

APPLICATION AUX SCHEMAS VOLUMES FINIS  
D'UNE METHODE DE PENALISATION  
DES CONTRAINTES POUR LE  
SYSTEME DE MAXWELL

Sophie DEPEYRE et Didier ISSAUTIER

Juin 1995

*N°* 95-39

# APPLICATION TO FINITE VOLUME SCHEMES OF A CONSTRAINED FORMULATION OF THE MAXWELL SYSTEM

Sophie Depeyre <sup>1</sup>, Didier Issautier <sup>1</sup>, <sup>2</sup>

## Abstract

We present in this paper a new constrained formulation of the Maxwell equations in order to better satisfy the divergence conditions  $div\mathbf{B} = 0$ ,  $div\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ . We prove, using the modified equations, why these conditions are better satisfied by considering this new formulation. We also study the stability of the presented schemes.

# APPLICATION AUX SCHEMAS VOLUMES FINIS D'UNE METHODE DE PENALISATION DES CONTRAINTES POUR LE SYSTEME DE MAXWELL

## Résumé

Nous présentons dans ce papier une nouvelle formulation des équations de Maxwell afin de mieux vérifier les relations de divergence  $div\mathbf{B} = 0$ ,  $div\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ . Nous montrerons, en établissant les équations équivalentes, pourquoi ces relations sont mieux vérifiées en considérant cette nouvelle formulation. Nous avons également étudié la stabilité des schémas présentés.

<sup>1</sup>CERMICS-INRIA, B.P. 93, 06902 Sophia-Antipolis Cédex

<sup>2</sup>Laboratoire J.-A. Dieudonné, U.R.A. 168 du CNRS Université de Nice Sophia-Antipolis Parc Valrose, BP 71, 06108 NICE Cédex 02

# Introduction.

On s'intéresse, dans ce papier, au problème de la conservation des propriétés de divergence des champs électrique et magnétique. Les conditions de divergence (lois de Gauss) ainsi que la loi de conservation des charges sont redondantes dans le modèle continu avec les équations de Maxwell pour une donnée initiale les vérifiant. Numériquement, ces conditions ne sont pas prises en compte et peuvent donc ne pas être préservées au cours du temps par le schéma. En l'absence de charges par exemple, les conditions  $div(\mathbf{B}) = div(\mathbf{E}) = 0$  ne sont préservées par certains schémas que dans le cas de grilles orthogonales. Dans le cas de grilles non structurées (maillages triangulaires), nous avons remarqué que ces conditions n'étaient pas vérifiées exactement au cours du temps et que l'erreur dépendait d'une part du pas du maillage mais surtout de la précision du schéma [5]. Plus exactement, cette erreur semble être liée directement à la viscosité numérique inhérente aux schémas utilisés. En l'absence de charges, les différents cas tests bidimensionnels considérés [5] n'ont révélé aucune influence trop importante de cette erreur sur la solution pour des pas d'espace correspondant à 15-20 points par longueur d'onde. Cependant, la préservation de ces conditions permettrait de réduire le nombre de noeuds du maillage tout en gardant la même précision sur la solution et le gain en efficacité du solveur serait particulièrement importante en dimension trois. De plus, la conservation des charges dans le cas de milieux chargés est beaucoup plus difficile à assurer numériquement et une erreur même faible peut affecter considérablement la solution.

Là encore, l'utilisation de maillages orthogonaux avec un schéma de Yee ou des schémas à direction alternée par exemple permet de satisfaire plus facilement ces conditions. Les grilles triangulaires (ou tétraédriques) qui permettent de mailler plus facilement une géométrie complexe (meilleure approximation de l'obstacle, possibilité de raffinement local,..) introduisent cependant une viscosité numérique supplémentaire dans le schéma (par rapport au même schéma sur une grille orthogonale).

On propose, dans cette étude, une méthode de pénalisation consistant à ajouter un terme de diffusion dans les équations de Maxwell afin de vérifier les propriétés de divergence du champ électromagnétique.

Le papier est divisé en six parties. Dans les deux premières nous rappelons les équations de Maxwell et l'approximation numérique utilisée. Dans la troisième partie nous présentons la méthode de pénalisation des contraintes pour le système de Maxwell, on montrera dans quelle mesure la nouvelle formulation est équivalente au système de Maxwell sans contraintes. Puis dans les parties quatre et cinq on cherchera à voir, par une étude de stabilité et d'équations équivalentes sur différents schémas, si numériquement, les relations de divergence sont mieux préservées. Enfin nous présentons, dans la dernière partie, des résultats numériques où nous nous intéressons plus particulièrement à la vérification des propriétés de divergence.

## 1 Système des équations de Maxwell.

On considère le système de Maxwell écrit en trois dimensions d'espace:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c^2 \text{rot}(\mathbf{B}) = -\frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{E}) = 0 \end{array} \right. \quad (1.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\mathbf{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{array} \right. \quad (1.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}(\mathbf{B}) = 0 \end{array} \right. \quad (1.4)$$

où  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{x})$  et  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t, \mathbf{x})$  sont respectivement le champ électrique et l'induction magnétique,  $c$  est la vitesse de la lumière,  $\epsilon_0$  la permittivité du vide, et  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide. Ces quantités vérifient la relation :  $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ .

$\mathbf{j} = \mathbf{j}(t, \mathbf{x})$  et  $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$  représentent respectivement la densité de courant et la densité de charge et sont reliées par la loi de conservation de la charge:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{j}) = 0 \quad (2)$$

Il est aisé de montrer que:

$$\text{div}(\mathbf{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{div}(\mathbf{B}) = 0 \quad (3)$$

sont redondantes pour des conditions initiales vérifiant ces contraintes, voir [7] par exemple.

## 2 Approximation numérique des équations de Maxwell.

Le système de Maxwell est de forme conservative et de nature hyperbolique. Cela justifie l'approximation numérique basée sur une méthode de volumes finis. On s'intéresse dans notre étude à des schémas décentrés d'ordre élevé en temps et en espace, sur des maillages en tétraèdres et en parallélépipèdes.

### 2.1 Formulation conservative et hyperbolicité.

Les équations de Maxwell (1.1) et (1.2) peuvent s'écrire sous la forme suivante:

$$\mathbf{Q}_t + \mathbf{F}_1(\mathbf{Q})_x + \mathbf{F}_2(\mathbf{Q})_y + \mathbf{F}_3(\mathbf{Q})_z = \mathbf{J} \quad (4)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q} = {}^t(E_1, E_2, E_3, B_1, B_2, B_3) \\ \mathbf{F}_1(\mathbf{Q}) = {}^t(0, c^2 B_3, -c^2 B_2, 0, -E_3, E_2) \\ \mathbf{F}_2(\mathbf{Q}) = {}^t(-c^2 B_3, 0, c^2 B_1, E_3, 0, -E_1) \\ \mathbf{F}_3(\mathbf{Q}) = {}^t(c^2 B_2, -c^2 B_1, 0, -E_2, E_1, 0) \\ \mathbf{J} = -\frac{1}{\epsilon_0} {}^t(j_1, j_2, j_3, 0, 0, 0) \end{array} \right.$$

ou sous forme condensée :

$$\mathbf{Q}_t + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \mathbf{J} \quad (5)$$

avec  $\mathbf{F}(\mathbf{Q}) = {}^t(\mathbf{F}_1(\mathbf{Q}); \mathbf{F}_2(\mathbf{Q}); \mathbf{F}_3(\mathbf{Q}))$ .

On montre facilement que le système (5) est hyperbolique.

En effet, considérons une combinaison linéaire des flux:

$$\mathcal{F}(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Q})$$

où  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  est un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^3$ .

La matrice jacobienne  $\mathcal{A}$  définie par :

$$\mathcal{A}(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{F}'(\mathbf{Q}) = \eta_1 \mathcal{A}_1 + \eta_2 \mathcal{A}_2 + \eta_3 \mathcal{A}_3 \quad , \quad (\mathcal{A}_i)_{i=1, \dots, 3} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}} \mathbf{F}_i(\mathbf{Q})$$

est diagonalisable pour tout vecteur non nul  $\boldsymbol{\eta}$  de  $\mathbb{R}^3$  et pour tout vecteur  $\mathbf{Q}$  de  $\mathbb{R}^6$ . Ses trois valeurs propres avec une multiplicité double sont données par :

$$\begin{cases} \lambda_1 = c \|\boldsymbol{\eta}\| \\ \lambda_2 = -c \|\boldsymbol{\eta}\| \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Cette propriété des équations de Maxwell nous conduit naturellement à utiliser des schémas décentrés connus pour être bien adaptés à la résolution numérique des systèmes conservatifs hyperboliques.

## 2.2 Formulation variationnelle.

Soit  $\mathcal{T}_h$  une discrétisation par éléments finis du domaine  $\Omega_h$ , approximation par des polyèdres (tétraèdres ou parallélépipèdes) du domaine de calcul  $\Omega$ . A chaque noeud  $S_i$ , est associée une cellule  $C_i$  (voir Fig. 1). La réunion des cellules forme une nouvelle partition de  $\Omega_h$ .

$$\Omega_h = \bigcup_{i=1}^{ns} C_i$$

où  $ns$  représente le nombre de noeuds du maillage.

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_t + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \mathbf{J} & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{Q}_0(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega \end{cases} \quad (6)$$

où  $\mathbf{Q}_0$  vérifie les conditions de divergence (1.3) et (1.4). On complète (6) avec des conditions aux limites. On utilise en général deux sortes de conditions sur  $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_b \cup \Gamma_\infty$  : une condition de conducteur parfait sur  $\Gamma_b$  et des conditions aux limites absorbantes sur  $\Gamma_\infty$ .

La formulation faible de (6) s'écrit pour chaque cellule  $C_i$  :

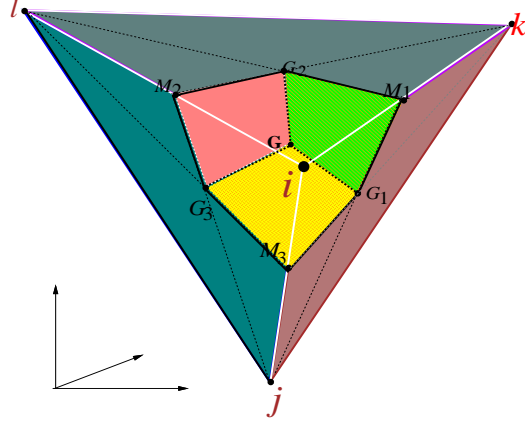


FIG. 1 - Construction d'une cellule pour un maillage tétraédrique.

$$\int_{C_i} (\mathbf{Q}_t + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Q})) d\mathbf{x} = \int_{C_i} \mathbf{J} d\mathbf{x} \quad (7)$$

En supposant  $(\mathbf{Q}_t)$  constant sur la cellule  $C_i$ , on obtient:

$$Vol(C_i) (\mathbf{Q}_t)_i + \int_{C_i} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Q}) d\mathbf{x} = \int_{C_i} \mathbf{J} d\mathbf{x} \quad (8)$$

En utilisant la formule de Green, l'équation (8) nous conduit à :

$$\begin{aligned} Vol(C_i) (\mathbf{Q}_t)_i &= - \sum_{j \in K(i)} \int_{\partial C_{ij}} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{ij} d\sigma < 1 > \\ &- \int_{\partial C_i \cap \Gamma_b} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} d\sigma < 2 > \\ &- \int_{\partial C_i \cap \Gamma_\infty} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} d\sigma < 3 > \\ &+ \int_{C_i} \mathbf{J} d\mathbf{x} < 4 > \end{aligned} \quad (9)$$

où  $\boldsymbol{\nu}_{ij}$  est la normale extérieure à l'interface  $\partial C_{ij}$  entre deux cellules  $C_i$  et  $C_j$ , et  $K(i)$  l'ensemble des noeuds voisins d'un sommet  $i$ .

D'autre part, l'invariance par rotation du système (1) nous permet d'utiliser une seule composante de  $\mathcal{F}$  pour définir les flux tridimensionnels.

En effet, soit  $R$  une rotation de  $\mathbb{R}^3$  qui transforme  $\mathbf{Q} = {}^t(\mathbf{B}, \mathbf{E})$  en  $\widehat{\mathbf{Q}} = {}^t(R\mathbf{B}, R\mathbf{E})$ , on peut montrer facilement la relation suivante:

$$\mathcal{F}(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\eta}) = \|\boldsymbol{\eta}\| (R^{-1} \circ \mathbf{F}_1)(\widehat{\mathbf{Q}}) \quad (10)$$

### 2.3 Schéma décentré d'ordre un.

On décrit maintenant l'approximation du terme  $\int_{\partial C_{ij}} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{ij} d\sigma$ .

Cette intégrale est évaluée par:

$$\Phi_{ij} = \widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{Q}) \cdot \boldsymbol{\eta}$$

où  $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) = \int_{\partial C_{ij}} \boldsymbol{\nu}_{ij} d\sigma$  et  $\widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{Q})$  est une approximation de  $\mathbf{F}(\mathbf{Q})$  sur l'interface  $\partial C_{ij}$ . On introduit une fonction de flux numérique  $\Phi_{ij}$  décentrée du premier ordre, qui dépend des deux états  $(\mathbf{Q})_i$  et  $(\mathbf{Q})_j$ .

En utilisant l'invariance par rotation (11), le flux numérique décentré s'écrit :

$$\Phi_{ij} = \Phi(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_j, \boldsymbol{\eta}) = \|\boldsymbol{\eta}\| R^{-1}(\mathcal{A}_1^+ \widehat{\mathbf{Q}}_i + \mathcal{A}_1^- \widehat{\mathbf{Q}}_j) \quad (11)$$

où  $\mathcal{A}_1^+$  et  $\mathcal{A}_1^-$  sont définies par:  $\mathcal{A}_1^\pm = T\Lambda^\pm T^{-1}$  avec  $\Lambda^+ = \text{diag}(\max(\lambda_k, 0))$  et  $\Lambda^- = \Lambda - \Lambda^+$ .

