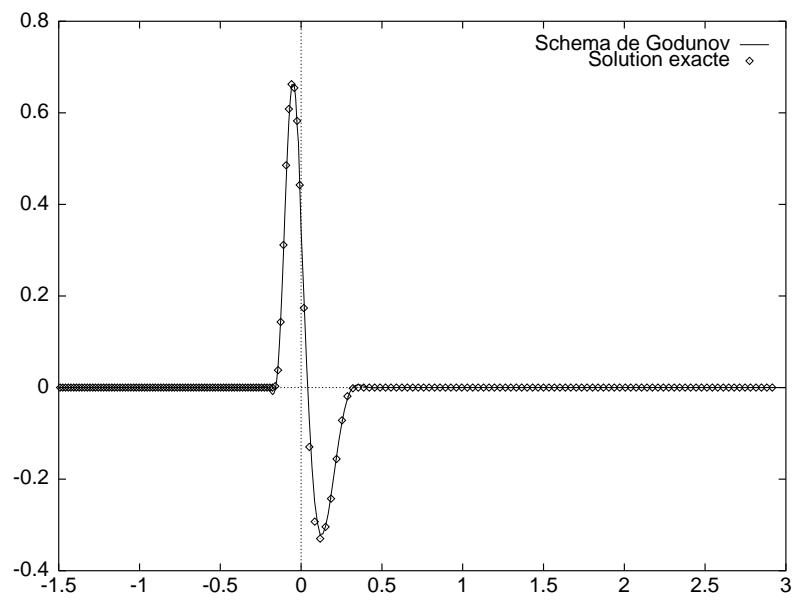


FIG. 18 - $t = 3.75$ ns : Ordre trois, schéma de Godunov vs solution exacte.

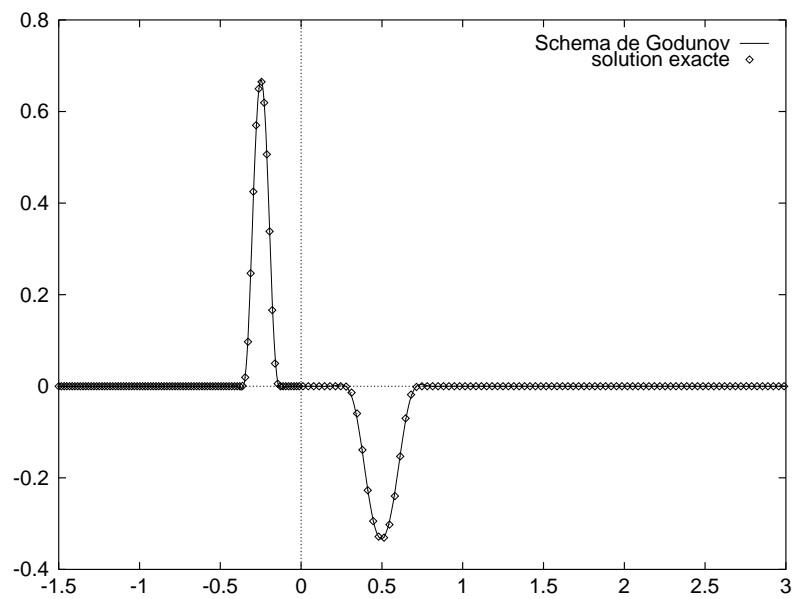


FIG. 19 - $t = 5$ ns : Ordre trois, schéma de Godunov vs solution exacte.

4.5 Saut d'indice élevé

Nous prenons maintenant $\varepsilon = 100$ et $\mu = 100$ soit un matériau d'indice égal à 100. Nous nous intéressons dans un premier temps au signal incident C^0 . Le schéma de Steger et Warming d'ordre trois donne lieu ici à de fortes oscillations (fig. 20). L'utilisation d'un limiteur de pente n'apporterait rien de plus car ces irrégularités apparaissent déjà pour un schéma d'ordre un et proviennent du non respect des conditions de saut à l'interface. Aucune technique de limiteurs consistant à avoir localement un schéma d'ordre un ne peut donc annihiler ces oscillations numériques puisqu'elles ne sont pas liées à la violation d'un principe de maximum discret par le schéma d'ordre trois. En revanche, le schéma de Godunov d'ordre trois se montre dans ce cas de figure très satisfaisant. Les oscillations que l'on peut relever sur les figures 21 et 22 sont dues à la non-dérivabilité du pulse aux bornes de son support.

Les figures 23 et 24 présentent des vues au voisinage de l'interface du champ électrique pour le pulse initial C^2 . Ces résultats, en très bon accord avec la solution exacte, ne présentent pas de dissipation ni de dispersion.

