Super-mouvement brownien avec catalyse

Catalytic super Brownian motion

Jean-françois DELMAS

ENPC-CERMICS, La Courtine, 93167 Noisy-Le-Grand Cedex, France.

Abstract

We study a general class of catalytic super-Brownian motions. Informally, such a process Z describes the evolution of a large number of small particles which move according to independent Brownian motions in $\mathbb{R}^d$ and branch only when they visit a given set D (the catalyst), which may be of zero Lebesgue measure. We first construct the processus Z as a weak limit of branching particle systems. We then obtain detailed information about the continuity properties of Z. Using excursion theory for Brownian motion in $\mathbb{R}^d$, we prove a representation theorem for Z outside the catalyst D. In the special case when D has zero Lebesgue measure, this representation theorem shows that a.s. for every $t > 0$, the measure Z_t is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure, and its density solves the heat equation outside D.

Mathematics Subject Classification: 60G57
KEY WORDS: super Brownian motion, catalyst.

1 Introduction

L'objet du présent travail est de développer une étude générale des super-mouvements browniens avec catalyse dans $\mathbb{R}^d$. Les superprocessus, ou processus de branchement à valeurs mesures, rendent compte de l'évolution d'un grand nombre de particules soumises à un double phénomène de déplacement spatial et de branchement. Dans la situation classique la plus étudiée, le phénomène de branchement se produit de manière homogène dans l'espace. Récemment sont apparus des modèles où le phénomène de branchement ne se produit que sur une partie de l'espace, appelée ensemble de catalyse, qui peut être de mesure nulle. Dawson et Fleischmann [2], [3],

[4] (voir aussi Fleischmann et Le Gall [7]) ont étudié notamment des situations où le déplacement spatial est le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$, et l'ensemble de catalyse est un point en dimension un, ou bien une famille dense d'hyperplans parallèles en dimension plus grande. Les processus ainsi obtenus, appelés super-mouvements browniens avec catalyse, sont aussi des cas particuliers des superprocessus trés généraux étudiés par Dynkin [5]. Une particularité remarquable de ces modèles avec catalyse est que, au moins dans les exemples traités par Dawson et Fleischmann, la valeur à un instant fixé du superprocessus avec catalyse est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, ce qui n'est évidemment pas le cas pour le super-mouvement brownien usuel en dimension ≥ 2.

Nous établissons ici un certain nombre de résultats généraux sur les superprocessus avec catalyse, en nous limitant au cas où le déplacement spatial est le mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$. La donnée importante est la mesure ν qui gouverne le phénomène de branchement. L'ensemble de catalyse D est ensuite défini comme le support topologique de ν. Les résultats principaux, obtenus sous des hypothèses convenables sur ν et D, sont les suivants. Nous construisons le super-mouvement brownien avec catalyse comme limite en loi de systèmes de particules browniennes avec branchement. Ce résultat est implicite dans Dynkin [5] (pour des déplacements spatiaux bien plus généraux) mais comme nos hypothèses sont un peu différentes nous avons choisi d'en donner une preuve indépendante. Nous étudions ensuite les propriétés de continuité du super-mouvement brownien avec catalyse, puis nous établissons un théorème de représentation en dehors de l'ensemble de catalyse, qui montre en particulier que la valeur du superprocesus à un instant donné est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur D^c. Ce théorème de représentation généralise un résultat de Fleischmann et Le Gall concernant le cas particulier d'un point de catalyse en dimension un.

Décrivons maintenant plus en détail le contenu des différents paragraphes. Le paragraphe 2 présente un lemme préliminaire et donne surtout l'hypothèse clef (H) sur la mesure ν qui gouverne le branchement. Cette hypothèse entraine entre autres l'existence d'une fonctionnelle additive continue A associée à la mesure ν.

Dans le paragraphe 3, on considère un système de particules régi par les règles suivantes:

- Chaque particule a des instants de naissance et de mort aléatoires.

- Étant donné l'instant de naissance t et le lieu de naissance x, la trajectoire de chaque particule a pour loi la loi du mouvement brownien issu de x à l'instant t. Les trajectoires des différentes particules sont indépendantes.

– Étant donné la trajectoire d'une particule sa probabilité de survivre sur l'intervalle de temps (s,t) est donnée par $\mathrm{e}^{-(A_t - A_s)}$.

– Une particule qui meurt donne naissance indépendamment de ce qui précède à 0 ou 2 enfants avec probabilité 1/2 (phénomène de branchement critique).

Si on note $Y_t(C)$ le nombre de particules qui sont à l'instant t dans le sous-ensemble borélien C de $\mathbb{R}^d$, alors $(Y_t, t \geq 0)$ définit un processus de Markov homogène à valeurs dans l'ensemble des mesures ponctuelles finies sur $\mathbb{R}^d$. Si on affecte un poids $1/n$ aux particules et si on remplace la fonctionnelle additive A par nA, les processus correspondants Y^n convergent en loi vers un processus de Markov homogène à valeurs dans l'espace des mesures finies sur $\mathbb{R}^d$ (théorème 3.2). Ce processus limite noté Z est le super-mouvement brownien avec mesure de catalyse ν. La loi de Z est caractérisée par sa fonctionnelle de Laplace, solution d'une équation intégrale (cf (10)).