On se référera à [6] pour le traitement des conditions aux limites.

### 2.4 Approximation d'ordre supérieur.

La méthode MUSCL (Monotonic Upwind Schemes for Conservation Laws) permet d'augmenter la précision des schémas en définissant de nouvelles valeurs  $\mathbf{Q}_{ij}$  et  $\mathbf{Q}_{ji}$  aux interfaces des cellules sans modifier la fonction de flux numérique  $\Phi$ , toujours définie par (11). Dans la méthode MUSCL [9], ces valeurs sont obtenues par une interpolation linéaire sur chaque cellule. Nous utilisons ici, une formulation dite  $\beta$ -schéma pour définir les valeurs aux interfaces :

$$\begin{cases} \Phi_{ij} = \Phi_{ij}(\mathbf{Q}_{ij}, \mathbf{Q}_{ji}) \\ \mathbf{Q}_{ij} = \mathbf{Q}_i + \frac{1}{2} \{ (1 - 2\beta)(\mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_i) + 2\beta \vec{\nabla} \mathbf{Q}_i^H \cdot \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j \} \\ \mathbf{Q}_{ji} = \mathbf{Q}_j - \frac{1}{2} \{ (1 - 2\beta)(\mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_i) + 2\beta \vec{\nabla} \mathbf{Q}_j^H \cdot \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j \} \end{cases} \quad (12)$$

où  $\beta$  est un paramètre de décentrage qui joue aussi un rôle déterminant dans la précision des schémas. En prenant  $\beta = \frac{1}{3}$ , on obtient un schéma du troisième ordre en espace pour des maillages structurés [8].

Le gradient  $(\vec{\nabla} \mathbf{Q})_{i,j}$  peut être défini de plusieurs façons: on utilise ici une approche de type éléments finis.

Dans le cas d'un maillage en parallélépipèdes:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \mathbf{Q}_i^H \big|_R &= \frac{1}{\text{Vol}(\text{Supp}(\varphi_i))} \int_{\text{Supp}(\varphi_i)} \vec{\nabla} \mathbf{Q} d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{\text{Vol}(\text{Supp}(\varphi_i))} \sum_{R,i \in R} \sum_{k=1}^8 \mathbf{Q}_{ik} \int_R \vec{\nabla} \varphi_{ik} d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (13)$$

où les  $i^k$  ( $k = 1, \dots, 8$ ) sont les huit sommets du parallélépipède  $R$  et  $\vec{\nabla} \varphi_{i^k}$  le gradient de la fonction de base Q1 associée au noeud  $i^k$ .

Pour un maillage tétraédrique:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \mathbf{Q}_i^H \Big|_T &= \frac{1}{\text{Vol}(\text{Supp}(\varphi_i))} \int_{\text{Supp}(\varphi_i)} \vec{\nabla} \mathbf{Q} \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{\text{Vol}(C_i)} \sum_{T, i \in T} \frac{\text{Vol}(T)}{3} \sum_{k=1}^4 \mathbf{Q}_{i^k} \vec{\nabla} \varphi_{i^k}(T) \end{aligned} \tag{14}$$

où les  $i^k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) sont les quatre sommets du tétraèdre  $T$  et  $\vec{\nabla} \varphi_{i^k}(T)$  le gradient constant sur  $T$  de la fonction de base P1 associée au noeud  $i^k$ .

## 2.5 Intégration en temps.

La précision en temps est importante pour les problèmes instationnaires, ce qui nous amène à choisir des schémas temporels explicites et hautement précis. Pour cela, nous utilisons la méthode explicite multi-pas de Runge-Kutta, dont le nombre de pas déterminants pour la précision est à ajuster en fonction du paramètre  $\beta$ .

On donne ici l'algorithme  $RK \, r$  (dans notre cas  $r=1, \dots, 3$ ):

$$\begin{cases} Q^0 = Q^n \\ Q^l = Q^0 - \frac{\Delta t}{(r+1-l)} \Phi(Q^{l-1}) \quad l = 1, 2, \dots, r \\ Q^{n+1} = Q^r \end{cases}$$

où  $\Phi$  représente la somme des flux sur la cellule  $C_i$ , et  $\Delta t$  vérifie:  $t^n = n\Delta t$ . Pour  $\beta = \frac{1}{3}$  et  $r = 3$ , ce schéma est bien d'ordre trois en temps, du fait de la linéarité du système de Maxwell.

## 3 Méthode de pénalisation des contraintes pour le système de Maxwell.

### 3.1 Présentation de la méthode.

En pratique, la loi de conservation de la charge (2) n'est pas vérifiée dans le cas discret, par conséquent, les conditions sur la divergence (1.3) et (1.4) ne sont pas satisfaites non plus.

Pour surmonter cette difficulté, on peut introduire des multiplicateurs de Lagrange et définir une méthode d'éléments finis qui vérifie les contraintes (1.3),(1.4) au niveau discret. Cependant, cela conduit à résoudre une équation de Laplace à chaque pas de temps [1].

Ici, on tient à conserver le caractère de type loi de conservation du système pour pouvoir



appliquer une méthode de volumes finis. Notre approche consiste à introduire un terme de viscosité dans les équations de Maxwell (1.1) et (1.2).

Soit  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\gamma}$  deux constantes positives. On considère le nouveau problème:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c^2 \text{rot}(\mathbf{B}) - \frac{1}{\bar{\alpha}} \nabla(\text{div} \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{j} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{E}) - \frac{1}{\bar{\gamma}} \nabla(\text{div} \mathbf{B}) = 0 \end{array} \right. \quad (15.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - c^2 \text{rot}(\mathbf{B}) - \frac{1}{\bar{\alpha}} \nabla(\text{div} \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{j} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{E}) - \frac{1}{\bar{\gamma}} \nabla(\text{div} \mathbf{B}) = 0 \end{array} \right. \quad (15.2)$$

toujours complété par la condition de Cauchy vérifiant (3).

Concernant les équations (15.1,15.2) on a les résultats suivants:

**Proposition 3.1** *Les systèmes (1.1,1.2) et (15.1,15.2) sont équivalents si les données initiales  $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0$  vérifient (3).*

**Proposition 3.2** *La nouvelle formulation (15.1,15.2) des équations de Maxwell préserve les estimations d'énergie.*

Le lecteur intéressé pourra trouver une preuve de ces deux propositions dans [11].

$\bar{\alpha}$  et  $\bar{\gamma}$  ont la dimension de l'inverse d'un coefficient de viscosité, c'est à dire des  $s/m^2$ .

Le système (15.1,15.2) s'écrit alors en variables adimensionnées:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{B}) - \frac{1}{\alpha} \nabla(\text{div} \mathbf{E} - \rho) = -\mathbf{j} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{E}) - \frac{1}{\gamma} \nabla(\text{div} \mathbf{B}) = 0 \end{array} \right. \quad (15.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{B}) - \frac{1}{\alpha} \nabla(\text{div} \mathbf{E} - \rho) = -\mathbf{j} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{E}) - \frac{1}{\gamma} \nabla(\text{div} \mathbf{B}) = 0 \end{array} \right. \quad (15.4)$$

### 3.2 Formulation faible.

Les équations (15.3,15.4) peuvent s'écrire sous la forme:

$$\mathbf{Q}_t + \mathbf{F}_1(\mathbf{Q})_x + \mathbf{F}_2(\mathbf{Q})_y + \mathbf{F}_3(\mathbf{Q})_z = \mathbf{J} + \mathbf{G}_1(\mathbf{Q})_x + \mathbf{G}_2(\mathbf{Q})_y + \mathbf{G}_3(\mathbf{Q})_z \quad (16)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q} = {}^t(E_1, E_2, E_3, B_1, B_2, B_3) \\ \mathbf{F}_1(\mathbf{Q}) = {}^t(0, B_3, -B_2, 0, -E_3, E_2) \\ \mathbf{F}_2(\mathbf{Q}) = {}^t(-B_3, 0, B_1, E_3, 0, -E_1) \\ \mathbf{F}_3(\mathbf{Q}) = {}^t(B_2, -B_1, 0, -E_2, E_1, 0) \\ \mathbf{J} = -{}^t(j_1, j_2, j_3, 0, 0, 0) \\ \mathbf{G}_1(\mathbf{Q}) = {}^t(\frac{1}{\alpha}(\text{div} \mathbf{E} - \rho), 0, 0, \frac{1}{\gamma} \text{div} \mathbf{B}, 0, 0) \\ \mathbf{G}_2(\mathbf{Q}) = {}^t(0, \frac{1}{\alpha}(\text{div} \mathbf{E} - \rho), 0, 0, \frac{1}{\gamma} \text{div} \mathbf{B}, 0) \\ \mathbf{G}_3(\mathbf{Q}) = {}^t(0, 0, \frac{1}{\alpha}(\text{div} \mathbf{E} - \rho), 0, 0, \frac{1}{\gamma} \text{div} \mathbf{B}) \end{array} \right.$$

En utilisant les notations introduites précédemment, la formulation faible de (16) s'écrit:

$$\begin{aligned} \int_{S_i} (\mathbf{Q}_t) \psi_i d\mathbf{x} + \int_{S_i} (\mathbf{F}_1(\mathbf{Q})_x + \mathbf{F}_2(\mathbf{Q})_y + \mathbf{F}_3(\mathbf{Q})_z) \psi_i d\mathbf{x} &= \int_{S_i} \mathbf{J} \psi_i d\mathbf{x} \\ &+ \int_{S_i} (\mathbf{G}_1(\mathbf{Q})_x + \mathbf{G}_2(\mathbf{Q})_y + \mathbf{G}_3(\mathbf{Q})_z) \psi_i d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (17)$$

où  $S_i$  désigne le support de la fonction test  $\psi_i$ . La formulation mixte volumes finis-éléments finis apparaît ici avec le choix des fonctions tests  $\psi_i$  suivant les flux intégrés. Pour les flux convectifs et l'intégrale de courant nous utilisons comme fonction test la fonction caractéristique de la cellule  $C_i$ ; pour les flux diffusifs, nous prenons la fonction de base  $\varphi_i$ , associée au noeud  $i$ . On obtient ainsi:

$$Vol(C_i) (\mathbf{Q}_t)_i + \int_{C_i} \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Q}) d\mathbf{x} = \int_{C_i} \mathbf{J} d\mathbf{x} + \int_{Supp(\varphi_i)} (\mathbf{G}_1(\mathbf{Q})_x + \mathbf{G}_2(\mathbf{Q})_y + \mathbf{G}_3(\mathbf{Q})_z) \varphi_i d\mathbf{x} \quad (18)$$

En appliquant à (18) la formule de Green, il vient:

$$\begin{aligned} Vol(C_i) (\mathbf{Q}_t)_i + \sum_{j \in K(i)} \int_{\partial C_{ij}} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{ij} d\sigma + \int_{\partial C_i \cap (\Gamma_b \cup \Gamma_\infty)} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} d\sigma &= \int_{C_i} \mathbf{J} d\mathbf{x} \\ &- \int_{Supp(\varphi_i)} (\mathbf{G}_1(\mathbf{Q}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \mathbf{G}_2(\mathbf{Q}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} + \mathbf{G}_3(\mathbf{Q}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}) d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\partial C_i \cap (\Gamma_b \cup \Gamma_\infty)} (\mathbf{G}_1(\mathbf{Q}) + \mathbf{G}_2(\mathbf{Q}) + \mathbf{G}_3(\mathbf{Q})) \cdot \mathbf{n} d\sigma \end{aligned} \quad (19)$$

Le terme de pénalisation dans le membre de droite est évalué d'après la méthode des éléments finis et s'écrit pour un maillage en tétraèdres:

$$\sum_{T, S_i \in T} Vol(T) (\mathbf{G}_1(\mathbf{Q})|_T \frac{\partial \varphi_i^T}{\partial x} + \mathbf{G}_2(\mathbf{Q})|_T \frac{\partial \varphi_i^T}{\partial y} + \mathbf{G}_3(\mathbf{Q})|_T \frac{\partial \varphi_i^T}{\partial z})$$

où  $\mathbf{G}_1(\mathbf{Q})|_T$  est la valeur de  $\mathbf{G}_1(\mathbf{Q})$  sur  $T$  (élément structuré ou non structuré). Plus précisément:

$$\mathbf{G}_1(\mathbf{Q})|_T = \left( \frac{1}{\gamma} (div \mathbf{B})|_T, 0, 0, \frac{1}{\alpha} ((div \mathbf{E})|_T - \rho|_T), 0, 0 \right)$$

avec:

$$(div \mathbf{E})|_T = \sum_{k=1}^{nt} (E_1^k \frac{\partial \phi_k^T}{\partial x} + E_2^k \frac{\partial \phi_k^T}{\partial y} + E_3^k \frac{\partial \phi_k^T}{\partial z}) \quad , \quad \rho|_T = \frac{1}{nt} \sum_{k=1}^{nt} \rho_k$$

où  $nt$  représente le nombre de sommets de l'élément  $T$ .