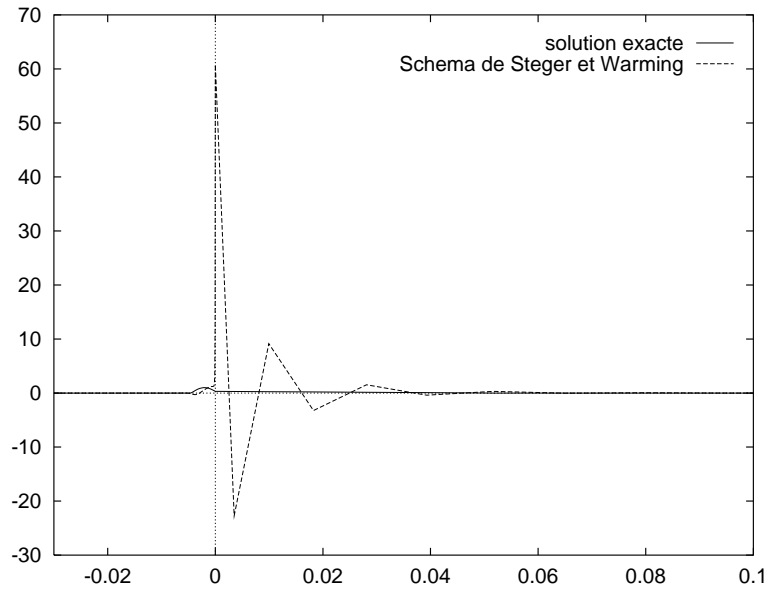


FIG. 20 - $t=4$ ns : Ordre trois, schéma de Steger et Warming vs solution exacte, vue globale.

$\varepsilon = 100$, $\mu = 100$

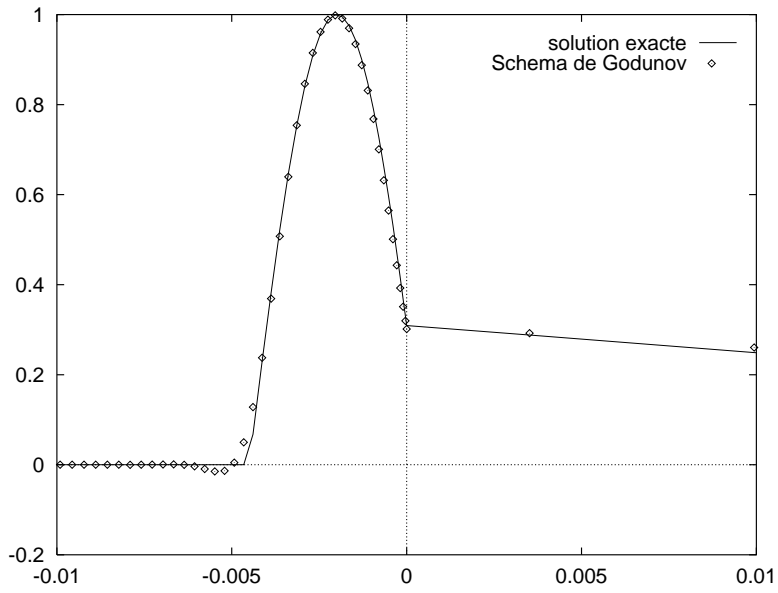


FIG. 21 - $t=4$ ns: Ordre trois, vue près de l'interface, schéma de Godunov vs solution exacte, pulse C^0 .

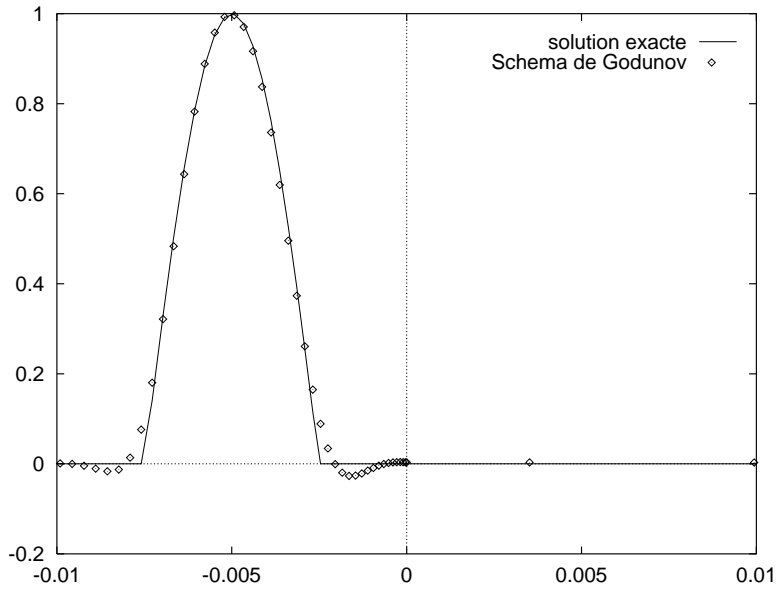


FIG. 22 - $t=5$ ns: Ordre trois, vue près de l'interface, schéma de Godunov vs solution exacte, pulse C^0 .