En évaluant les moments de Z et en utilisant le lemme de Kolmogorov, on montre, dans le paragraphe 4, que le processus Z possède une version continue pour la topologie de la convergence étroite (théorème 4.7). On montre même grâce à un résultat de Perkins [12], que pour toute fonction mesurable bornée φ, p.s. le processus $(\int \varphi(x) Z_t(dx), t > 0)$ est continu (théorème 4.9). Les calculs des moments qui permettent d'aboutir à ces résultats constituent un outil important pour les parties suivantes.

Dans le paragraphe 5, on construit pour toute mesure ρ vérifiant la condition d'intégrabilité (H) une mesure aléatoire Γ_ρ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. Ces mesures aléatoires jouent un rôle capital dans la suite de ce travail et en particulier dans le théorème de représentation en dehors du support de ν. En termes intuitifs, la mesure Γ_ρ rend compte des instants de visite et de la quantité de particules qui rencontrent le support de ρ.

En vue du théorème de représentation, on rappelle dans le paragraphe 6 des résultats généraux de Maisonneuve [10] concernant l'existence pour le mouvement brownien d'un temps local L sur l'ensemble D et d'une famille universellement mesurable de mesures d'excursion en dehors de D. On note H^x la mesure d'excursion hors de D partant de x.

On énonce dans le paragraphe 7 le théorème de représentation sous la condition (hypothèse (H')) que la mesure de Revuz μ associée au temps local L vérifie la condition d'intégrabilité (H). Cette condition est automatiquement vérifiée si $d = 1$, en dimension supérieure, elle est vérifiée dès que D satisfait une hypothèse de régularité assez faible (cf Appendice). On peut alors considérer la mesure aléatoire Γ_ρ avec $\rho := \mu$ construite dans le paragraphe 5. On définit pour $t > 0$ une mesure aléatoire Θ_t sur $\mathbb{R}^d$ par:

$$(\Theta_t, \varphi) := \int \mathbf{1}_{0 \leq u < t} H^x[\varphi(\omega(t-u))]\Gamma_\mu(du, dx).$$

Si Q_t désigne le noyau de transition du mouvement brownien tué sur D, alors on a la représentation suivante sur le complémentaire de D (théorème 7.1): $\mathbb{P}_\eta^Z$-p.s. pour tout $t > 0$,

$$\mathbf{1}_{D^c}.Z_t = \Theta_t + \eta Q_t.$$

Remarquons que, si D est un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, alors p.s. pour tout $t > 0$ la mesure Z_t ne charge pas D. Le théorème précédent donne donc une formule de représentation pour Z_t et pas seulement pour $\mathbf{1}_{D^c}.Z_t$.

Dans le paragraphe 8, à l'aide des formules de représentation, on montre que le processus $(Z_t(dx), t > 0)$ possède sur D^c une densité $z(t, x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Cette densité est de classe C^∞ sur $(0, \infty) \times D^c$ et est solution de l'équation de la chaleur (théorème 8.1).

Enfin, dans le paragraphe 9, on donne une autre application des mesures Γ_ρ. Précisément, on identifie la mesure de covariance de la mesure martingale orthogonale associée à Z à la mesure Γ_ρ pour $\rho := \nu$.

2 Notations et résultats préliminaires

2.1 Hypothèse d'intégrabilité (H)

On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$. On dit qu'une mesure positive σ-finie ρ vérifie l'hypothèse d'intégrabilité (H), s'il existe un réel $\beta \in (0, 1)$ tel que $d - 2 + 2\beta \geq 0$ et

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{B(x,1)} \frac{\rho(dy)}{|x-y|^{d-2+2\beta}} < \infty,$$

où $B(x, 1)$ est la boule ouverte de centre x et de rayon 1.

Pour $d = 1$ toutes les mesures finies vérifient cette condition d'intégrabilité (prendre $\beta = \frac{1}{2}$). Pour d quelconque, il est clair que la mesure de Lebesgue convient également.

Remarquons de plus que sous l'hypothèse (H), la mesure ρ ne charge pas les ensembles polaires du mouvement brownien.

En effet pour que la mesure ρ ne charge pas les ensembles polaires, il est suffisant que $|x-y|^{-d+2}$ (respectivement $\log(|x-y|^{-1})$) soit localement intégrable par rapport à $\rho(dy)$ si $d \geq 3$ (resp. si $d=2$) (cf [13]). On vérifie facilement ces conditions pour toute mesure ρ satisfaisant (H).

A cause des relations classiques entre capacité et mesure de Hausdorff (cf [6]), on remarque que la condition (H) implique que la dimension de Hausdorff du support de ρ est supérieure ou égale à $d-2+2\beta$.

2.2 Notations et quelques rappels

Pour alléger les démonstrations, on notera c une constante qui peut changer d'une ligne de calcul à l'autre. On note $(M_f, \mathcal{M}_f)$ l'espace des mesures positives finies sur $\mathbb{R}^d$ muni de la topologie de la convergence étroite. De manière générale, pour tout espace mesurable $(\Omega, \mathcal{G})$, on note $\mathcal{G}^*$ la complétion universelle de $\mathcal{G}$, et pour tout espace polonais S, on note respectivement $\mathcal{B}(S)$, $\mathcal{B}_{b+}(S)$, $C(S)$, $C_{b+}(S)$, l'ensemble des fonctions de S à valeurs dans $\mathbb{R}$ respectivement mesurables, mesurables positives bornées, continues, continues positives bornées. Par abus de notation, on écrit aussi $\mathcal{B}(S)$ pour la tribu borélienne sur S. On note $(M_f(S), \mathcal{M}_f(S))$ l'espace des mesures positives finies sur S muni de la topologie de la convergence étroite. L'espace $(M_f(S), \mathcal{M}_f(S))$ est polonais. Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}(S)$, on note $\| f \| := \sup_{x \in S} |f(x)|$ et pour toute mesure $\mu \in M_f(S)$, on écrit indifféremment $\int f(y)\mu(dy) = (\mu, f)$.