Dans le cas bidimensionnel, qui sera notre cadre d'étude par la suite, les équations de Maxwell peuvent être découplées en deux sous-systèmes associés aux ondes transverse électrique  $\mathbf{T.E}$  et transverse magnétique  $\mathbf{T.M}$ . Ces deux types d'ondes vérifient respectivement  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_z = 0$  et  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_z = 0$ . Dans le cas d'une onde  $\mathbf{T.E}$ , le système (16) s'écrit donc:

$$\mathbf{Q}_t + \mathbf{F}_1(\mathbf{Q})_x + \mathbf{F}_2(\mathbf{Q})_y = \mathbf{J} + \mathbf{G}_1(\mathbf{Q})_x + \mathbf{G}_2(\mathbf{Q})_y \quad (20)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q} = {}^t(E_1, E_2, B_3) \\ \mathbf{F}_1(\mathbf{Q}) = {}^t(0, B_3, E_2) \\ \mathbf{F}_2(\mathbf{Q}) = {}^t(-B_3, 0, -E_1) \\ \mathbf{J} = -{}^t(j_1, j_2, 0) \\ \mathbf{G}_1(\mathbf{Q}) = {}^t\left(\frac{1}{\alpha}(\operatorname{div}\mathbf{E} - \rho), 0, 0\right) \\ \mathbf{G}_2(\mathbf{Q}) = {}^t\left(0, \frac{1}{\alpha}(\operatorname{div}\mathbf{E} - \rho), 0\right) \end{array} \right.$$

## 4 Etude de stabilité des schémas.

On s'intéresse dans ce paragraphe à l'étude de stabilité linéaire des schémas volumes finis pour des maillages en rectangles et en triangles appliqués au système de Maxwell sans contraintes (1.1,1.2) et avec contraintes (15.3,15.4). On considérera tout d'abord les schémas précis à l'ordre un. Puis dans un deuxième temps nous considérerons les schémas d'ordre supérieur pour lesquels on étudiera en particulier l'influence du paramètre de décentrage  $\beta$  sur la stabilité.

Nous utilisons une analyse de Fourier et posons :

$$Q_{j,k}^n = \hat{Q}^n e^{i(j\theta_1 + k\theta_2)}$$

avec  $i^2 = -1$ . On obtient alors la relation:

$$\hat{Q}^{n+1} = G_{\theta_1, \theta_2} \hat{Q}^n$$

où  $G_{\theta_1, \theta_2}$  est la matrice d'amplification de dimension trois dépendant de  $\Delta t$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ .

La condition nécessaire et suffisante de stabilité du schéma s'écrit:

$$\rho(G_{\theta_1, \theta_2}) \leq 1 \quad \forall (\theta_1, \theta_2) \in [0, 2\pi]^2, \quad (21)$$

où  $\rho(G_{\theta_1, \theta_2})$  désigne le rayon spectral de  $G_{\theta_1, \theta_2}$ .

### 4.1 Schémas précis à l'ordre un.

On considère dans cette étude le système de Maxwell bidimensionnel sans courant ni charge ( $\rho = 0$ ,  $\mathbf{J} = 0$ ). On pose  $G_1 = G_{\theta_1, \theta_2}$ .

#### 4.1.1 Système de Maxwell sans contraintes.

Le système d'équations de Maxwell (1.1,1.2) peut s'écrire sous la forme non conservative:

$$\mathbf{Q}_t + A\mathbf{Q}_x + B\mathbf{Q}_y = 0$$

où A et B sont les matrices jacobiennes des flux  $\mathbf{F}_1(\mathbf{Q})$  et  $\mathbf{F}_2(\mathbf{Q})$ .

Il est aisé de voir que A et B ne se diagonalisent pas dans une même base pour les deux

coordonnées d'espace. Ainsi, il n'est pas possible de ramener le système de Maxwell à un système dont chaque composante vérifie l'équation d'advection linéaire, pour laquelle on connaît la loi de CFL.

On effectue donc l'étude de stabilité par l'analyse de Fourier sur le schéma volumes finis appliqué au système de Maxwell (1.1,1.2). Dans le cas du maillage triangulaire les limites de stabilité sont déterminées numériquement tandis que pour le maillage rectangulaire une étude analytique a pu être menée. Les figures 2 et 3 montrent les domaines de stabilité des schémas pour des maillages rectangulaire et triangulaire: une façon de représenter ces domaines est de tracer les valeurs maximales du couple  $(\frac{\Delta t}{\Delta x}, \frac{\Delta t}{\Delta y})$ , telle que  $\forall \theta_1, \theta_2, |G_1| \leq 1$ . Pour tracer ce domaine, on choisit les variables:  $\alpha_1 = \frac{\Delta t}{\Delta x}$  en abscisse,  $\alpha_2 = \frac{\Delta t}{\Delta y}$  en ordonnée.

- Cas d'un maillage rectangulaire.

**Proposition 4.1** *Le schéma en volumes finis d'ordre un pour un maillage rectangulaire, appliqué au système de Maxwell sans contraintes est stable si et seulement si:*

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} + \frac{\Delta t}{\Delta y} \leq 1. \bullet$$

Pour la démonstration de cette proposition on pourra se référer à [4].

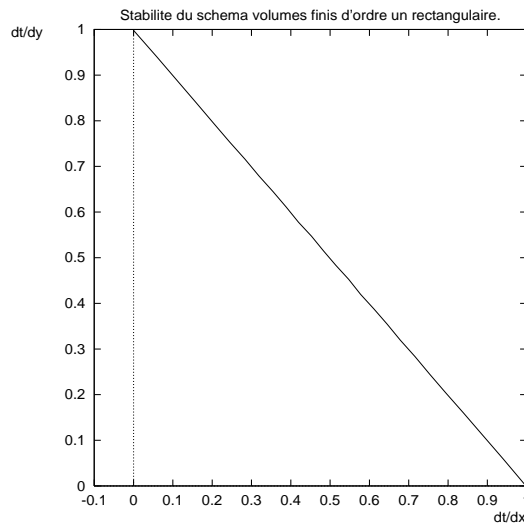


FIG. 2 -

**Remarques:** Bien qu'on ne puisse pas découpler les équations de Maxwell, on note que la condition de stabilité obtenue est la même que celle obtenue pour un schéma décentré d'ordre un appliqué à l'équation d'advection scalaire bidimensionnelle:

$$u_t + u_x + u_y = 0.$$

De plus quand  $\Delta x$  (resp.  $\Delta y$ ) tend vers l'infini, c'est à dire lorsqu'on étire le maillage dans une direction d'espace, on retrouve bien la condition de stabilité du cas monodimensionnel:  $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$  (resp.  $\frac{\Delta t}{\Delta y} \leq 1$ ).

– Cas d'un maillage triangulaire.

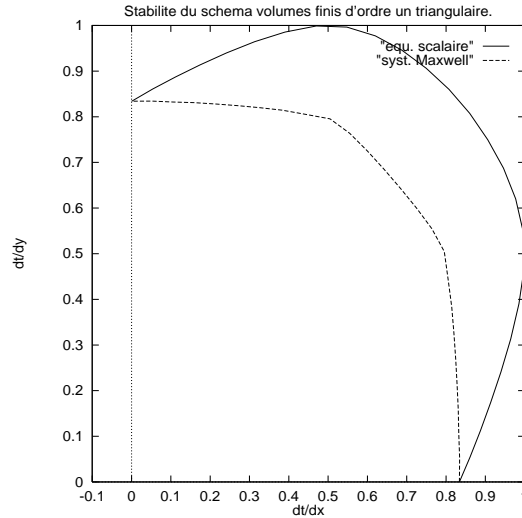


FIG. 3 -

On observe sur la figure 3 que, dans le cas d'un maillage triangulaire, le domaine de stabilité obtenu pour le système de Maxwell est plus petit que celui obtenu lorsqu'on considère l'équation d'advection scalaire  $u_t + u_x + u_y = 0$ . D'autre part les domaines de stabilité en triangles sont plus grands que celui obtenu en rectangles pour des valeurs de  $\Delta x$  proches de  $\Delta y$ . Par contre, quand  $\Delta x$  ou  $\Delta y$  sont infinis, c'est à dire quand on se ramène au cas monodimensionnel, la limite de stabilité est plus grande en rectangles qu'en triangles.

#### 4.1.2 Système de Maxwell avec terme de pénalisation.

L'étude de stabilité du schéma volumes finis appliqué au système de Maxwell avec terme de pénalisation (15.3,15.4) a pour but de déterminer un paramètre optimal  $\alpha$  qui minimiserait l'erreur sur la discrétisation des équations de divergence (1.3,1.4) tout en n'entraînant aucune contrainte supplémentaire sur le pas de temps par rapport à la condition de stabilité obtenue sur le système de Maxwell (1.1,1.2).

On sait, en effet, que le terme de viscosité a une grande influence sur la stabilité du schéma. En particulier, lorsque le coefficient de diffusion ( $1/\alpha$ ) augmente, le domaine de stabilité devient très réduit [10].

– Cas d'un maillage rectangulaire.

On représente sur la figure 4 les domaines de stabilité en fonction de  $\Delta t$  et de  $\alpha$  pour différentes valeurs de  $h = \Delta x = \Delta y$ . La valeur optimale  $\alpha_{opt}$  est celle à partir de laquelle la valeur de  $\Delta t$  est constante.

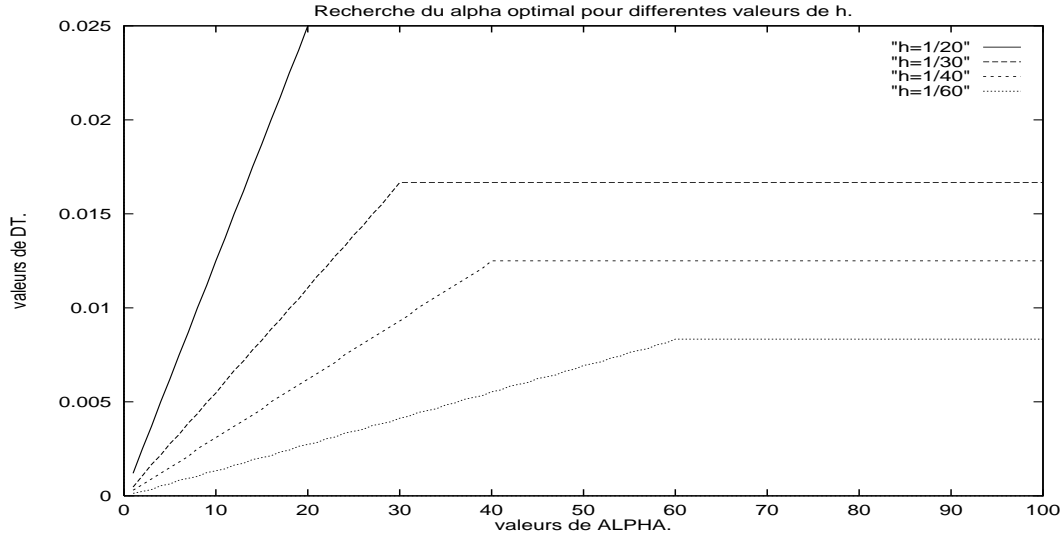


FIG. 4 -

On voit sur ces courbes qu'il existe une valeur de  $\alpha$  optimale  $\alpha_{opt}$  au sens défini précédemment. Ainsi pour des valeurs de  $\alpha \geq \alpha_{opt}$  le terme de pénalisation n'impose pas de contraintes sur le pas de temps puisqu'on peut utiliser le même  $\Delta t$  que dans le cas homogène (sans correction).

On remarque que lorsque  $h$  devient grand, le pas de temps  $\Delta t$  augmente et le  $\alpha_{opt}$  diminue: autrement dit pour des pas d'espace de plus en plus grands, on donne une importance de plus en plus grande au facteur de correction.

On résume dans le tableau suivant les valeurs  $\alpha_{opt}$  obtenues pour différentes valeurs de  $h$ .

h	$\Delta t_{max}$	$\alpha_{opt}$
1/20	$2.5 \cdot 10^{-2}$	20
1/30	$1.66 \cdot 10^{-2}$	30
1/40	$1.25 \cdot 10^{-2}$	40
1/60	$8.33 \cdot 10^{-3}$	60
1/250	$2 \cdot 10^{-3}$	250

Table 1

On a vu qu'à la valeur  $\alpha = \alpha_{opt}$  correspond un pas de temps maximal, il s'agit du pas de temps vérifiant la condition:  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ , ce qui peut encore s'écrire:

$$\Delta t_{max} = \frac{h}{2}$$

On observe numériquement (voir le tableau 1) que le coefficient de diffusion ( $1/\alpha_{opt}$ ) suit une loi linéaire en  $h$ .

$$\text{pour } h \leq \frac{1}{20}, \alpha_{opt} = \frac{1}{h} = \frac{1}{2\Delta t_{max}}$$

– Cas d'un maillage triangulaire.

On représente sur la figure 5 les domaines de stabilité en fonction de  $\Delta t$  et de  $\alpha$  pour différentes valeurs de  $h = \Delta x = \Delta y$ .