$\varepsilon = 100$, $\mu = 100$

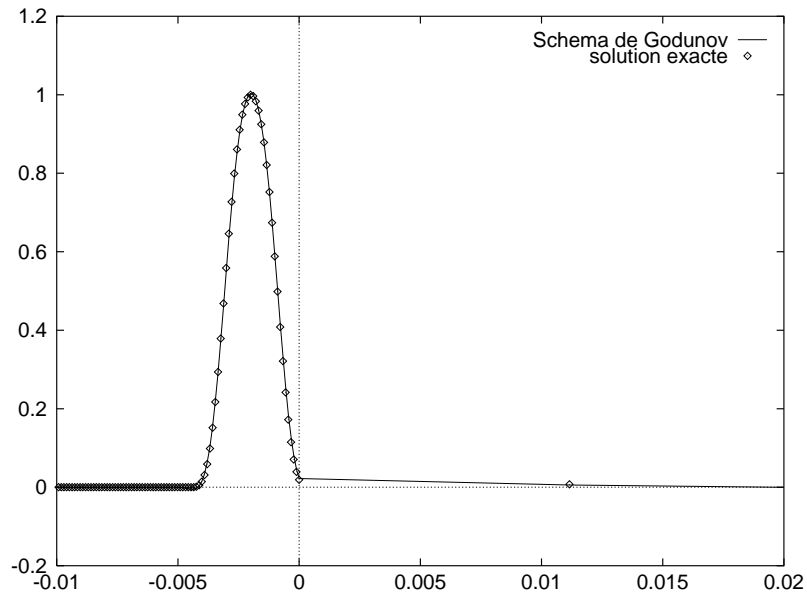


FIG. 23 - $t=4$ ns: Ordre trois, vue près de l'interface, schéma de Godunov vs solution exacte, pulse C^2 .

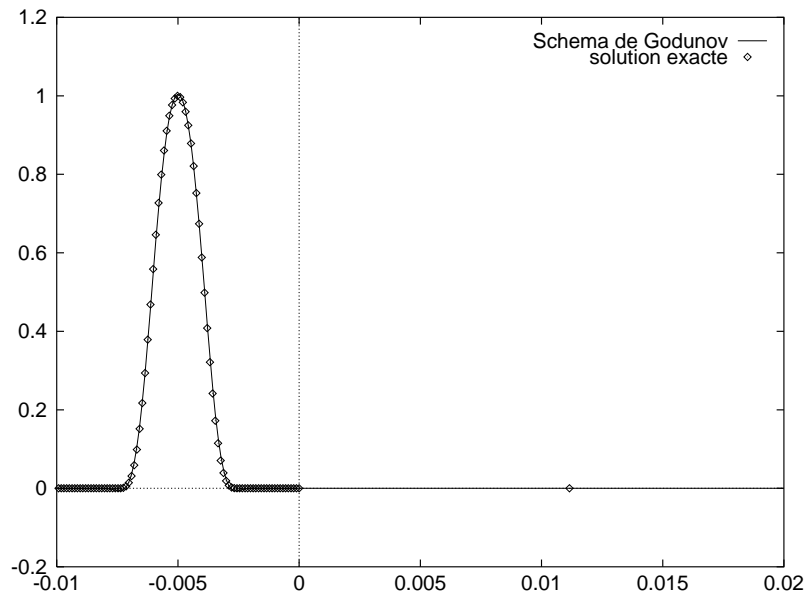


FIG. 24 - $t=5$ ns: Ordre trois, vue près de l'interface, schéma de Godunov vs solution exacte, pulse C^2 .

5 Synthèse

5.1 Coûts comparés des solveurs

Nous présentons maintenant des séries de mesures du coût en temps CPU des deux solveurs à l'ordre un (le passage à l'ordre trois est le même pour les deux solveurs). Ces mesures ont été réalisées sur une machine SUN SPARC Station 10.

On présente sur le graphique 25 les coûts en temps de calcul CPU des solveurs en échelle logarithmique :

- en abscisse: nombre d'itérations en temps (NITER).
- en ordonnée: temps de calcul CPU en secondes (T).

	SOLVEUR APPROCHE				SOLVEUR EXACT			
NITER	10^2	10^3	10^4	10^5	10^2	10^3	10^4	10^5
T (s)	0.230	1.478	14.093	141.20	0.235	1.505	14.126	141.86

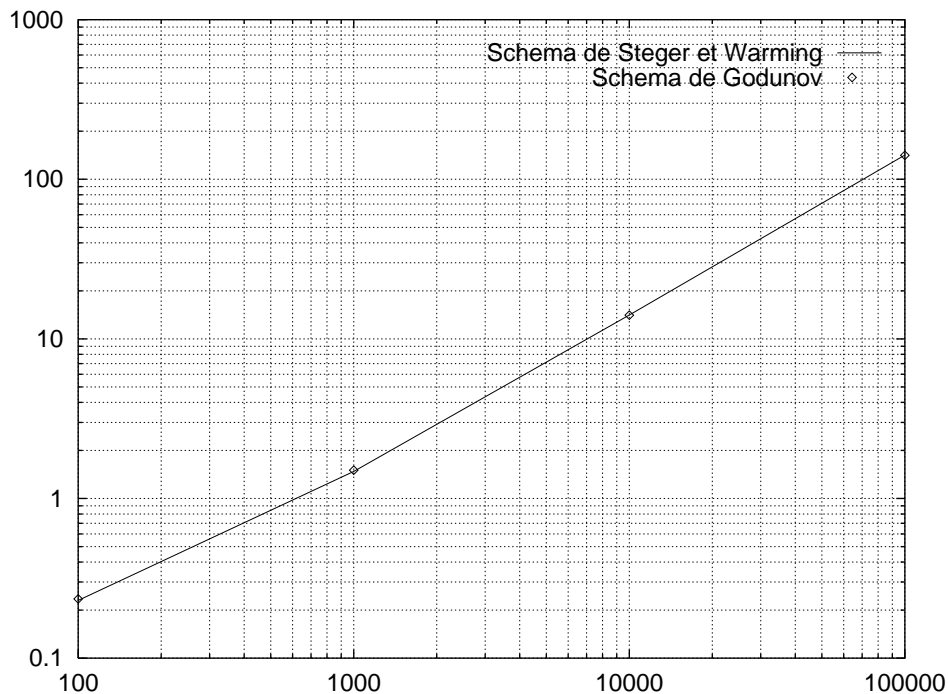


FIG. 25 - *Comparaison du coût des solveurs.*

Il ressort de cette comparaison que, dans le cas monodimensionnel, le coût du schéma de Godunov (tracé par points) est du même ordre que celui du schéma de Steger et Warming (trait plein).