On note P_s le noyau de transition du mouvement brownien en dimension d et p sa densité de transition:

$$p(s,x) := \frac{1}{(2\pi s)^{d/2}} \exp -\frac{|x|^2}{2s} \qquad (x,s) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty).$$

On utilisera les résultats élémentaires suivants:

Lemme 2.1 *Soit ρ une mesure sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant (H). On a les majorations suivantes:*
soit $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $(x,s,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty) \times (0,\infty)$,

$$|p(s,x) - p(t,x)| \leq c \int_{[s,t]} \frac{1}{u} p(u(1+\varepsilon), x) du; \tag{1}$$

pour tout $(x,s) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$,

$$\int p(s, x-y)\rho(dy) \leq c \frac{1}{(s \wedge 1)^{1-\beta}}; \tag{2}$$

pour tout $(x,x',s)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times(0,\infty)$,

$$\int\rho(dy)\left|p(s,x-y)-p(s,x'-y)\right|\leq c\,(s\wedge 1)^{\beta-3/2}\left|x-x'\right|;\qquad(3)$$

et pour tout $(x,x',s)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times(0,\infty)$, *pour toute fonction* $f\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ *bornée,*

$$\left|P_sf(x)-P_sf(x')\right|\leq c\,\frac{1}{\sqrt{s}}\,\|f\|\,\left|x-x'\right|.\qquad(4)$$

Preuve. Considérons la majoration (1). Il existe une constante c dépendant de ε telle que pour tout $r\geq 0$, on a $(r+d)\,\mathrm{e}^{-r/2}\leq c\,\exp-\frac{r}{2(1+\varepsilon)}$, et donc

$$\begin{aligned}|p(s,x)-p(t,x)| &= \left|\int_{[s,t]}p(u,x)\left(\frac{|x|^2}{2u^2}-\frac{d}{2u}\right)du\right|\\ &\leq c\int_{[s,t]}\frac{1}{u}\,p(u(1+\varepsilon),x)du.\end{aligned}$$

Pour la majoration (2), remarquons que si $v>0$, la fonction $s\mapsto s^{-v/2}\,\mathrm{e}^{-c/s}$ définie sur $(0,\infty)$ atteint son maximum pour $s=2c/v$. Il en découle que pour tout $(x,s,v)\in\mathbb{R}^d\times(0,\infty)\times(0,\infty)$

$$\frac{1}{(2\pi s)^{v/2}}\,\mathrm{e}^{-|x|^2/2s}\leq\left(\frac{v}{2\pi}\right)^{v/2}|x|^{-v}\,\mathrm{e}^{-v/2}.$$

Comme

$$\int_{B(x,1)}p(s,x-y)\rho(dy)=c\int_{B(x,1)}\frac{1}{s^{1-\beta}}\,\frac{1}{s^{(d-2+2\beta)/2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{2s}}\,\rho(dy),$$

en prenant $v=d-2+2\beta$ dans la majoration précédente et en utilisant l'hypothèse (H), on obtient:

$$\int_{B(x,1)}p(s,x-y)\rho(dy)\leq c\,\frac{1}{s^{1-\beta}},\qquad(5)$$

où c est indépendant de x et s. Ensuite, on peut recouvrir $B(x,1)^c$ par une famille dénombrable $(\bar{B}(z_i,1/4),i\in I)$ de boules fermées de rayon $1/4$, dont les centres z_i appartiennent à $x+\frac{1}{2\sqrt{d}}\,\mathbb{Z}^d$. On peut supposer que pour tout $i\in I$, $|x-z_i|\geq 1/2$, de sorte que si $y\in\bar{B}(z_i,1/4)$, alors $|x-y|\geq\frac{1}{2}\,|x-z_i|$. En remarquant que grâce à (H), $(\rho(\bar{B}(z_i,1/4)), i\in I)$ est uniformément borné, il vient:

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,1)^c} p(s,x-y)\rho(dy) &\leq \frac{c}{s^{d/2}}\sum_{i\in I}\exp\left(-\frac{1}{4}\,\frac{|x-z_i|^2}{2s}\right)\\
&\leq \frac{c}{s^{d/2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{16d}\frac{1}{4s}}\sum_{z\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}}\exp\left(-\frac{1}{16d}\,\frac{|z|^2}{4s}\right)\\
&\leq \frac{c}{s^{d/2}}\,\mathrm{e}^{-1/(64ds)}\left[\sum_{n\in\mathbb{N}}\exp\left(-\frac{1}{16d}\,\frac{n^2}{4s}\right)\right]^d.
\end{aligned}$$

Comme l'application $x\mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on peut majorer les sommes de Riemann par l'intégrale de Lebesgue. On obtient alors pour tout $h>0$:

$$h\sum_{n>0}\mathrm{e}^{-(hn)^2}\leq\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,dx.$$

En appliquant cette majoration au résultat précédent avec $h:=(64ds)^{-1/2}$, il vient pour tout $s\in(0,\infty)$:

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,1)^c} p(s,x-y)\rho(dy) &\leq c\,\frac{1}{s^{d/2}}\left[1+8\sqrt{ds}\right]^d\exp -1/(64ds)\\
&\leq c.
\end{aligned}$$

On déduit alors de cette inégalité et de (5) la majoration (2).