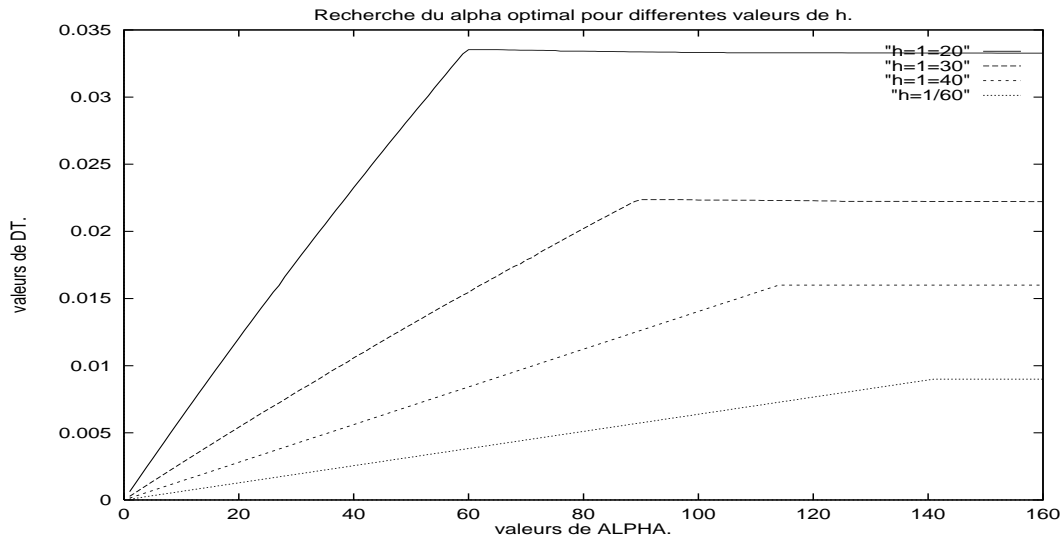


FIG. 5 -

On remarque sur la figure 5 que pour  $h$  fixé, le pas de temps maximal obtenu est plus grand que celui obtenu dans le cas rectangulaire. Cela s'explique par le fait que la limite de stabilité du schéma en triangles est nettement supérieure à celle obtenue dans le cas rectangulaire, dans le cas  $\Delta x = \Delta y = h$ . D'autre part, à  $h$  fixé ou à  $\Delta t$  fixé, on remarque que la valeur de  $\alpha_{opt}$  est plus grande que pour le schéma en rectangles.

h	$\Delta t_{max}$	$\alpha_{opt}$
1/15	$4.4 \cdot 10^{-2}$	45
1/20	$3.3 \cdot 10^{-2}$	60
1/30	$2.2 \cdot 10^{-2}$	90
1/40	$1.6 \cdot 10^{-2}$	120
1/60	$9 \cdot 10^{-3}$	145

Table 2

Le tableau 2 nous montre que, de même que pour un maillage rectangulaire, le coefficient de diffusion ( $1/\alpha_{opt}$ ) suit une loi linéaire en  $h$ .

$$\boxed{\text{pour } h \leq \frac{1}{15}, \alpha_{opt} = \frac{3}{h}}$$

## 4.2 Schémas précis à l'ordre trois.

Dans le cas d'une méthode d'intégration en temps de type Runge-Kutta à trois pas, on introduit le polynôme caractéristique:

$$g(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}.$$

Pour  $z = A\Delta t$ , on rappelle que le polynôme  $G(A \Delta t)$  représente la matrice d'amplification de la méthode de Runge-Kutta appliquée à l'intégration du système d'équations différentielles ordinaires  $Q_t = A Q$  où  $A$  est la matrice  $3 \times 3$  du schéma.

Si  $\hat{Q}$  désigne le vecteur des modes de Fourier, on obtient:

$$\hat{Q}^{n+1} = G_{\theta_1, \theta_2}(A \Delta t) \hat{Q}^n$$

et le théorème de Von Neumann (12) s'applique aussi à  $G_{\theta_1, \theta_2}(A \Delta t)$ .

### 4.2.1 Système de Maxwell sans contraintes.

Les limites de stabilité sont obtenues numériquement aussi bien pour le schéma en rectangles que pour celui en triangles.

– Cas d'un maillage rectangulaire.

On représente sur la figure 6 le domaine de stabilité pour différentes valeurs du paramètre de décentrage  $\beta$  (avec  $\alpha_1 = \frac{\Delta t}{\Delta x}$  en abscisse,  $\alpha_2 = \frac{\Delta t}{\Delta y}$  en ordonnée.)

On rappelle que pour  $\beta = 0$  on obtient un schéma centré; pour  $\beta = 1$ , le schéma est décentré, et pour  $\beta = \frac{1}{2}$ , on a un schéma demi-décentré.

On note que plus le schéma est décentré ( $\beta$  proche de 1), plus la limite de stabilité devient petite, et donc plus le pas de temps maximal est petit.



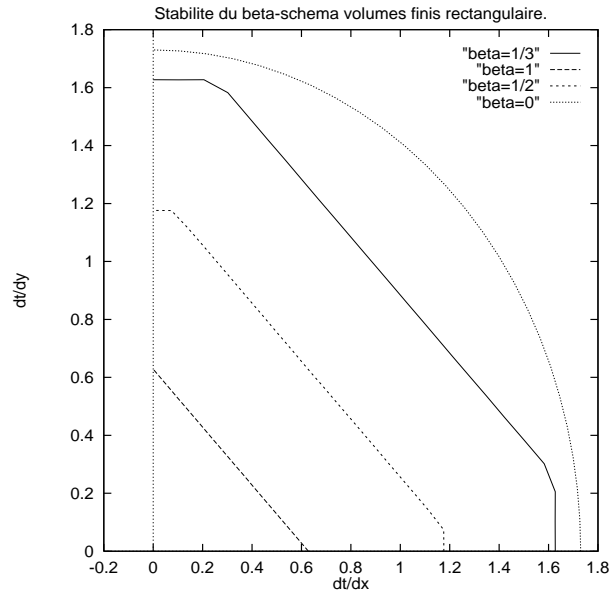


FIG. 6 -

- Cas d'un maillage triangulaire.

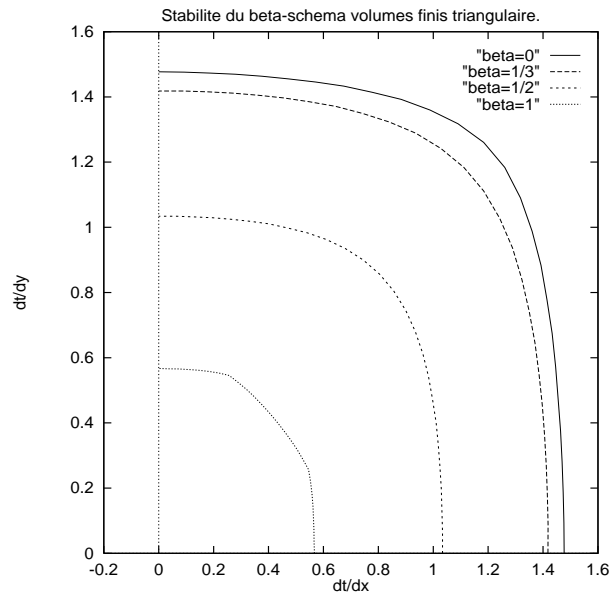


FIG. 7 -

On observe sur les figures 6 et 7 que les domaines de stabilité s'ordonnent de la même manière en fonction de  $\beta$  pour un maillage en triangles que pour un maillage en rectangles.

Pour  $\Delta x$  proche de  $\Delta y$  on note que la limite de stabilité obtenue avec un maillage triangulaire est supérieure à celle obtenue avec un maillage en rectangles, excepté pour

$\beta = 0$  où le domaine de stabilité est le plus grand en rectangles. En général le maillage triangulaire privilégie la direction  $\Delta x = \Delta y$  en ce qui concerne la stabilité et le choix du pas de temps.

Dans le cas où une des directions  $\Delta x$  ou  $\Delta y$  est grande devant l'autre alors il est plus avantageux d'utiliser le maillage en rectangles.

#### 4.2.2 Système de Maxwell avec terme de pénalisation.

De même que précédemment, on cherche à déterminer le  $\alpha_{opt}$  nous permettant d'utiliser le pas de temps le plus grand possible, dans le cas d'un schéma volumes finis d'ordre deux au moins en espace et d'ordre trois en temps.

– Cas d'un maillage rectangulaire.

On fixe  $\Delta x = \Delta y = h = \frac{1}{20}$ . On représente sur la figure 8 les domaines de stabilité en fonction de  $\Delta t$  et  $\alpha$  pour différentes valeurs du paramètre  $\beta$ .

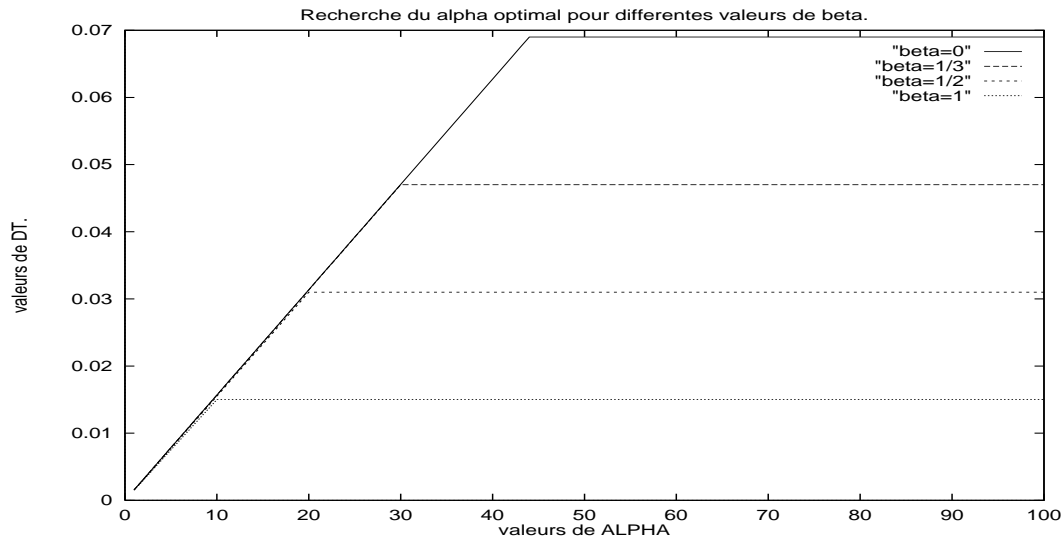


FIG. 8 -

On voit sur la figure 8 que plus on diminue  $\beta$  (ie plus on se rapproche d'un schéma totalement centré), et plus le pas de temps optimal augmente; ce qui est en accord avec les limites de stabilité obtenues pour le système de Maxwell homogène. De même, plus  $\beta$  diminue, plus le  $\alpha_{opt}$  augmente, c'est à dire que pour un schéma centré l'influence du terme de diffusion est moins forte que dans le cas d'un schéma décentré. On note que pour un schéma rectangulaire, le pas de temps maximal varie linéairement avec  $\alpha_{opt}$  quand on fait varier  $\beta$ .

On résume dans le tableau ci-après les valeurs de  $\alpha_{opt}$  pour différentes valeurs de  $\beta$ .

$\beta$	$\Delta t_{max}$	$\alpha_{opt}$
0	$6.9 \cdot 10^{-2}$	45
1/3	$4.7 \cdot 10^{-2}$	30
1/2	$3.1 \cdot 10^{-2}$	20
1	$1.5 \cdot 10^{-2}$	10

Table 3

Maintenant, on pose  $\beta = \frac{1}{3}$ : on a alors un schéma exactement d'ordre trois en espace et en temps. On représente sur la figure 9 les domaines de stabilité en fonction de  $\Delta t$  et de  $\alpha$  pour différentes valeurs de  $h = \Delta x = \Delta y$ .

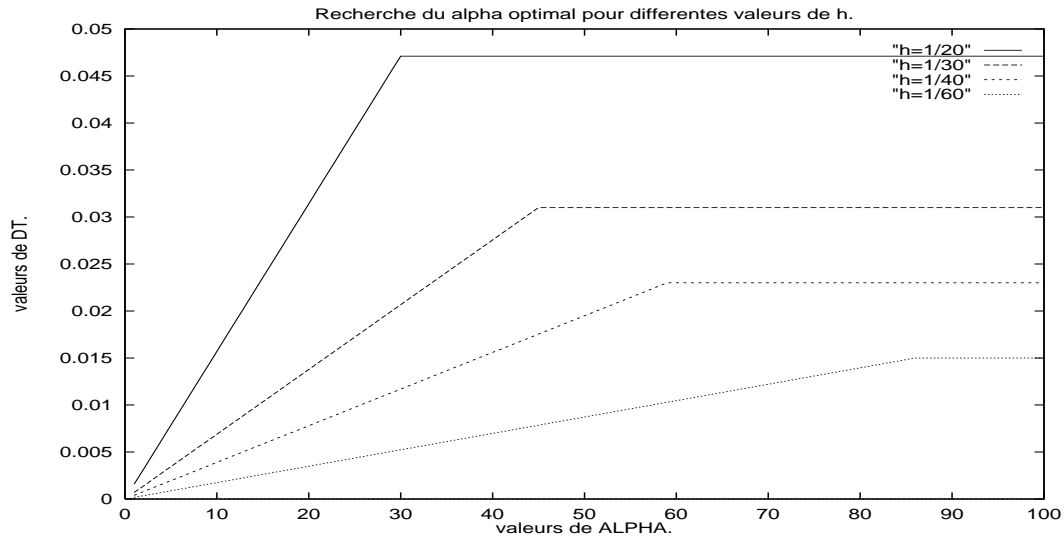


FIG. 9 -

On remarque que les courbes varient de la même manière en fonction de  $h$  à l'ordre trois et à l'ordre un: à  $\Delta t$  fixé, plus  $h$  augmente, plus  $\alpha_{opt}$  diminue c'est à dire plus grande est l'importance du facteur de correction.

h	$\Delta t_{max}$	$\alpha_{opt}$
1/20	$4.7 \cdot 10^{-2}$	30
1/30	$3.1 \cdot 10^{-2}$	45
1/40	$2.3 \cdot 10^{-2}$	60
1/50	$1.8 \cdot 10^{-2}$	75
1/60	$1.5 \cdot 10^{-2}$	90

Table 4

Les valeurs du tableau (4) montrent que le coefficient de diffusion ( $1/\alpha_{opt}$ ) suit une loi linéaire en  $h$ .

$$\text{pour } h \leq \frac{1}{20}, \alpha_{opt} = \frac{3}{2h}$$

– Cas d'un maillage triangulaire.

De même que dans le cas rectangulaire, nous fixons le pas d'espace  $h = \frac{1}{20}$  et on représente sur la figure 10 les domaines de stabilité en fonction de  $\Delta t$  et  $\alpha$  pour différentes valeurs du paramètre  $\beta$ .