5.2 Synthèse des résultats numériques obtenus

Ces expériences numériques montrent une certaine supériorité du schéma de Godunov sur la généralisation du schéma de Steger et Warming pour l'approximation numérique des équations de Maxwell en milieu hétérogène, les deux schémas représentant des coûts de calcul du même ordre.

Pour des sauts d'indice demeurant dans une gamme de valeurs comprises entre 1 et 25 environ, outre la création d'une discontinuité à l'interface matérielle, le schéma de Steger et Warming présente des solutions assez proches de celles données par le schéma de Godunov. Mais pour des sauts plus importants (indice de 100 par exemple), la discontinuité créée est d'autant plus forte que l'indice est élevé et le schéma de Steger et Warming génère des amplitudes divergeant de la solution exacte du problème.

L'importance de la préservation de la condition d'interface est ainsi mise en évidence puisque c'est uniquement sur cette condition que les deux schémas diffèrent.

6 Problème de couche

6.1 Position du problème

Nous considérons dans cette partie le problème de Maxwell en milieu hétérogène, dans le cas où ce milieu est toujours monodimensionnel, et constitué d'une couche de matériau d'indice élevé (PZT ou ferro-magnétique) placée sur un substrat diélectrique (verre ou résine polyester) d'indice faible (fig. 26). Cette couche est généralement d'une épaisseur e allant du μm à quelques mm.

On ne regarde dans cette partie, dont le but est d'illustrer l'étude qui précède, que le

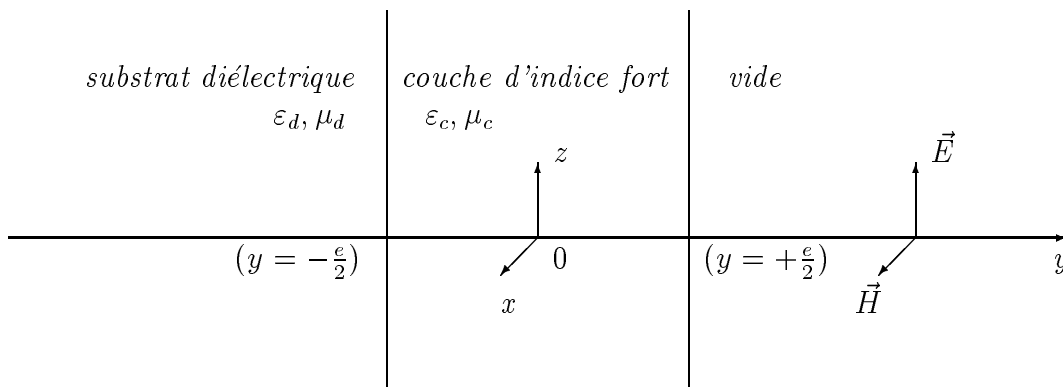


FIG. 26 - *Problème de couche.*

comportement à l'ordre trois du schéma de Godunov puisque le schéma de Steger Warming est instable pour ce type de problème.

6.2 Applications numériques

A titre d'illustration, on considère un matériau ferro-magnétique sans perte en conductivité de permittivité électrique $\varepsilon_c = 100$ et de perméabilité magnétique $\mu_c = 100$ (d'indice $N_c = 100$). Une couche d'épaisseur $e_c = (1/N_c) m$ de ce matériau est placée sur un substrat diélectrique de verre ($\varepsilon_d = 3.8$ et $\mu_d = 1$, indice $N_d = 1.95$) d'épaisseur $e_d = (1/N_d) m$. De plus, ce matériau composite est placé sur un support métallique parfaitement conducteur.

Les figures 27 à 31 montrent le champ électrique après la traversée de la couche et la réflexion sur le métal. L'onde incidente est le pulse C^2 défini auparavant mais centré en $y = 0.5$ à l'instant initial. Le maillage utilisé est uniforme dans les trois zones déterminées par les différents matériaux et le pas d'espace correspond à 30 points par longueur d'onde pour la plus haute fréquence contenue dans ce pulse. Le nombre de Courant est pris égal à 1.5 ce qui détermine un pas de temps raisonnable de l'ordre de $10^{-2} ns$ malgré la raideur du problème.