Pour montrer (3), on utilise la majoration $r\,\mathrm{e}^{-r^2}\leq c\ \mathrm{e}^{-r^2/2}$ $(r\geq 0)$ qui implique

$$\begin{aligned}
&\int\rho(dy)\,|p(s,x-y)-p(s,x'-y)|\\
&\leq\int\rho(dy)\,\frac{1}{(2\pi s)^{d/2}}\int_0^1\frac{1}{s}\left|(u(x-x')+x'-y|x-x')\right|\mathrm{e}^{-\frac{|u(x-x')+x'-y|^2}{2s}}\,du\\
&\leq c\,\frac{1}{\sqrt{s}}\,|x-x'|\int_0^1 du\int\rho(dy)\,\frac{1}{s^{d/2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{|u(x-x')+x'-y|^2}{4s}},
\end{aligned}$$

où on a noté $(x|y)$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^d$. En utilisant (2), on obtient la majoration souhaitée.

Enfin, la majoration (4) découle facilement de l'inégalité ci-dessus, en remplaçant simplement $\rho(dy)$ par $|f(y)|\,dy$.

$\square$

On note δ un point cimetière ajouté à $\mathbb{R}^d$ comme point à l'infini. On considère $\Omega := \mathbb{D}\Big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d \bigcup \{\delta\}\Big)$ l'espace des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d \bigcup \{\delta\}$ continues à droite et limitées à gauche. On note $B := (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, B_t, \theta_t, (\mathbb{P}_x)_{x \in \mathbb{R}^d})$ la réalisation canonique du mouvement brownien sur Ω (cf [1]). Pour toute la suite, on fixe ν une mesure positive satisfaisant l'hypothèse (H) avec un réel $\alpha \in (0,1)$. On note D le support topologique de cette mesure. On a vu que la mesure ν ne charge pas les ensembles polaires pour le processus B. En utilisant (2), on remarque que pour tous $r > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, l'intégrale $\int \nu(dy) \int_0^\infty p(s, x-y)\, \mathrm{e}^{-rs}\ ds$ est finie. D'après le chapitre VI de [1], il existe une unique fonctionnelle additive continue du processus B, notée A, telle que pour tout $f \in \mathcal{B}_{b^+}(\mathbb{R}^d)$, pour tout $(x, r) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$,

$$\mathbb{E}_x \int_0^\infty f(B_s)\, \mathrm{e}^{-rs}\ dA_s = \int_0^\infty ds \int \nu(dy) p(s, x-y)\, \mathrm{e}^{-rs} f(y).$$

On en déduit par un argument de classe monotone que pour toute fonction $f \in \mathcal{B}_{b^+}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$,

$$\mathbb{E}_x \int_0^\infty f(s, B_s) dA_s = \int_0^\infty ds \int \nu(dy) p(s, x-y) f(s, y). \tag{6}$$

On utilisera également la famille de constantes $(a_T)_{T \in (0,\infty]}$ définies par:

$$a_T := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}_x A_T = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_0^T ds \int \nu(dy) p(s, x-y).$$

La majoration (2) montre que pour tout temps $T < \infty$, $a_T \leq c\ (T^\alpha \vee T) < \infty$.

L'objectif du présent travail est l'étude du superprocessus Z associé au triplet $(B, A, \frac{z^2}{2})$, dans la terminologie de [5]. Remarquons cependant que l'article [5] impose la finitude des moments exponentiels de tous ordres de la fonctionnelle additive A, ce qui n'est pas forcément vérifié ici.

3 Construction du super-mouvement brownien avec catalyse comme limite d'un système de particules avec branchement

3.1 Construction du système de particules avec branchement.

Nous développons dans ce paragraphe une construction précise du système de particules avec branchement déjà présenté dans l'introduction. On note $\mathcal{W}$ l'ensemble des triplets $\mathrm{w} = (\varphi, \alpha, \beta)$ où $\alpha \in [0, \infty)$, $\beta \in [0, \infty]$, $\alpha \leq \beta$ et φ est une application continue de $[\alpha, \beta]$ dans $\mathbb{R}^d$ (de $[\alpha, \infty)$ si $\beta = \infty$). Soit g une application continue strictement croissante de $[0, \infty]$ dans $[0, 1]$. La distance sur $\mathcal{W}$ est définie par:

$$\begin{aligned} d(\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2) \quad := \quad & |\alpha_1 - \alpha_2| + |g(\beta_1) - g(\beta_2)| \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{-k} \wedge \sup_{t \in [0,k]} |\varphi_1((\alpha_1 \vee t) \wedge \beta_1) - \varphi_2((\alpha_2 \vee t) \wedge \beta_2)| \right). \end{aligned}$$

Alors $(\mathcal{W}, d)$ est un espace polonais. On définit pour tout $(r, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ une probabilité $\Pi_{r,x}$ sur $\mathcal{W}$ comme étant la loi d'un mouvement brownien B issu de x à l'instant $\alpha = r$ et arrêté à un instant aléatoire β tel que pour tout $t \geq r$,

$$\Pi_{r,x}(\beta > t \mid B_s, r \leq s \leq t) = \mathrm{e}^{-A_{t-r}}$$

(en particulier $\Pi_{r,x}(\beta = \infty \mid B_s, r \leq s) = \mathrm{e}^{-A_\infty}$).