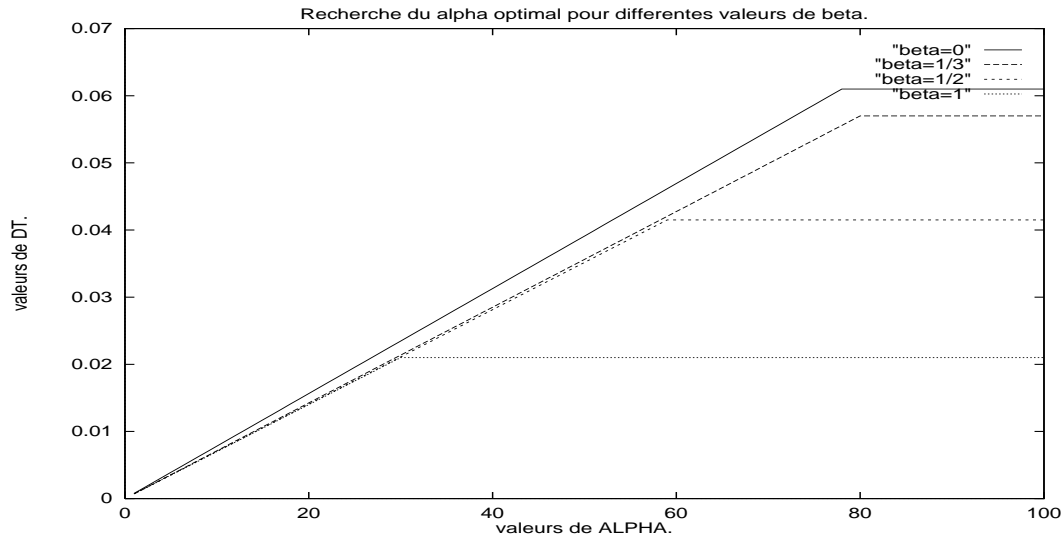


FIG. 10 -

Les courbes varient de la même manière pour un maillage rectangulaire ou triangulaire. A  $\beta$  fixé, on remarque que le pas de temps maximal est plus grand dans le cas d'un maillage triangulaire que pour un maillage en rectangles, sauf dans le cas d'un schéma centré ( $\beta=0$ ). De plus, à  $\beta$  fixé, et pour un même pas de temps  $\Delta t$ , on voit que la valeur de  $\alpha_{opt}$  est plus petite en rectangles qu'en triangles.

Contrairement au schéma d'ordre trois en maillage rectangulaire, ici  $\Delta t$  ne dépend pas linéairement de  $\alpha_{opt}$  quand on fait varier  $\beta$ .

$\beta$	$\Delta t_{max}$	$\alpha_{opt}$
0	$6.1 \cdot 10^{-2}$	78
1/3	$5.7 \cdot 10^{-2}$	80
1/2	$4.1 \cdot 10^{-2}$	58
1	$2.1 \cdot 10^{-2}$	30

Table 5

Pour  $\beta = \frac{1}{3}$ , on représente sur la figure 11 les domaines de stabilité en fonction de  $\Delta t$  et de  $\alpha$  pour différentes valeurs de  $h = \Delta x = \Delta y$ .

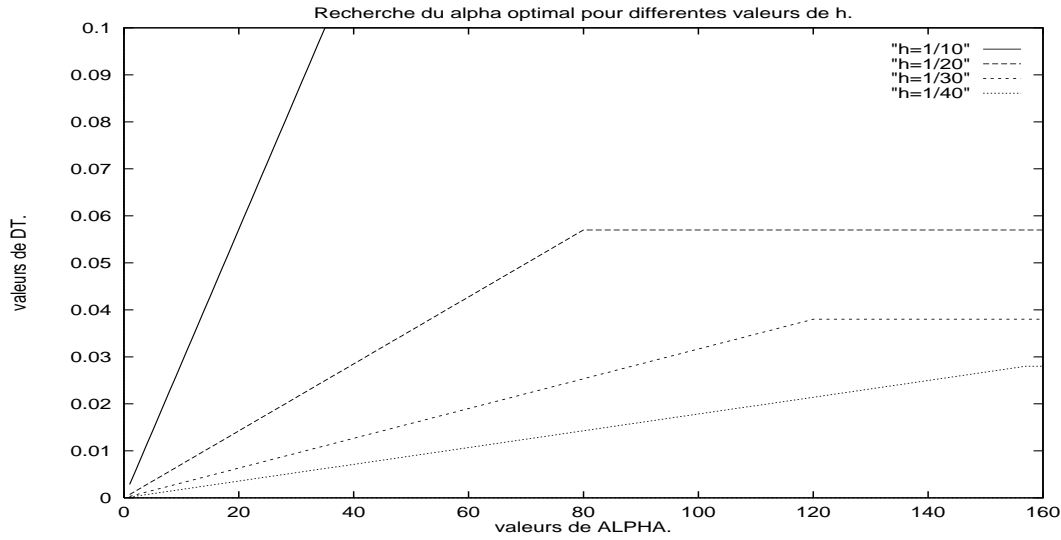


FIG. 11 -

h	$\Delta t_{max}$	$\alpha_{opt}$
1/20	$5.7 \cdot 10^{-2}$	80
1/30	$3.8 \cdot 10^{-2}$	120
1/40	$2.8 \cdot 10^{-2}$	160
1/50	$2.2 \cdot 10^{-2}$	200

Table 6

A  $h$  fixé, le pas de temps optimal est plus grand pour un maillage triangulaire que pour un maillage rectangulaire, ce quelle que soit la valeur de  $h$ . Toutefois, utiliser un schéma précis en temps s'avère plus intéressant en rectangles. En effet,

$$\frac{\Delta t_{RK3}}{\Delta t_{RK1}} = 1.8 \text{ en rectangles}$$

$$\frac{\Delta t_{RK3}}{\Delta t_{RK1}} = 1.7 \text{ en triangles}$$

A l'ordre un comme à l'ordre trois, le coefficient de diffusion ( $1/\alpha_{opt}$ ) suit une loi linéaire en  $h$ :

$$\text{pour } h \leq \frac{1}{10}, \alpha_{opt} = \frac{4}{h}$$

Cette étude de stabilité nous montre que les schémas en triangles permettent, à  $\Delta x = \Delta y = h$  fixé, un choix de pas de temps plus grand qu'en rectangles. Elle nous a permis de déterminer le  $\alpha$  optimal en fonction des schémas et du maillage utilisés. On a vu également, que, quel que soit l'ordre en temps et l'approximation spatiale choisis, le coefficient de diffusion ( $1/\alpha_{opt}$ ) suit une loi linéaire en  $h$ . La figure 12 nous montre l'influence de ce paramètre sur les différents schémas en fonction de  $h$ . On voit que la valeur de  $\alpha_{opt}$  est plus petite pour les schémas en rectangles que pour les schémas en triangles. De même la valeur de  $\alpha_{opt}$  devient plus grande quand on augmente la précision du schéma, aussi bien en triangles qu'en rectangles.

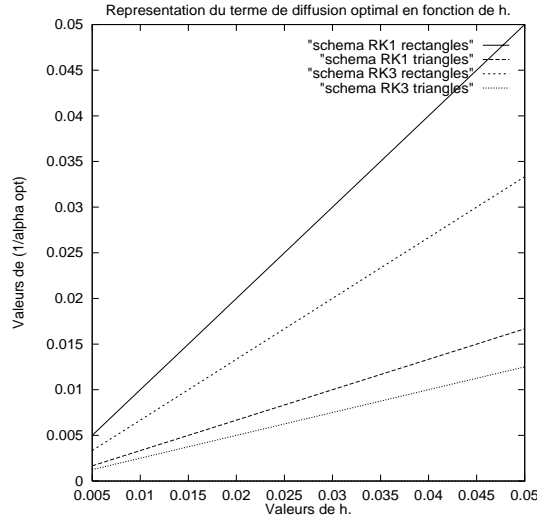


FIG. 12 -

## 5 Equations équivalentes.

Les équations équivalentes, introduites par Warming and Hyett [16] permettent une analyse détaillée et précise des termes d'erreur de troncature; notamment des erreurs de dispersion et de dissipation.

Pour obtenir ces équations, nous appliquons la méthode décrite dans [2] au système de Maxwell sans contraintes (1.1,1.2) et avec contraintes (15.3,15.4). Cette méthode simplifie considérablement les calculs dans le cas linéaire et a l'avantage de rester la même quelque soit le schéma étudié (implicite ou explicite, schéma à plusieurs niveaux comme ceux de Runge-Kutta) et quelle que soit la dimension d'espace.

Pour plus de détails sur cette méthode de calcul, on pourra se référer à [2].

Nous allons, dans cette partie, établir les équations équivalentes des schémas présentés précédemment (pour les champs électrique et magnétique ainsi que pour la divergence du champ électrique) sur des maillages en rectangles et en triangles.

## 5.1 Analyse et comparaison des termes d'erreur des schémas d'ordre un.

### 5.1.1 Maillage rectangulaire.

Nous rappelons que nous considérons le cas d'une onde **TE**. On donne ici les termes d'erreur pour la première composante  $E^1$ , les équations équivalentes des autres composantes s'obtenant par symétrie par-rapport à  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ .

Pour la valeur  $\alpha = \infty$ , on obtient l'équation équivalente du système sans contraintes (1.1,1.2). Pour  $\alpha < \infty$ , on a :

$$E_t^1 + B_y^3 = \frac{1}{2}(\Delta y - \Delta t) E_{yy}^1 + \left(\frac{\Delta t}{2} + \frac{1}{\alpha}\right) E_{xy}^2 + \frac{E_{xx}^1}{\alpha} - \frac{\Delta t}{2\alpha^2}(E_{xxxx}^1 + E_{xxyy}^1 + E_{xyyy}^2 + E_{xxxy}^2) + O(\Delta t, \Delta x, \Delta y)^2$$

On voit ici clairement que la méthode de pénalisation proposée consiste à ajouter des termes de diffusion d'ordre deux  $(\frac{E_{xx}^1}{\alpha}, \frac{E_{xy}^2}{\alpha})$  et d'ordre quatre  $(-\frac{\Delta t}{2\alpha^2}(E_{xxxx}^1 + E_{xxyy}^1 + E_{xyyy}^2 + E_{xxxy}^2))$ .

On cherche à savoir si la méthode de pénalisation va mieux conserver numériquement la divergence. Pour cela nous établissons l'équation équivalente sur la divergence que nous obtenons aisément à partir des équations équivalentes du champ **E**.

En effet:

$$\begin{aligned} (div \mathbf{E})_t &= E_{tx}^1 + E_{ty}^2 \\ &= \frac{\Delta y}{2} E_{xyy}^1 + \frac{\Delta x}{2} E_{xxy}^2 + \frac{E_{3y}^2}{\alpha} + \frac{E_{xyy}^1}{\alpha} + \frac{E_{3x}^1}{\alpha} + \frac{E_{xxy}^2}{\alpha} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2\alpha^2}(E_{xxxx}^1 + 2E_{xxyy}^1 + E_{xyyy}^1 + E_{yyyy}^2 + E_{xxyy}^2 + E_{xxxy}^2) \\ &\quad + O(\Delta t, \Delta x, \Delta y)^2 \end{aligned}$$

ce qui peut encore s'écrire:

$$(div \mathbf{E})_t - \frac{1}{\alpha} \Delta div \mathbf{E} = \frac{\Delta y}{2} E_{xyy}^1 + \frac{\Delta x}{2} E_{xxy}^2 - \frac{\Delta t}{2\alpha^2} \Delta^2 div \mathbf{E} + O(\Delta t, \Delta x, \Delta y)^2 \quad (22)$$

où  $\Delta^2 div \mathbf{E}$  représente le bilaplacien de  $div \mathbf{E}$ . Là encore on voit clairement que la méthode de pénalisation consiste pour  $\Delta x$  et  $\Delta y$  fixés à rajouter des termes de diffusion sur la divergence du champ électrique.

### 5.1.2 Maillage triangulaire.

On procède de la même manière que précédemment. Pour ne pas alourdir les calculs, on pose  $\Delta x = \Delta y = h$ .

On obtient comme équation équivalente pour la première composante du champ électrique :

$$\begin{aligned} E_t^1 + B_y^3 &= \left(\frac{ah}{6} + \frac{1}{\alpha}\right) E_{xx}^1 + \left(\frac{ah}{6} - \frac{\Delta t}{2}\right) E_{yy}^1 + \frac{h}{3\sqrt{2}} E_{xy}^1 + \frac{bh}{6} (E_{xx}^2 + E_{yy}^2) \\ &\quad + \left(-\frac{h}{3\sqrt{2}} + \frac{\Delta t}{2} + \frac{1}{\alpha}\right) E_{xy}^2 - \frac{\Delta t}{2\alpha^2} (E_{xxxx}^1 + E_{xxyy}^1 + E_{xyyy}^2 + E_{xxxy}^2) + O(\Delta t, h)^2 \end{aligned}$$

où  $a = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $b = \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $c = \sqrt{2} + \sqrt{5}$ .

On remarque que les termes en temps sont les mêmes pour le schéma en triangles que pour le schéma en rectangles. Seuls les termes liés à l'approximation spatiale diffèrent: le schéma est beaucoup plus dissipatif dans le cas d'un maillage triangulaire; en effet parmi les termes d'erreur spatiale interviennent tous les termes de dissipation d'ordre deux pour les composantes  $E^1$  et  $E^2$  du champ électrique.