Enfin, la figure 32 permet de vérifier que la condition aux limites absorbante issue du schéma de Godunov (en ne sélectionnant que les ondes sortantes) n'induit aucune réflexion parasite pour une onde se propageant dans un matériau diélectrique. Notons que ce traitement à la frontière artificielle est exact seulement dans le cas monodimensionnel.

$$\varepsilon_d = 3.8, \mu_d = 1, \varepsilon_c = 100, \mu_c = 100$$

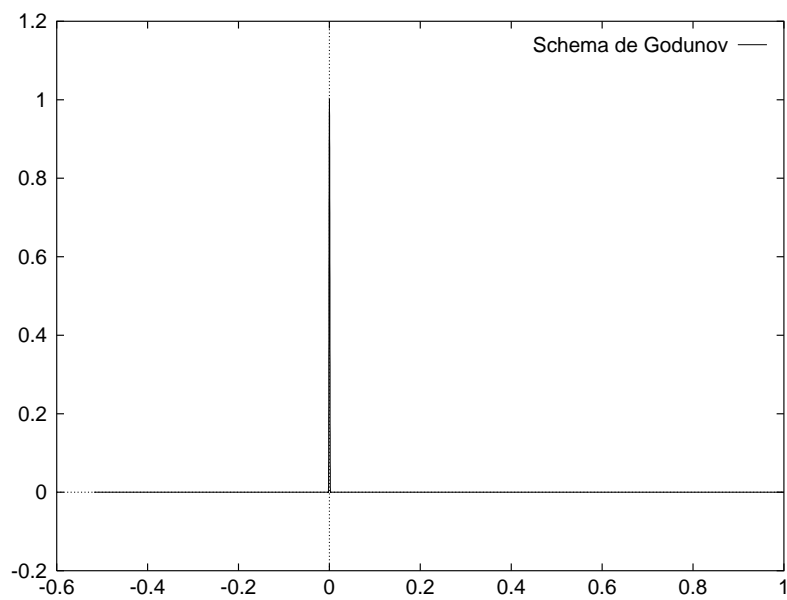


FIG. 27 - $t=3,32$ ns : *Ordre trois, schéma de Godunov, vue d'ensemble.*

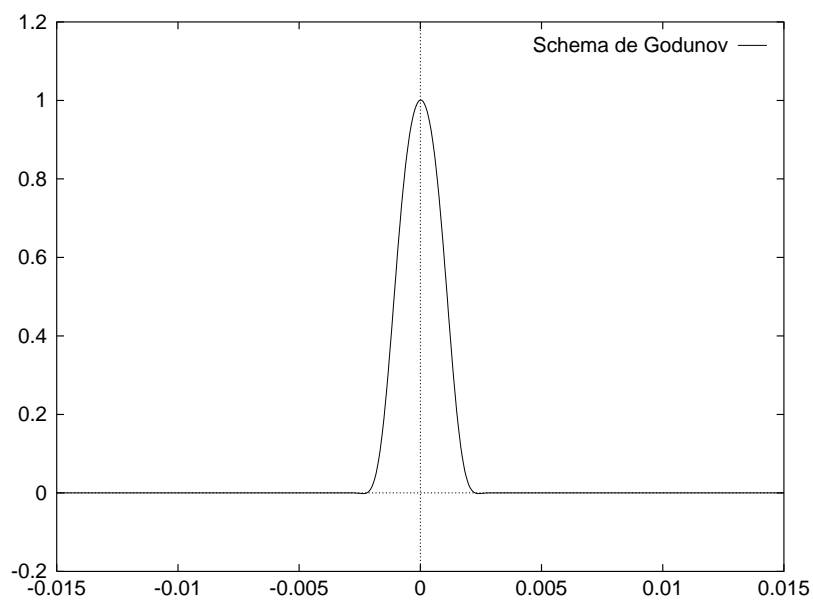


FIG. 28 - $t=3,32$ ns : *Ordre trois, schéma de Godunov, vue dans la couche de matériau ferro-magnétique.*