On introduit maintenant le modèle d'arbre suivant [11]. Soit l'ensemble $U := \{\partial\} \bigcup (\bigcup_{n=1}^{\infty} \{1, 2\}^n)$. L'élément ∂ est interprété comme l'ancêtre de la population. Pour $u \in U$, on note $|u| = 0$ si $u = \partial$, $|u| = n$ si $u \in \{1, 2\}^n$. Si $u \neq \partial$, $u = (i_1, \ldots, i_n)$ on note $\bar{u} := (i_1, \ldots, i_{n-1})$ le père de u.

Fixons $x \in \mathbb{R}^d$. A chaque $u \in U$, on associe un élément aléatoire $\mathrm{w}_u = (\varphi_u, \alpha_u, \beta_u)$ de $\mathcal{W} \bigcup \{\Delta\}$, où Δ est un point cimetière ajouté à $\mathcal{W}$ comme point isolé. On construit la famille $(\mathrm{w}_u, u \in U)$ par récurrence sur $|u|$.

Si $u = \partial$, w_∂ a pour loi $\Pi_{0,x}$. Ensuite supposons construit w_u pour $|u| \leq n$. Alors les trajectoires w_v, $|v| = n + 1$ sont indépendantes conditionnellement à $(\mathrm{w}_u, |u| \leq n)$. De plus soit v avec $|v| = n + 1$, alors

- si $\mathrm{w}_{\bar{v}} = \Delta$ ou si $\beta_{\bar{v}} = \infty$ on a $\mathrm{w}_v = \Delta$;
- si $\mathrm{w}_{\bar{v}} \neq \Delta$ et $\beta_{\bar{v}} < \infty$ la loi conditionnelle de w_v sachant $(\mathrm{w}_u, |u| \leq n)$ est $\Pi_{\beta_{\bar{v}}, \varphi_{\bar{v}}(\beta_{\bar{v}})}$.

Il reste à introduire le phénomène de branchement. Pour cela on considère un arbre aléatoire A de loi de reproduction $\gamma(0) = \gamma(2) = \frac{1}{2}$ suivant [11]. Cela signifie précisément qu'on se donne une famille η_u, $u \in U$ de variables aléatoires indépendantes et indépendantes de $(\mathrm{w}_u,\ u \in U)$ de loi γ et on pose

$$A = \{\partial\} \bigcup \left\{ (u_1, \ldots, u_n) \in U; \eta_{(u_1, \ldots u_j)} = 2, \forall j \in \{0, \ldots, n-1\} \right\}$$

(pour $j = 0$, $\eta_{(u_1, \ldots u_j)} = \eta_\partial$).

Pour tout $t \geq 0$, on définit une mesure ponctuelle Y_t sur $\mathbb{R}^d$ par la formule

$$(Y_t, \mathbf{1}_C) := \text{card}\,\{u \in A;\ \alpha_u \leq t < \beta_u, \varphi_u(t) \in C\}\,.$$

Remarquons que $Y_0 = \delta_x$. Par des méthodes classiques, on vérifie que le processus $(Y_t, t \geq 0)$ est un processus de Markov homogène à valeurs dans l'espace des mesures ponctuelles sur $\mathbb{R}^d$. On note Q_{δ_x} la loi de $(Y_t, t \geq 0)$. Si $\mu := \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$ est une mesure finie, on note Q_μ la loi du processus $\sum_{i=1}^n Y^i$ où les processus Y^i sont indépendants et de loi respectives $Q_{\delta_{x_i}}$.

Le caractère critique du branchement assure que le nombre total de particules créées est fini p.s.. En revanche, il n'y a pas forcément extinction car certaines particules peuvent après un certain temps ne plus être soumises au phénomène de branchement (c'est le cas en particulier si $d \geq 3$ et ν à support compact). La famille de probabilités (Q_μ) satisfait par construction au principe de superposition suivant: soit une fonction $f \in \mathcal{B}_{b^+}(\mathbb{R}^d)$, soient des mesures ponctuelles finies $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_n$ telles que $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i$, alors on a

$$Q_\mu\left[\exp -(Y_t, f)\right] = \prod_{i=1}^n Q_{\mu_i}\left[\exp -(Y_t, f)\right].$$

Cela suggère d'étudier la fonction v définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ par:

$$v(t,x) := Q_{\delta_x}\left[\exp -(Y_t, f)\right], \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d.$$

Sous Q_{δ_x}, on a $Y_t = \delta_{\varphi_\partial(t)}$ sur $\{\beta_\partial > t\}$, c'est à dire si la particule ancêtre est encore en vie à l'instant t. En revanche sur $\{\beta_\partial \leq t\}$ on a $Y_t = 0$ si $\eta_\partial = 0$ et si $\eta_\partial = 2$, $Y_t = Y_t^1 + Y_t^2$ où les Y_t^i sont indépendants et de loi conditionnelle $Q_{\beta_\partial, \varphi_\partial(\beta_\partial)}$ connaissant w_∂. Cela conduit à la formule suivante:

$$v(t,x) = \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-A_t}\,\mathrm{e}^{-f(B_t)} + \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{e}^{-A_s}[1 + v(t-s, B_s)^2]dA_s\right]. \tag{7}$$