L'équation équivalente sur la divergence du champ électrique s'écrit:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div}\mathbf{E})_t - \frac{1}{\alpha} \Delta \operatorname{div}\mathbf{E} &= \frac{h}{6\sqrt{2}}(E_{xxx}^1 + E_{xxy}^1 + E_{yyy}^1 - E_{xyy}^1 - E_{xxx}^2 + E_{yyy}^2 + E_{xyy}^2 - E_{xxy}^2) \\
&\quad + \frac{h}{6\sqrt{5}}(E_{xxx}^1 + 2E_{xxy}^1 + 2E_{yyy}^1 + E_{xyy}^1 + 2E_{xxx}^2 + E_{yyy}^2 + 2E_{xyy}^2 + E_{xxy}^2) \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2\alpha^2} \Delta^2 \operatorname{div}\mathbf{E} + O(\Delta t, h)^2
\end{aligned} \tag{23}$$

Comme pour le maillage rectangulaire, on obtient dans le membre de gauche une équation de la chaleur pour la divergence, avec dans le membre de droite les termes d'erreur d'ordre un en temps et en espace inhérents au schéma, ainsi que le terme  $-\frac{\Delta t}{2\alpha^2} \Delta^2 \operatorname{div}\mathbf{E}$ . Les termes d'erreur en espace comprennent toutes les dérivées troisièmes de  $\mathbf{E}$ : ces termes d'erreur proviennent des termes de diffusion spatiale du schéma.

## 5.2 Analyse et comparaison des termes d'erreur des $\beta$ -schémas.

On se propose dans cette section d'écrire les équations équivalentes dans le cas d'une approximation spatiale au moins d'ordre deux et d'un schéma en temps RK3.

### 5.2.1 Maillage rectangulaire.

On donne les termes d'erreur du schéma pour la première composante du champ électrique:

$$\begin{aligned}
E_t^1 + B_y^3 &= -\frac{\Delta y^2}{6}(1 - 3\beta) B_{yyy}^3 - \frac{\beta}{4}(E_{yyyy}^1 \Delta y^3 + E_{xxyy}^1 \Delta x^2 \Delta y) \\
&\quad - \frac{\Delta t^3}{24}(E_{yyyy}^1 + E_{xxyy}^1 - E_{xyyy}^2 - E_{xxyy}^2) + \frac{E_{xx}^1}{\alpha} + \frac{E_{xy}^2}{\alpha} \\
&\quad + \frac{1}{12\alpha^3}(E_{xxxx}^1 \Delta x^2 + 2E_{xxyy}^1 \Delta y^2 + 2E_{xxyy}^2 \Delta x^2 + 2E_{xyyy}^2 \Delta y^2) \\
&\quad - \frac{\Delta t^3}{24\alpha^4}(E_{xxxxxx}^1 + 3E_{xxxxxy}^1 + 3E_{xxxxyy}^1 + E_{xxyyyy}^1 + E_{xxxxxy}^2 \\
&\quad + 3E_{xxxxyy}^2 + 3E_{xxyyyy}^2 + E_{xxxxxy}^2) + O(\Delta t, \Delta x, \Delta y)^4
\end{aligned}$$

Cette équation équivalente nous montre que deux valeurs de  $\beta$  sont intéressantes quand on considère le système de Maxwell sans contraintes ( $\alpha = \infty$ ): la valeur  $\beta = \frac{1}{3}$  annule les



termes de dispersion spatiale et permet ainsi d'avoir un schéma d'ordre trois en temps et en espace; avec la valeur  $\beta=0$  on a toujours un schéma d'ordre deux, mais cette valeur permet d'annuler les termes de dissipation en espace.

En ce qui concerne le système de Maxwell avec contraintes ( $\alpha < \infty$ ), on remarque qu'on obtient des termes d'erreur en  $\frac{\Delta x^2}{\alpha}, \frac{\Delta y^2}{\alpha}$  et également en  $\frac{\Delta t^3}{24\alpha^4}$ , faisant intervenir respectivement les dérivées quatrièmes et huitièmes de  $\mathbf{E}$ , c'est à dire des termes de dissipation.

Comme précédemment, on recherche les termes d'erreur sur la divergence du champ électrique. Pour plus de simplicité on donne son équation équivalente dans le cas  $\Delta x = \Delta y = h$ .

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}\mathbf{E})_t - \frac{1}{\alpha} \Delta \operatorname{div}\mathbf{E} &= -\frac{h^2}{6}(1-3\beta)(B_{xyyy}^3 - B_{xxxy}^3) - \frac{\beta h^3}{4}(E_{xyyyy}^1 + E_{xxxxy}^2 + E_{xxxxy}^1 \\ &+ E_{xxyyy}^2) + \frac{h^2}{6\alpha} \Delta^2 \operatorname{div}\mathbf{E} - \frac{h^2}{12\alpha}(E_{xxxxx}^1 + E_{yyyyy}^2) - \frac{\Delta t^3}{24\alpha^4} \Delta^4 \operatorname{div}\mathbf{E} + O(\Delta t, h)^4 \end{aligned} \quad (24)$$

avec  $\Delta^4 \operatorname{div}\mathbf{E} = \Delta \circ \Delta \circ \Delta \circ \Delta(\operatorname{div}\mathbf{E})$ . Dans le cas du système de Maxwell sans contraintes ( $\alpha = \infty$ ), on remarque que l'erreur sur la divergence est a priori d'ordre deux en espace, sauf pour  $\beta = \frac{1}{3}$ , où elle est d'ordre trois. Dans ce cas, les termes d'erreur du second membre proviennent des termes de dissipation spatiale du schéma.

Dans le cas du système de Maxwell avec contraintes ( $\alpha < \infty$ ), on voit que les termes d'erreur liés à la pénalisation sont des termes de dissipation en temps et en espace. Là aussi la méthode proposée rajoute des termes de dissipation sur la divergence de  $E$ .

### 5.2.2 Maillage triangulaire.

On donne l'équation équivalente du  $\beta$ -schéma triangulaire pour la première composante  $E^1$ . On pose  $\Delta x = \Delta y = h$ .

$$\begin{aligned} E_t^1 + B_y^3 &= -\frac{h^2}{6}(1-3\beta)(B_{yyy}^3 + B_{xxy}^3 + B_{xyy}^3) - \beta h^3 g(.,.) \\ &- \frac{\Delta t^3}{24}(E_{yyyy}^1 + E_{xxyy}^1 - E_{xyyy}^2 - E_{xxxy}^2) + \frac{E_{xx}^1}{\alpha} + \frac{E_{xy}^2}{\alpha} \\ &+ \frac{1}{12\alpha}(E_{xxxx}^1 \Delta x^2 + 2 E_{xxxy}^2 \Delta x^2 + 2 E_{xyyy}^2 \Delta y^2) \\ &- \frac{\Delta t^3}{24\alpha^4}(E_{xxxxxx}^1 + 3 E_{xxxxxy}^1 + 3 E_{xxxxyy}^1 + E_{xxyyyy}^1 \\ &+ E_{xxxxxy}^2 + 3 E_{xxxxyy}^2 + 3 E_{xxyyyy}^2 + E_{xxxxxy}^2) + O(\Delta t, \Delta h)^4 \end{aligned}$$

où  $g$  dépend linéairement des dérivées quatrièmes en espace de  $E^1$  et  $E^2$ .

Dans le cas du système de Maxwell sans contraintes ( $\alpha = \infty$ ), comme pour le schéma en rectangles, on voit que la valeur  $\beta = \frac{1}{3}$  permet d'annuler les termes de dispersion spatiale et que les termes de dissipation spatiale sont fonction de  $\beta$ .

Comme à l'ordre un, les termes d'erreur de dispersion et de dissipation sont plus nombreux en triangles qu'en rectangles. Ici interviennent des termes de dispersion croisés  $B_{xxy}^3$ ,  $B_{xyy}^3$ , ainsi que tous les termes de dissipation spatiale des deux premières composantes  $E^1$ ,  $E^2$  dans  $g$ . On remarque que les termes en temps sont identiques à ceux obtenus pour le  $\beta$ -schéma en rectangles.

Le  $\beta$ -schéma en maillage triangulaire est donc plus dissipatif que celui en maillage rectangulaire; en effet, l'approximation des flux numériques pour le maillage triangulaire choisi fait intervenir 19 noeuds de calcul alors que le schéma en rectangles est un schéma à 9 noeuds.

Dans le cas du système de Maxwell avec contraintes ( $\alpha < \infty$ ), les termes liés à  $\alpha$  sont des termes de dissipation en temps et en espace, comme pour le schéma en rectangles.

Nous écrivons l'équation équivalente de la divergence de  $\mathbf{E}$  dans le cas  $\Delta x = \Delta y = h$ :

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \mathbf{E})_t - \frac{1}{\alpha} \Delta \operatorname{div} \mathbf{E} = & -\beta h^3 k(.,.) + \frac{h^2}{6\alpha} \Delta^2 \operatorname{div} \mathbf{E} - \frac{h^2}{12\alpha} (E_{xxxx}^1 + E_{yyyy}^2 + 2 E_{xxyy}^1 \\ & + 2 E_{xyyy}^2) - \frac{\Delta t^3}{24\alpha^4} \Delta^4 \operatorname{div} \mathbf{E} + O(\Delta t, h)^4 \end{aligned} \quad (25)$$

où  $k$  dépend linéairement des dérivées cinquième en espace de  $E^1$  et  $E^2$ . Dans le cas particulier  $\Delta x = \Delta y = h$ , les termes d'erreur provenant de la dispersion du schéma s'annihilent. Dans ce cas-là, l'erreur sur la divergence dans le cas du système de Maxwell sans contraintes est d'ordre trois. Les termes d'erreur proviennent alors des termes de dissipation du schéma.

Dans le cas du système de Maxwell avec contraintes, on voit comme précédemment que les termes de pénalisation sont des termes de dissipation sur la divergence.

Pour résumer, les équations équivalentes montrent que l'erreur sur la divergence est très sensible à la précision spatiale du schéma : en effet dans le cas du système de Maxwell sans contraintes ( $\alpha = \infty$ ), les termes d'erreur sur la divergence proviennent des termes de dispersion et de dissipation du schéma. La méthode de pénalisation proposée ( $\alpha < \infty$ ) consiste à augmenter la dissipation des schémas et ainsi obtenir une équation de la chaleur pour la divergence.

## 6 Résultats numériques

Dans cette partie on s'intéresse plus particulièrement à la vérification numérique des relations de divergence (1.3),(1.4).

Nous constaterons que l'introduction d'un terme de viscosité dans les équations de Maxwell permet de mieux satisfaire numériquement les contraintes sur la divergence du champ électromagnétique.

### En l'absence de charges

On considère le système (15.3,15.4) en deux dimensions d'espace pour une onde transverse électrique ( $\mathbf{T.E}$ ) sur  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  avec des conditions aux limites périodiques.

On initialise les composantes du champ électromagnétique par une combinaison linéaire d'ondes sinusoïdales de diverses fréquences.

On représente sur les figures 13 et 14 la norme infinie de la divergence du champ électrique  $\|div \mathbf{E}\|_\infty$  en fonction du temps à  $\Delta x = \Delta y$  fixé. Ceci est obtenu pour différentes valeurs de  $\alpha$  sur un maillage en rectangles pour les schémas d'ordre un et trois. On a choisi la norme infinie pour observer plus précisément les différences entre les divers schémas.

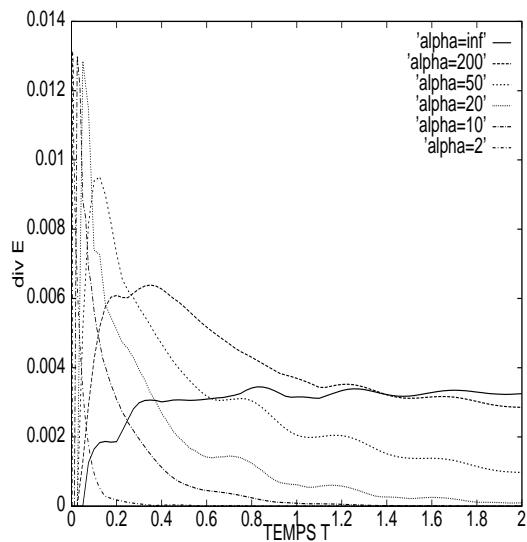


FIG. 13: schéma à l'ordre un

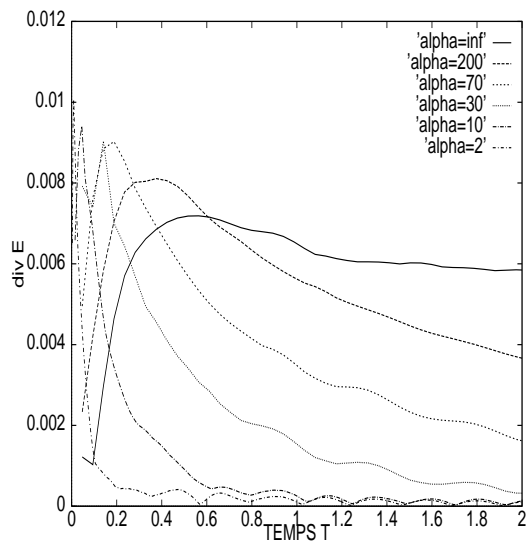


FIG. 14: schéma à l'ordre trois

On représente ensuite la même chose sur les figures 15 et 16 pour un maillage triangulaire.