$$\varepsilon_d = 3.8, \mu_d = 1, \varepsilon_c = 100, \mu_c = 100$$

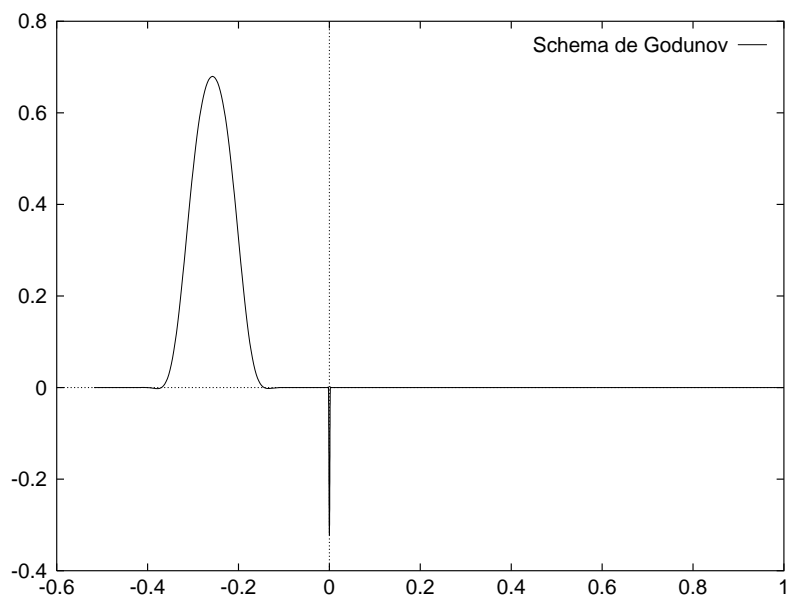


FIG. 29 - $t=6,63$ ns : *Ordre trois, schéma de Godunov, vue d'ensemble.*

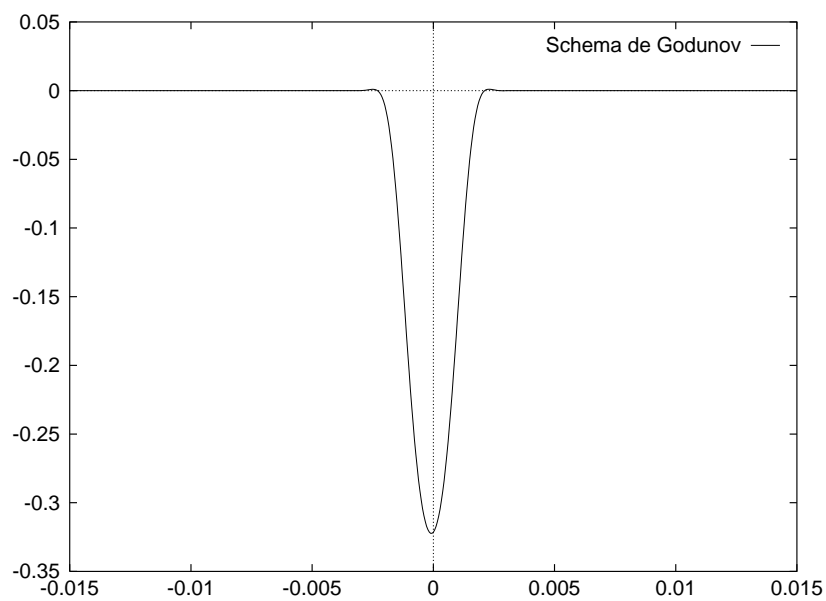


FIG. 30 - $t=6,63$ ns : *Ordre trois, schéma de Godunov, vue dans la couche de matériau ferro-magnétique.*

$$\varepsilon_d = 3.8, \mu_d = 1, \varepsilon_c = 100, \mu_c = 100$$

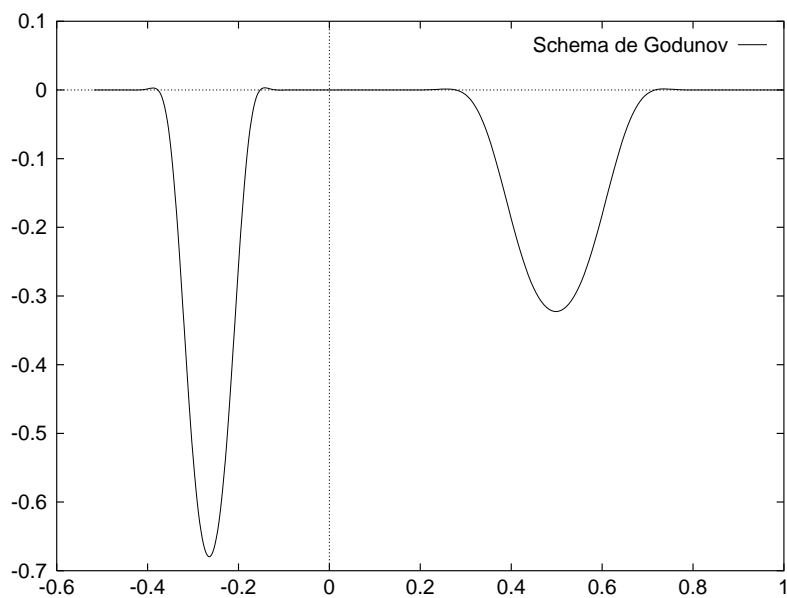


FIG. 31 - $t=10$ ns : Ordre trois, schéma de Godunov, vue d'ensemble après réflexion sur le métal.

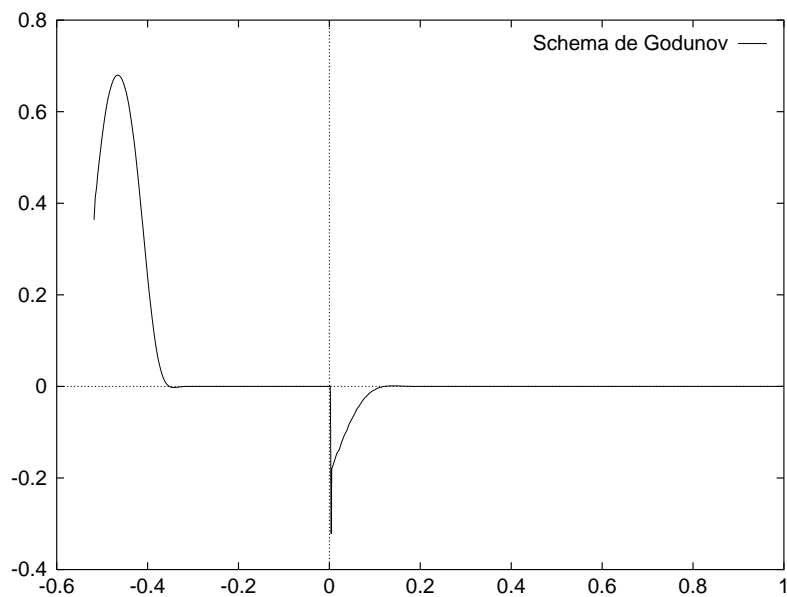


FIG. 32 - $t=8$ ns : Ordre trois, schéma de Godunov, vue d'ensemble pour une condition aux limites absorbante à gauche.