En remplaçant $v(t-u, B_u)$ par son expression donnée par (7), on trouve:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x \int_0^t v(t-u, B_u)dA_u \\
&\quad = \mathbb{E}_x\,\mathrm{e}^{-f(B_t)}\left[1 - \mathrm{e}^{-A_t}\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}_x \int_0^t dA_u \int_u^t \mathrm{e}^{-A_s + A_u}\left[1 + v(t-s, B_s)^2\right] dA_s \\
&\quad = \mathbb{E}_x\,\mathrm{e}^{-f(B_t)}\left[1 - \mathrm{e}^{-A_t}\right] + \frac{1}{2}\mathbb{E}_x \int_0^t \left(1 - \mathrm{e}^{-A_s}\right)\left[1 + v(t-s, B_s)^2\right] dA_s.
\end{aligned}$$

En ajoutant cette dernière équation à l'équation (7), il vient:

$$v(t,x) = P_t\left[\exp -f\right](x) + \frac{1}{2}\mathbb{E}_x \int_0^t \left[1 - v(t-s, B_s)\right]^2 dA_s. \qquad (8)$$

Cette équation est plus utile que l'équation (7) pour le passage à la limite que l'on considèrera dans la suite du paragraphe. Remarquons déjà que (8) permet de calculer les moments d'ordre un de Y_t.

Lemme 3.1 *Soit $f \in \mathcal{B}_{b^+}(\mathbb{R}^d)$, on a $Q_{\delta_x}(Y_t, f) = P_t f(x)$.*

Preuve. Soit un réel $\varepsilon \geq 0$, on note $v_\varepsilon(t,x) := Q_{\delta_x} \exp -\varepsilon(Y_t, f)$. On a $\| v_\varepsilon \| \leq 1$. On déduit de l'équation (8) que

$$0 \leq \frac{1 - v_\varepsilon(t,x)}{\varepsilon} \leq P_t\left[\frac{1 - \mathrm{e}^{-\varepsilon f}}{\varepsilon}\right](x) \leq \| f \|.$$

En utilisant de nouveau (8) et le fait que $\mathbb{E}_x A_t \leq a_t < \infty$, on obtient que $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1 - v_\varepsilon(t,x)}{\varepsilon} = P_t f(x)$. Or par convergence monotone on a:

$$Q_{\delta_x}(Y_t, f) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} Q_{\delta_x}\left[1 - \mathrm{e}^{-\varepsilon(Y_t, f)}\right].$$

On en déduit le résultat recherché.

□

3.2 Le passage à la limite.

Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures ponctuelles finies. Pour tout entier n, on considère un processus $(Y_t^n, t \geq 0)$ associé par la construction du paragraphe précédent à la fonctionnelle additive $A^n := nA$ et de valeur initiale λ_n. On a un théorème similaire au théorème 1.1 de [5].

Théorème 3.2 *Supposons que $\frac{1}{n}\lambda_n$ converge étroitement vers $\mu \in M_f$. Alors la suite de processus $(\frac{1}{n} Y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens de la convergence étroite des lois marginales de dimension finie vers un processus $(Z_t, t \geq 0)$. Ce processus est un processus de Markov homogène à valeurs dans M_f. Sa loi est caractérisée par:*

- $Z_0 \overset{p.s.}{=} \mu$

– *pour tout $T > 0$, pour tout entier $p \geq 1$, pour tous $0 = t_0 < \cdots < t_p \leq T$, pour toute fonction $f \in C_{b+}(\mathbb{R}^d)$ telle que $a_T \| f \| < 1$, on a*

$$\mathbb{E}\left[\exp -(Z_{t_p}, f) \mid Z_{t_0}, \ldots, Z_{t_{p-1}}\right] = \exp -(Z_{t_{p-1}}, w(t_p - t_{p-1})), \tag{9}$$

où w est l'unique solution positive mesurable de l'équation intégrale:

$$w(t,x) = P_t\, f(x) - \frac{1}{2}\mathbb{E}_x \int_0^t w(t-s, B_s)^2\, dA_s, \quad (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d. \tag{10}$$

Preuve. Soit $f \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^d)$ telle que $a_T \| f \| < 1$. Remarquons dans une première étape que l'équation intégrale (10) possède au plus une solution positive. En effet toute solution positive est bornée par $\| f \|$. Donc si w_1 et w_2 sont deux solutions positives distinctes de (10), en faisant la différence dans l'équation (10), et en utilisant la définition des constantes a_T, il vient:

$$\begin{aligned} &\| w_1 - w_2 \| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d, t \in [0,T]} \frac{1}{2} \int_0^t ds \int \nu(dy) p(s, x-y) \left| w_1(t-s,y)^2 - w_2(t-s,y)^2 \right| \\ &\leq \| f \| \; \| w_1 - w_2 \| \, a_T. \end{aligned}$$

Comme $a_T \| f \| < 1$, on en déduit que $w_1 = w_2$.

On pose

$$w_n(t,x) := -n \log Q_{\delta_x} \left[\exp -\frac{1}{n}(Y_t^n, f)\right]. \tag{11}$$

Lemme 3.3 *La suite de fonctions w_n converge uniformément sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ vers une fonction w positive mesurable solution de (10) sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$. Pour $0 < t \leq T$, les fonctions $w(t,.)$ sont continues sur $\mathbb{R}^d$, et $w(0,x) = f(x)$.*

La démonstration du lemme 3.3 est reportée à la fin de cette partie.