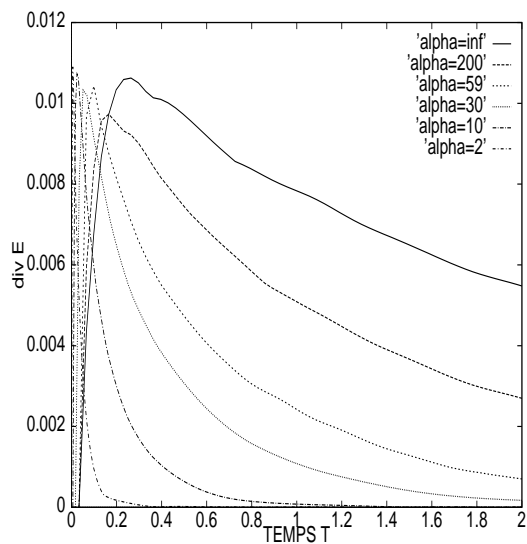


FIG. 15: schéma à l'ordre un

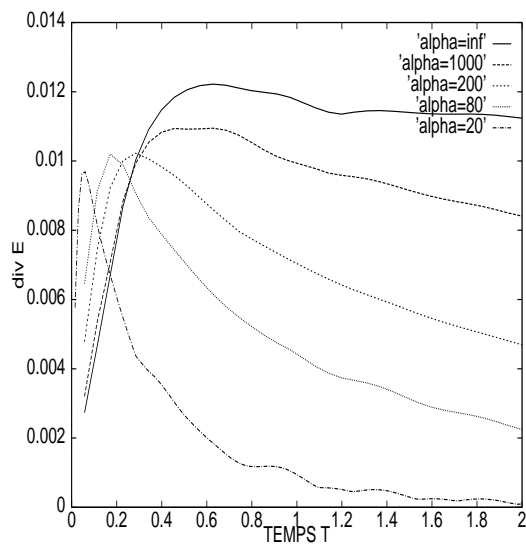


FIG. 16: schéma à l'ordre trois

On remarque que plus le paramètre de correction est petit, ce qui correspond à une influence plus importante des termes de viscosité introduits dans les équations de Maxwell, plus la divergence du champ électrique  $\mathbf{E}$  est petite. En contrepartie, le fait d'utiliser un paramètre de correction très petit va entraîner une contrainte sur le pas de temps  $\Delta t$  pour des raisons de stabilité. Néanmoins, nous avons montré précédemment l'existence d'une valeur optimale du paramètre de correction qui n'introduit aucune contrainte supplémentaire sur le pas de temps  $\Delta t$ . On remarque également que  $\text{div}_h \mathbf{E}_h \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , ceci est dû au caractère dissipatif du système (15.3,15.4).

On compare maintenant l'influence du maillage (triangulaire ou rectangulaire) sur la divergence du champ  $\mathbf{E}$ .

On représente sur les figures 17 et 18,  $\|\text{div} \mathbf{E}\|_\infty$  en fonction du temps à  $\Delta x = \Delta y$  fixé avec la valeur optimale du paramètre de correction pour les schémas d'ordre un et trois.

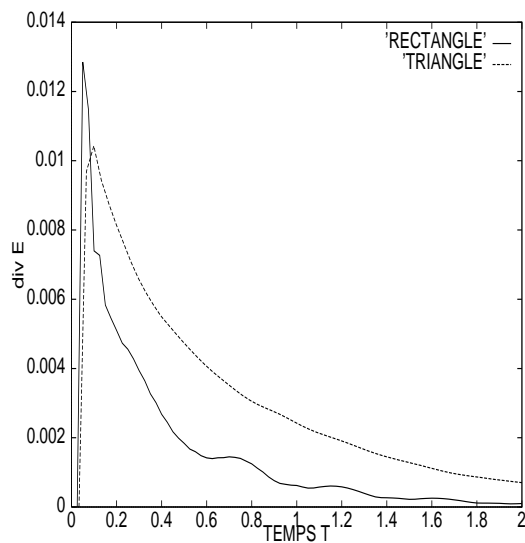


FIG. 17 : schémas à l'ordre un

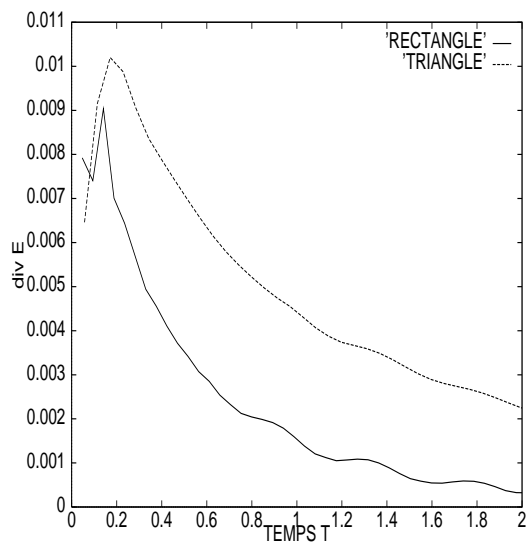


FIG. 18 : schémas à l'ordre trois

On remarque, pour les schémas précis à l'ordre un et à l'ordre trois, que la divergence est plus petite lorsque l'on considère un maillage en rectangles. Ceci est dû au fait que la valeur optimale du paramètre de correction est plus petite pour le schéma en rectangles, par conséquent l'influence des termes de viscosité est plus importante. Cependant il faut préciser que l'on peut utiliser des pas de temps plus grands pour le schéma en triangles et donc diminuer le temps de calcul.

On va maintenant étudier l'influence du paramètre de décentrage  $\beta$  sur la divergence du champ  $\mathbf{E}$ .

Plus précisément on représente sur les figures 19 et 20 la norme infinie de la divergence du champ électrique  $\mathbf{E}$  en fonction du temps à  $\Delta x = \Delta y$  fixé. Ceci est obtenu en considérant la valeur optimale du paramètre de correction pour chaque valeur de  $\beta$  dans le cas des schémas en rectangles et en triangles.

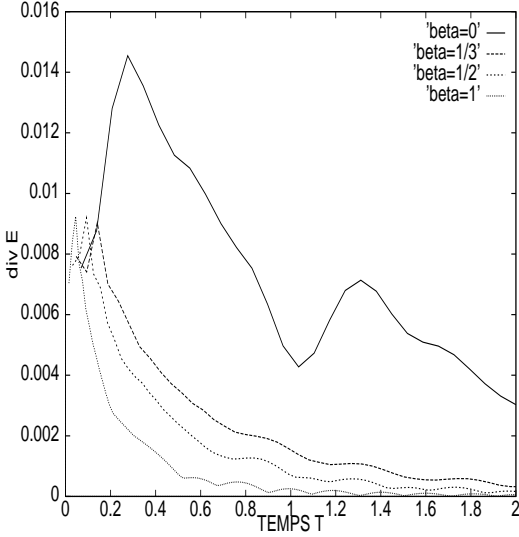


FIG 19 : schéma en rectangles

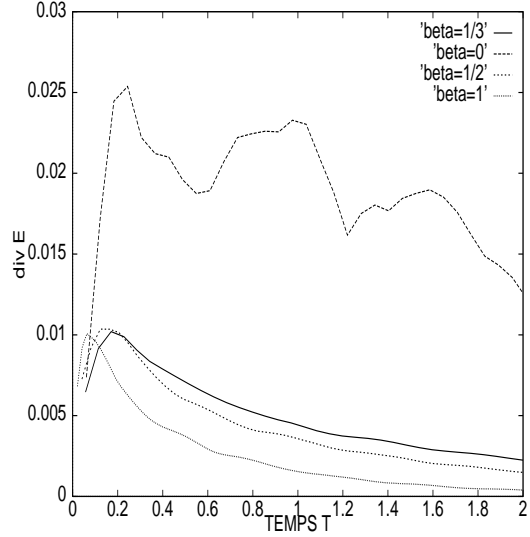


FIG 20 : schéma en triangles

On rappelle que lorsque  $\beta = 0$  le schéma est centré et lorsque  $\beta = 1$  il est décentré. On remarque, aussi bien pour le schéma en triangles que pour le schéma en rectangles, que la divergence diminue lorsque  $\beta$  augmente. Ceci s'explique par le fait que lorsque  $\beta$  augmente, la valeur optimale du paramètre de correction diminue. On note cependant que la contrainte sur le pas de temps augmente avec  $\beta$ . Il semble au vu des résultats qu'il vaut mieux prendre  $\beta = 1/3$ , valeur pour laquelle la divergence est petite, la contrainte sur le pas de temps n'est pas importante, et surtout le schéma est d'ordre trois en espace. On s'intéresse maintenant à l'influence des termes de viscosité sur le champ électromagnétique. Pour ce faire on considère une onde plane ( $\mathbf{T.E}$ ) solution des équations de Maxwell du type :

$$\begin{cases} E_x(t, x, y) = -\cos(x + y - \sqrt{2}t) \\ E_y(t, x, y) = \cos(x + y - \sqrt{2}t) \\ B_z(t, x, y) = \sqrt{2}\cos(x + y - \sqrt{2}t) \end{cases}$$

On représente sur les figures 21 et 22 la norme infinie de l'erreur sur le champ magnétique  $B_z$  en fonction du temps pour différentes valeurs du paramètre de correction et de  $h = \Delta x = \Delta y$ , pour les schémas précis à l'ordre un et trois en triangles.

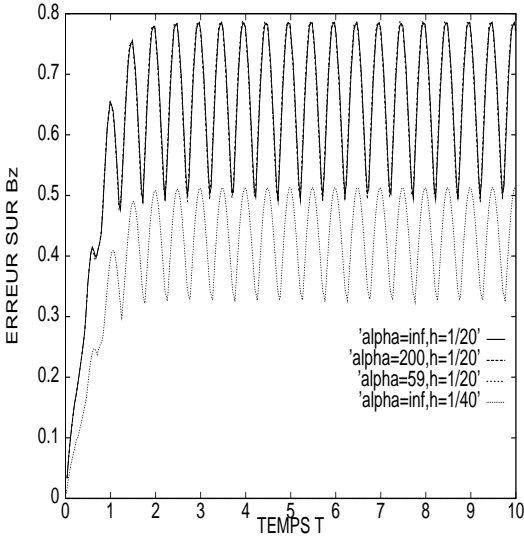


FIG 21 : schéma à l'ordre un

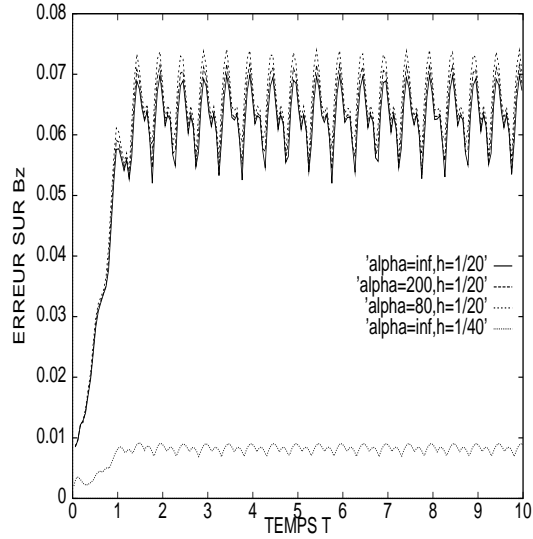


FIG 22 : schéma à l'ordre trois

On remarque, notamment sur le schéma à l'ordre trois, que l'introduction d'un paramètre de correction n'induit pas une erreur supplémentaire importante sur le champ électromagnétique. Rajouter un terme de viscosité dans les équations de Maxwell revient numériquement à rajouter de la diffusion dans nos schémas, ce qui explique cette petite erreur supplémentaire. D'autre part on remarque l'influence de la finesse du maillage sur la précision du champ électromagnétique. Lorsque l'on divise le pas de discrétisation par deux, on divise l'erreur d'un facteur deux pour le schéma à l'ordre un et d'un facteur huit pour le schéma à l'ordre trois.

Il nous reste à étudier l'influence de la discrétisation en espace sur la divergence. On représente sur les figures 23 et 24  $\|div \mathbf{E}\|_\infty$  en fonction du temps pour différentes valeurs de  $h = \Delta x = \Delta y$  en fixant le paramètre de correction, dans le cas du schéma d'ordre trois sur des maillages rectangulaires et triangulaires.

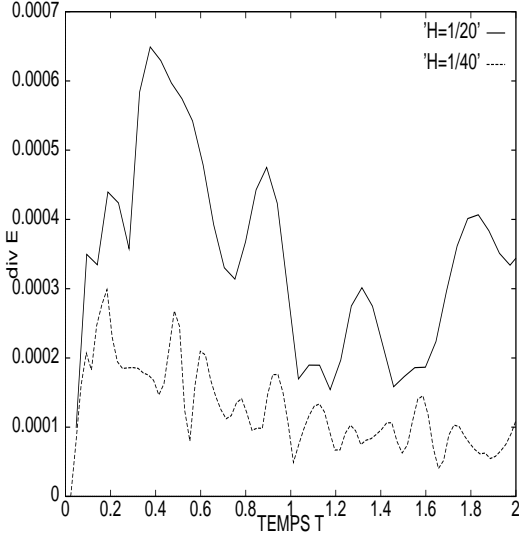


FIG 23: schéma en rectangles

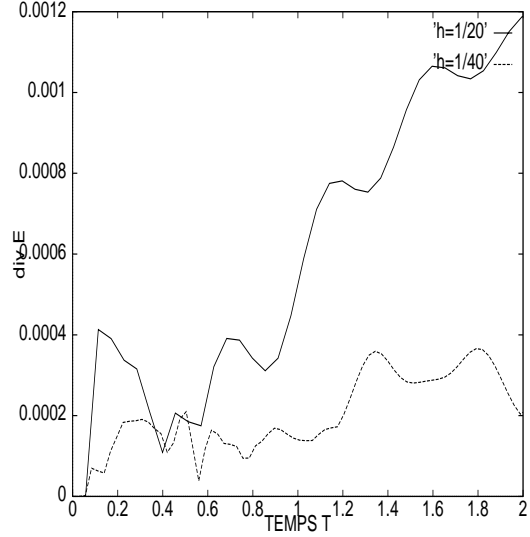


FIG 24: schéma en triangles

On remarque bien que lorsque l'on divise le pas de discrétisation par deux on diminue sensiblement l'erreur sur la divergence du champ  $\mathbf{E}$ , aussi bien pour un maillage en rectangles que pour un maillage en triangles. On peut ainsi conclure que la finesse du maillage a une forte influence sur la divergence.