Au bout de $3,32 \text{ ns}$, l'onde émise par le signal pulse a entièrement traversé l'interface vide/couche de matériau ferro-magnétique. L'impédance du matériau ferro-magnétique étant égale à celle du vide, cette traversée n'a engendré aucune réflexion dans le vide. L'onde est, à cet instant, centrée en $y = 0$ au milieu de la couche d'indice élevé (figures 27 et 28). On peut vérifier que l'amplitude de l'onde reste inchangée après la traversée de l'interface (coefficient de transmission théorique égal à 1).

A l'instant $t = 6,63 \text{ ns}$, l'onde a entièrement traversé l'interface couche/verre. Cette traversée a engendré une onde réfléchie dans la couche de matériau ferro-magnétique et une onde transmise dans le verre (figures 29 et 30). On peut encore vérifier d'après les figures la bonne précision des amplitudes numériques des ondes transmise et réfléchie (coefficients de réflexion et de transmission théoriques égaux à -0.322 et 0.678 respectivement).

A l'instant $t = 10 \text{ ns}$, l'onde réfléchie à l'interface verre/couche a traversé l'interface couche/vide et a été entièrement transmise. D'autre part, l'onde transmise dans le verre a subi une réflexion totale sur le métal parfaitement conducteur et revient vers l'interface verre/couche (figure 31).

7 Conclusion

Nous avons étudié ici le système de Maxwell instationnaire dans des milieux linéaires isotropes hétérogènes à une variable d'espace. Nous avons présenté deux extensions du schéma ICR au cas des systèmes hyperboliques linéaires à coefficients non constants, respectivement appelés schéma de Steger-Warming (ou solveur de Riemann approché), et schéma de Godunov (ou solveur de Riemann exact) par analogie au cas non linéaire où ces schémas sont connus et utilisés depuis longtemps.

Les résultats présentés montrent que le schéma de Godunov donne des solutions proches des solutions physiques (*ie* vérifiant les conditions de saut à l'interface entre les matériaux) voire exactes dans certains cas, et ce indépendamment de la variation d'indice dans le milieu. En effet, le schéma de Godunov d'ordre un monodimensionnel est exact pour un nombre de Courant unitaire dans tout le domaine. Cependant, la construction d'un schéma hautement précis en temps et en espace est nécessaire en vue d'une application aux cas multidimensionnels où cette condition est irréalisable.

De plus, ce schéma reste stable dans des formulations d'ordre supérieur (ordre deux ou trois) alors que le schéma dit de Steger-Warming crée des oscillations parasites sur l'amplitude et un déphasage, d'autant plus importants que les indices des matériaux le sont (et ceci quelque soit l'ordre du schéma utilisé). Enfin, les coûts de calcul des deux schémas sont du même ordre.

En dimension d'espace supérieure à un, en plus de l'amplitude de leurs discontinuités, la géométrie de la carte des ε et μ est une source de difficultés pour approcher les solutions du système de Maxwell. Les singularités des courbes ou surfaces d'interface matérielles, et la difficulté de bien représenter celles-ci sur un maillage triangulaire ou tétraédrique s'ajoutent alors aux problèmes causés par l'irrégularité des tenseurs de permittivité et de

perméabilité.

En dimension deux, un solveur basé sur l'extension du schéma de Steger-Warming a déjà été construit par J.P. CIONI et al. [1, 2] pour l'approximation des solutions des équations de Maxwell instationnaires en milieu hétérogène. Ce solveur a montré que, pour des géométries d'interface plus compliquées que le cercle (qui peut être assimilé à un problème monodimensionnel), le seuil d'amplitude des sauts de ε et μ à partir duquel le solveur se détériore vraiment est atteint beaucoup plus tôt (indices inférieurs à 10 au lieu de 25 en une dimension).

Les résultats de cette étude nous encouragent à étendre ce schéma de Godunov en dimension supérieure et voir si ses qualités (précision, robustesse et coût de calcul raisonnable) sont effectivement préservées.