On établit dans une deuxième étape que la valeur initiale $Z_0 \overset{p.s.}{=} \mu$ et la relation (9) déterminent uniquement la loi du processus de Markov Z. En effet, soit Z' un autre processus avec les mêmes propriétés, un raisonnement par récurrence simple montre que pour toutes fonctions $f_0, \ldots, f_p \in C_{b+}(\mathbb{R}^d)$ et $\lambda > 0$ tels que $a_T \lambda \sum_{i=0}^p \| f_i \| < 1$ et pour $0 = t_0 < \cdots < t_p \leq T$, on a:

$$\mathbb{E} \exp -\lambda \sum_{i=0}^p (Z_{t_i}, f_i) = \mathbb{E} \exp -\lambda \sum_{i=0}^p (Z'_{t_i}, f_i)$$

(remarquer que la solution de (10) associée à f vérifie pour tout $t \geq 0$ $\| w(t) \| \leq \| f \|$ et $w(t) \in C_{b+}(\mathbb{R}^d)$ d'après le lemme 3.3). Un raisonnement de prolongement analytique montre que l'égalité précédente est vraie pour tout $\lambda \geq 0$. On conclut que les processus Z et Z' ont mêmes lois marginales de dimension finie.

Montrons dans une troisième étape que la suite $\frac{1}{n}(Y^n_{t_0}, \ldots, Y^n_{t_p})$ converge en loi dans M_f vers la variable aléatoire $(Z_{t_0}, \ldots Z_{t_p})$ vérifiant $Z_0 = \mu$ p.s. et la relation (9). Pour cela on utilise un argument classique de compactification.

On note $\hat{\mathbb{R}}^d$ le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}^d$. Les ensembles

$$\{\rho \in M_f(\hat{\mathbb{R}}^d); \quad (\rho, \mathbf{1}) \leq K\}$$

sont compacts dans l'espace polonais $M_f(\hat{\mathbb{R}}^d)$. Le lemme 3.1 montre que $Q_{\lambda_n}(\frac{1}{n} Y^n_t, \mathbf{1}) = (\frac{\lambda_n}{n}, \mathbf{1})$. On a alors pour tout n assez grand et pour tout réel positif K ,

$$Q_{\lambda_n}[\frac{1}{n}(Y^n_t, \mathbf{1}) > K] \leq \frac{1}{K} Q_{\lambda_n}[\frac{1}{n}(Y^n_t, \mathbf{1})] \leq \frac{(\mu, \mathbf{1}) + 1}{K}.$$

Donc pour tout $t \in [0, T]$, la suite des lois $\frac{1}{n} Y^n_t$ est tendue dans $M_f(M_f(\hat{\mathbb{R}}^d))$. De même, pour $0 = t_0 < \ldots < t_p \leq T$, la famille des lois de $\frac{1}{n}(Y^n_{t_0}, \ldots, Y^n_{t_p})$ est tendue dans $M_f([M_f(\hat{\mathbb{R}}^d)]^{p+1})$. On en déduit l'existence d'une sous suite $\frac{1}{n_k}(Y^{n_k}_{t_0}, \ldots, Y^{n_k}_{t_p})$ qui converge en loi vers une variable aléatoire à valeurs dans $[M_f(\hat{\mathbb{R}}^d)]^{p+1}$, que l'on note $(Z_{t_0}, \ldots, Z_{t_p})$.

Il est clair que cette variable aléatoire est à valeurs dans $[M_f(\mathbb{R}^d)]^{p+1}$, c'est à dire $(Z_{t_i}, \mathbf{1}_{\{\infty\}}) = 0$ pour tout i. En effet, fixons $\theta > 0$ tel que $\theta a_T < 1$ et soit, pour tout entier m, $\phi_m \in C_{b+}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\| \phi_m \| \leq \theta$, $\phi_m(x) = \theta$ si $|x| \geq m + 1$ et $\phi_m(x) = 0$ si $|x| \leq m$. Le lemme 3.3 entraîne par passage à la limite que

$$\mathbb{E} \exp -(Z_{t_i}, \phi_m) = \exp -(\mu, w^m(t_i)),$$

où w^m est la solution de (10) pour $f = \phi_m$ (remarquer que l'on utilise la continuité des fonctions $w^m(t)$). Comme $w^m(t) \leq P_t \phi_m$, en faisant tendre m vers ∞, on trouve que

$$\mathbb{E} \exp -(Z_{t_i}, \boldsymbol{\theta} \mathbf{1}_{\{\infty\}}) \geq \lim_{m \to \infty} \exp -(\mu, P_{t_i} \phi_m) = 1,$$

d'où le résultat annoncé.

En utilisant le théorème de représentation de Skorohod, on sait qu'il existe sur un espace probabilisé $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathbb{P}})$ une suite de variables aléatoires $(\tilde{Y}^{n_k}_{t_0}, \ldots, \tilde{Y}^{n_k}_{t_p})$ de même loi que $(Y^{n_k}_{t_0}, \ldots, Y^{n_k}_{t_p})$, ainsi qu'une variable aléatoire $(\tilde{Z}_{t_0}, \ldots, \tilde{Z}_{t_p})$ de même loi que $(Z_{t_0}, \ldots, Z_{t_p})$, et tels que la suite

$\frac{1}{n_k}(\tilde{Y}^{n_k}_{t_0}, \ldots, \tilde{Y}^{n_k}_{t_p})$ converge p.s. au sens de la convergence étroite sur $M_f(\hat{\mathbb{R}}^d)$ vers la variable aléatoire $(\tilde{Z}_{t_0}, \ldots, \tilde{Z}_{t_p})$. On en déduit que la convergence a également lieu au sens de la convergence vague sur $M_f(\mathbb{R}^d)$. Comme on a

$$\frac{1}{n_k}(\tilde{Y}^{n_k}_{t_i}, \mathbf{1}_{\{\mathbb{R}^d\}}) \overset{p.s.}{=} \frac{1}{n_k}(\tilde{Y}^{n_k}_{t_i}, \mathbf{1}_{\{\hat{\mathbb{R}}^d\}}) \overset{p.s.}{\to} (\tilde{Z}_{t_i}, \mathbf{1}_{\{\hat{\mathbb{R}}^d\}}) \overset{p.s.}{=} (\tilde{Z}_{t_i}, \mathbf{1}_{\{\mathbb{R}^d\}}),$$

on en déduit que la convergence a lieu au sens de la convergence étroite sur $M_f(\mathbb{R}^d)$.