### En présence de charges

On considère le problème (15.3,15.4) sur un domaine  $\Omega = ]0, 1[^2$ . On suppose qu'à l'instant initial le champ électromagnétique est nul et que la frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  est parfaitement conductrice:  $n \times \mathbf{E} = 0$  sur  $\Gamma$ .

On se donne une densité de charges et de courants:

$$\begin{cases} \rho(t, x, y) = \sin(t)(\sin(\pi y) + \sin(\pi x)) \\ j_x(t, x, y) = (\cos(t) - 1)(\pi \cos(\pi x) + \pi^2 x \sin(\pi y)) - x \cos(t) \sin(\pi y) \\ j_y(t, x, y) = (\cos(t) - 1)(\pi \cos(\pi y) + \pi^2 y \sin(\pi x)) - y \cos(t) \sin(\pi x) \end{cases}$$

Pour de telles données, la solution exacte du système de Maxwell (1.1,1.2) est donnée par:

$$\mathbf{E} = \sin(t) \begin{pmatrix} x \sin(\pi y) \\ y \sin(\pi x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = (\cos(t) - 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi y \cos(\pi x) - \pi x \cos(\pi y) \end{pmatrix}$$

On considère ici le schéma à l'ordre trois pour un maillage en triangles du domaine de calcul  $\Omega$ . On représente sur les figures 25 et 26,  $\| \text{div} \mathbf{E}_h - \rho \|_{L^1(\Omega)}$  et  $\| \mathbf{E} - \mathbf{E}_h \|_{L^1(\Omega)}$  en fonction du temps, pour différentes valeurs du pas de discrétisation  $h = \Delta x = \Delta y$  et pour une valeur très grande fixée du paramètre de correction.

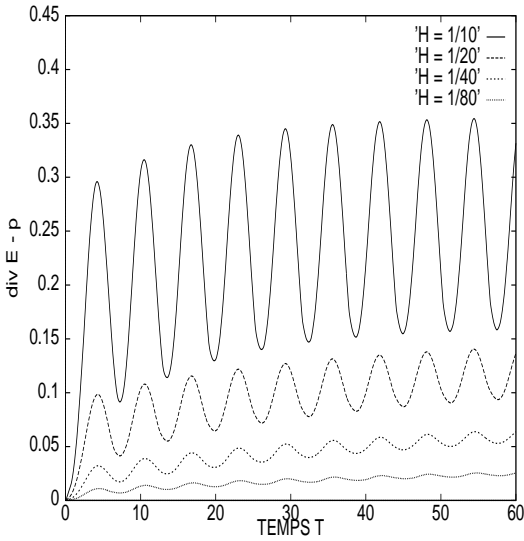


FIG 25 :  $\text{div}\mathbf{E}_h - \rho$  en fonction de  $h$

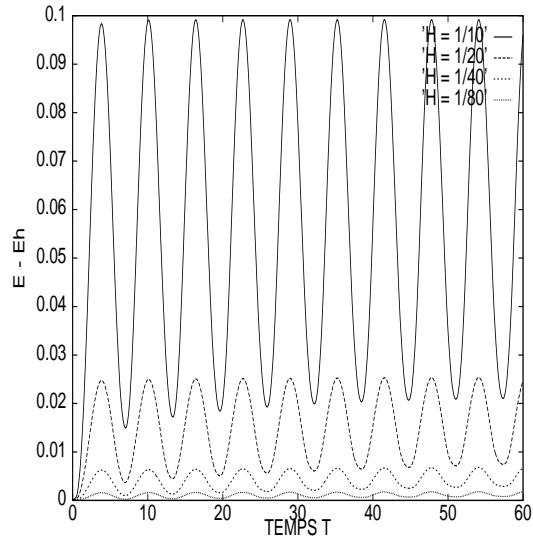


FIG 26 :  $\mathbf{E} - \mathbf{E}_h$  en fonction de  $h$

On remarque que l'utilisation de maillages fins diminue notablement l'erreur sur le champ électromagnétique, de même la relation de divergence (1.3) est mieux vérifiée.

On représente maintenant, dans le cas d'un maillage en triangles pour le schéma à l'ordre trois, sur la figure 27  $\| \text{div}\mathbf{E}_h - \rho \|_{L^1(\Omega)}$  en fonction du temps à  $h = \Delta x = \Delta y$  fixé pour différentes valeurs du paramètre de correction  $\alpha$ . Sur la figure 28, on représente  $\| \text{div}\mathbf{E}_h - \rho \|_{L^1(\Omega)}$  en fonction du temps pour,  $h = \frac{1}{40}$  avec la valeur optimale du paramètre de correction, et pour  $h = \frac{1}{80}$  sans correction.

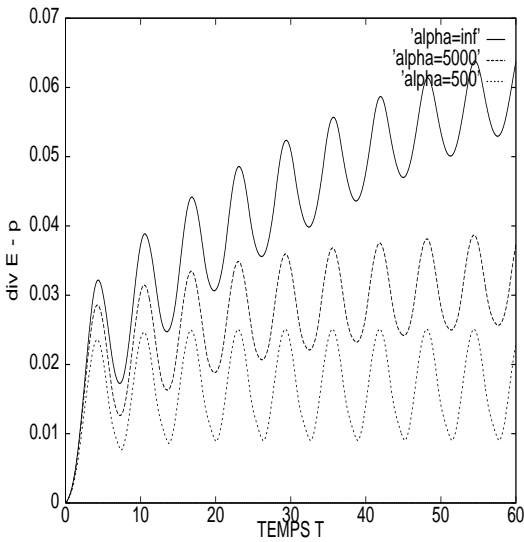


FIG 27 :  $\text{div}\mathbf{E}_h - \rho$  en fonction de  $\alpha$

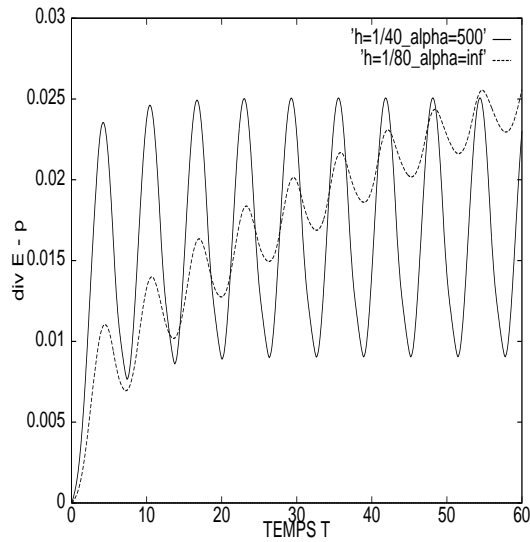


FIG 28 :  $\text{div}\mathbf{E}_h - \rho$  en fonction de  $\alpha$  et  $h$



Comme en l'absence de charges, on note que lorsque la valeur du paramètre de correction diminue, ce qui correspond à une influence plus importante des termes de viscosité, la relation de divergence (1.3) est mieux vérifiée. On remarque sur la figure 28 que l'erreur sur  $div\mathbf{E}_h - \rho$  est du même ordre pour un maillage donné en utilisant la méthode de pénalisation des contraintes que pour un maillage deux fois plus fin sans pénalisation. On compare maintenant sur la figure 29  $\| div\mathbf{E}_h - \rho \|_{L^1(\Omega)}$  pour les schémas à l'ordre un et trois, à  $h = \Delta x = \Delta y$  fixé et pour une valeur fixée du paramètre de correction.

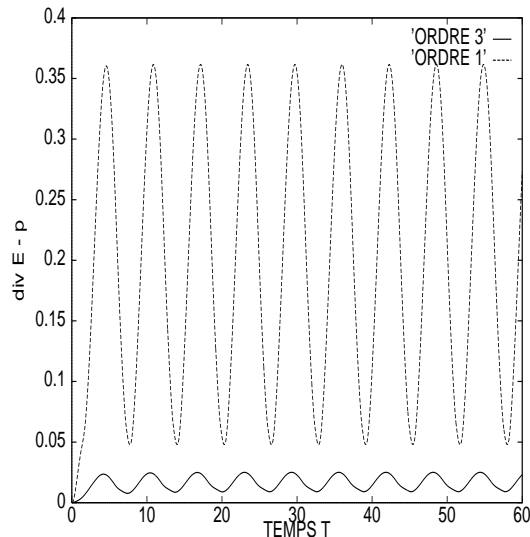


FIG 29 : Schémas à l'ordre un et trois

On remarque que la précision du schéma a une très forte influence sur la relation de divergence (1.3). Il est donc très intéressant d'utiliser un schéma précis à l'ordre trois.

## Temps de calcul

Il est intéressant d'évaluer le coût, en terme de temps calcul et de stockage, qu'entraîne l'introduction d'un terme de viscosité dans les équations de Maxwell.

La résolution numérique du système (15.1,15.2) nécessite environ 7% de temps calcul supplémentaire par rapport à la résolution du système de Maxwell. Le surcoût en terme d'occupation mémoire est d'environ 4%. On peut donc, au vu de ces chiffres, conclure que la méthode de pénalisation des contraintes pour le système de Maxwell permet de prendre en compte les contraintes de divergence pour le champ électromagnétique à un coût raisonnable.

## 7 Conclusion

Cette étude nous montre que la méthode de pénalisation proposée permet que les relations de divergence (1.3,1.4) soient mieux vérifiées numériquement.

On a vu dans l'étude de stabilité que l'on peut trouver un paramètre de diffusion optimal qui n'introduit aucune contrainte supplémentaire sur le pas de temps, quel que soit le maillage utilisé, rectangulaire ou triangulaire.

L'étude des équations équivalentes nous a permis de mettre en évidence les termes d'erreur sur les schémas eux-mêmes et également sur la variation de la divergence au cours du temps. La valeur  $\beta = \frac{1}{3}$  permet d'obtenir des schémas d'ordre trois en temps et en espace, ainsi qu'une erreur sur la divergence d'ordre trois; aussi bien pour les maillages rectangulaires que triangulaires.

Les schémas en triangles semblent introduire plus de dissipation numérique qu'en rectangles, et les relations de divergence sont mieux vérifiées dans le cas d'un schéma en rectangles. Cela peut provenir du fait que l'influence du terme de diffusion introduit est plus importante en rectangles qu'en triangles. Toutefois, dans notre étude nous avons considéré des maillages triangulaires structurés, ce qui pénalise dans ce cas les schémas par-rapport aux maillages rectangulaires.

On a aussi remarqué l'influence du pas d'espace  $h$  sur la divergence. A ce sujet, cette méthode peut s'avérer intéressante dans le cas tridimensionnel, en permettant par exemple d'utiliser un pas d'espace plus grand (moins de points) par longueur d'onde.

## 8 Remerciements.

Les auteurs tiennent à remercier Frédéric Poupaud (Université de Nice) ainsi que Loula Fézoui et Armel de la Bourdonnaye (CERMICS-INRIA) pour leur aide fructueuse concernant l'élaboration de ce travail.

## Références

- [1] ASSOUS F. - DEGOND P. - SEGRE J., *A particle-tracking method for 3D electromagnetic PIC codes on unstructured meshes*, Comp. Phys. Comm., 72, pp. 105-114, (1992)
- [2] CARPENTIER R. - de la BOURDONNAYE A. - LARROUTUROU B., *On the derivation of the modified equation for the analysis of linear numerical methods*, Rapport de recherche CERMICS no.26 (1994).
- [3] DEPEYRE S. - CARPENTIER R., *Etude de schémas décentrés appliqués à l'équation scalaire d'advection*, Rapport de recherche CERMICS, à paraître.
- [4] DEPEYRE S. *Stability analysis for the finite volume schemes on rectangular and triangular meshes applied to the 2D Maxwell system*, to appear.
- [5] CIONI J.P. - FEZOU L. - STEVE H., *A parallel time-domain Maxwell solver using upwind schemes and triangular meshes*, IMPACT in computing in science and engineering No 165 (1993)
- [6] CIONI J.P., FEZOU L., ISSAUTIER D., *High-order upwind schemes for solving time-domain Maxwell equation*, La Recherche Aérospatiale, numéro spécial électromagnétisme.
- [7] DAUTRAY R., LIONS J.L., *Analyse mathématique et calcul numérique*, Masson, 1, 1987, 68-127.
- [8] DESIDERI J.A. - GOUJO A. - SELMIN V., *Third-order numerical schemes for hyperbolic problems*, Rapport de recherche INRIA no.607 (1987).
- [9] FEZOU L., *Résolution des équations d'Euler par un schéma de Van Leer en éléments finis*, Rapport de recherche INRIA no.358 (1985).
- [10] GLINSKY N., *Simulation numérique d'écoulements hypersoniques réactifs hors-équilibre chimique*, Thèse de l'université de Nice-Sophia-Antipolis (1990).
- [11] ISSAUTIER D. - CIONI J.P. - POUPAUD F. - FEZOU L., *A 2-D Vlasov-Maxwell solver on unstructured meshes*, Third international conference on mathematical and numerical aspects of wave propagation phenomena, Mandelieu, Avril 1995.
- [12] LAX P.D. - HARTEN A. - VAN LEER B., *On upstream differencing and Godunov type schemes for hyperbolic conservation laws*, SIAM Revue, Vol 25, No 1, (1983)
- [13] LANTERI S., *Simulation d'écoulements aérodynamiques instationnaires sur une architecture massivement parallèle*, Thèse de l'université de Nice-Sophia-Antipolis (1991).
- [14] SELMIN V., *Finite element solution of hyperbolic equations; I: one dimensional case, II: two dimensional case*, Rapport de recherche INRIA no.655 (1987).

- [15] VAN LEER B., *Flux vector splitting for the Euler equations*, Lecture Notes in Physics, Vol 170, pp 405-512 (1982)
- [16] WARMING R.F. - HYETT, *The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods*, J. Comp. Phys., **14**, (2), p.159, (1974).