Références

- [1] J.P. CIONI, L. FEZOUÏ & H. STEVE, “A parallel time-domain Maxwell solver using upwind schemes and triangular meshes”, *Impact in Computing in Science and Engineering*, **5**, pp. 215-247, (1993).
- [2] J.P. CIONI, L. FEZOUÏ & D. ISSAUTIER, “High-order upwind schemes for solving time-domain Maxwell equations”, *La Recherche Aérospatiale*, **5**, pp. 319-328, (1994).
- [3] J.A. DESIDERI, A. GOUDJO & V. SELMIN, “Third order numerical schemes for hyperbolic problems”, *Rapport de Recherche INRIA 607*, (1987).
- [4] A. HARTEN, P.D. LAX & B. VAN LEER, “On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservative laws”, *SIAM Review*, **25**, (1983).
- [5] J.D. JACKSON, “Classical Electrodynamics”, second edition, John Wiley & Sons, New-York, (1975).
- [6] P. JOLY & B. MERCIER, “Une nouvelle condition transparente d'ordre deux pour les équations de Maxwell en dimension trois”, *Rapport de Recherche INRIA 1047*, (1989).
- [7] P.D. LAX, “Hyperbolic systems of conservative laws, and the mathematical theory of shock waves”, *Regional Conference Series in Applied Math.*, SIAM, **11**, (1973).
- [8] B. VAN LEER, “Towards the ultimate conservative difference schemes V: a second order sequel to Godunov's method”, *J. Comp. Physics*, **32**, (1979).
- [9] WORKSHOP, “Approximations and numerical methods for the solution of the Maxwell equations”, Washington, (Octobre 1993).

Liste des derniers rapports de recherche du CERMICS

List of previous CERMICS research reports

- 93-19 M. Lorient and L. Fezoui *A Parallel Compressible 3D Navier-Stokes Solver Using Unstructured Meshes*, 17 pages, septembre 1993, Sophia-Antipolis
- 93-20 D. Issautier *Algorithmes Particulaires pour Calculateurs à Architecture Massivement Parallèle*, 11 pages, octobre 1993, Sophia-Antipolis
- 93-21 Y. D'Angelo et
B. Larrouturou *Comparison and Analysis of some Numerical Schemes for Stiff Complex Chemistry Problems*, 34 pages, octobre 1993, Sophia-Antipolis
- 93-22 F. Lebastard *CHOOE: Un gestionnaire d'environnement distribué*, 27 pages, décembre 1993, Sophia-Antipolis
- 93-23 L. He et
B. Larrouturou *Moving Grid Numerical Simulations of Planar Time-Dependent Detonations*, 28 pages, décembre 1993, Sophia-Antipolis
- 94-24 A. Ern, V. Giovangigli *Multi-Component Transport Algorithms*, 270 pages, janvier 1994, Noisy-le-Grand
- 94-25 L. Sainsaulieu *Equilibrium Velocity Distribution Functions for a Kinetic Model of Two-phase Flows*, 22 pages, janvier 1994, Noisy-le-Grand
- 94-26 R. Carpentier,
A. de la Bourdonnaye
B. Larrouturou *On the Derivation of the Modified Equation for the Analysis of Linear Numerical Methods*, 14 pages, janvier 1994, Sophia-Antipolis
- 94-27 P.A. Raviart,
L. Sainsaulieu *A Nonconservative Hyperbolic System Modeling Spray Dynamics. Part 1. Solution of the Riemann Problem*, 37 pages, avril 1994, Noisy-le-Grand
- 94-28 E. Burman,
L. Sainsaulieu *Numerical Analysis of Two Operator Splitting Methods for an Hyperbolic System of Conservation Laws with Stiff Relaxations Terms*, 32 pages, avril 1994, Noisy-le-Grand

- 94-29 G. Caplain *Correctness properties in a control-parallel extension of Fortran*, 27 pages, septembre 1994, Noisy-le-Grand
- 94-30 F. Berreux,
L. Sainsaulieu *A Roe-type Riemann solver for hyperbolic systems with relaxation, based on time-dependent wave decomposition*, 48 pages, novembre 1994, Noisy-le-Grand
- 94-31 L. Sainsaulieu *Traveling waves solution of convection-diffusion systems whose convection terms are weakly non conservative. Application to the modeling of two phase fluid flows*, 31 pages, novembre 1994, Noisy-le-Grand
- 94-32 M. Bouzoubaa *Houria: un résolveur de système de contraintes fonctionnelles hiérarchique*, 18 pages, novembre 1994, Sophia-Antipolis
- 94-33 S. Piperno *Méthodes d'intégration temporelle décalée pour un problème aéroélastique mono-dimensionnel non linéaire*, 42 pages, décembre 1994, Sophia-Antipolis
- 94-34 M. Defranceschi,
C. Le Bris *Computing a molecule: a mathematical viewpoint*, 39 pages, décembre 1994, Noisy-le-Grand
- 95-35 A. de la Bourdonnaye *A substructuring method for a harmonic wave propagation problem: Analysis of the conditioning number of the problem on the interfaces*, 15 pages, janvier 1995, Sophia-Antipolis
- 95-36 A. de la Bourdonnaye,
M. Tolentino *Numerical simulation of scattering problems with Fourier Integral operators*, 18 pages, février 1995, Sophia-Antipolis
- 95-37 G. Gimonet,
J.P. Cioni, L. Fezoui,
F. Poupaud *Approximation numérique des équations de Maxwell en milieu hétérogène monodimensionnel par un solveur de Riemann exact*, 35 pages, avril 1995, Sophia-Antipolis

Ces rapports peuvent être obtenus en s'adressant aux secrétariats du CERMICS :

The reports can be asked from:

Imane Hamade
CERMICS-ENPC
F-93167 Noisy-le-Grand CEDEX
Tél: (33) 1 - 49 14 35 83
email: serre@enpc.fr

Sécretariat
CERMICS-INRIA
B.P.93
F-06902 Sophia-Antipolis Cedex
Tél: (33) 93 65 79 00