Il faut encore vérifier que l'on a $Z_0 = \mu$ p.s. et la relation (9). L'égalité $Z_0 = \mu$ est triviale. Soit ensuite un entier $p \geq 1$, pour toutes fonctions $f_0, \ldots, f_p$ continues positives telles que $a_T \parallel f_p \parallel < 1$, la propriété de Markov appliquée à Y^n donne:

$$\mathbb{E}\exp - \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{n}(Y^n_{t_i}, f_i) = \mathbb{E}\exp - \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{n}(Y^n_{t_i}, f_i) - \frac{1}{n}(Y^n_{t_{p-1}}, w^{(p)}_n(t_p - t_{p-1})),$$

où la fonction $w^{(p)}_n$ est définie par (11) avec $f = f_p$. Par passage à la limite dans l'équation ci-dessus le long de la sous-suite (n_k) et en utilisant le lemme 3.3, il vient:

$$\mathbb{E}\exp - \sum_{i=0}^{p}(Z_{t_i}, f_i) = \mathbb{E}\exp - \sum_{i=0}^{p-1}(Z_{t_i}, f_i) - (Z_{t_{p-1}}, w(t_p - t_{p-1})),$$

où la fonction w est l'unique solution positive de l'équation (10) avec $f = f_p$. On en déduit que la variable aléatoire $(Z_{t_0}, \ldots, Z_{t_p})$ vérifie (9).

Enfin d'après la deuxième étape, la loi de $(Z_{t_0}, \ldots, Z_{t_p})$ est uniquement déterminée, ce qui entraîne la convergence en loi de la suite $\frac{1}{n}(Y^n_{t_0}, \ldots, Y^n_{t_p})$ (et pas seulement le long de la sous-suite (n_k)). Le théorème d'extension de Kolmogorov donne l'existence d'un processus Z dont la loi marginale aux instants $t_0, \ldots, t_p$ est la loi de $(Z_{t_0}, \ldots, Z_{t_p})$. Finalement le caractère markovien homogène de Z découle de (9).

□

Preuve du lemme 3.3:
Pour le processus Y^n l'équation (8) s'écrit:

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{n} w_n(t,x)} = P_t\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{n} f}\right](x) + \frac{1}{2}\mathbb{E}_x \int_0^t \left[1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{n} w_n(t-s, B_s)}\right]^2 n dA_s. \qquad (12)$$

On a en particulier

$$\exp - \frac{1}{n}\, w_n(t,x) \geq P_t\left[\exp - \frac{1}{n} f\right](x),$$

et en utilisant l'inégalité de Jensen, on obtient:

$$0 \leq w_n \leq \| P_t f \| \leq \| f \| .$$

On peut alors effectuer un développement limité à l'ordre $\frac{1}{n}$ de l'équation (12) car $a_T < \infty$. On obtient pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$,

$$w_n(t,x) = P_t f(x) - \frac{1}{2}\mathbb{E}_x \int_0^t w_n(t-s, B_s)^2 dA_s + E_n, \tag{13}$$

avec $|E_n| \leq \frac{c}{n} \| f \|^2 \left(1 + \frac{1}{n} \| f \|\right)$. Par différence dans (13), il vient pour tout entier $p > n$,

$$\begin{aligned}
&\| w_n - w_p \| \\
&\leq \sup_{x,t\in[0,T]} \frac{1}{2} \int_0^t ds \int \nu(dy) p(s, x-y) \left| w_n(t-s,y)^2 - w_p(t-s,y)^2 \right| + O(\frac{1}{n}) \\
&\leq \| f \| \, \| w_n - w_p \| \, a_T + O(\frac{1}{n}).
\end{aligned}$$

Comme $a_T \| f \| < 1$, on en déduit que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la convergence uniforme. On note w sa limite. Cette fonction est positive, mesurable, bornée par $\| f \|$, et par convergence dominée, elle est solution de (10).

Montrons que la fonction w est continue en la variable x sur $(0,T] \times \mathbb{R}^d$. En faisant la différence dans (10), on obtient pour tout $(t,x,x') \in (0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}
\left| w(t,x) - w(t,x') \right| &\leq \left| P_t f(x) - P_t f(x') \right| + \frac{1}{2} \int_0^t ds \int \nu(dy) \\
&\qquad \left| p(s, x-y) - p(s, x'-y) \right| w(t-s, y)^2 \\
&\leq \left| P_t f(x) - P_t f(x') \right| \\
&\quad + \frac{1}{2} \| f \|^2 \int_0^t ds \int \nu(dy) \left| p(s,x-y) - p(s,x'-y) \right| .
\end{aligned}$$

On utilise la majoration (4) pour le premier terme. On écrit l'intégrale de 0 à t dans le deuxième terme comme la somme des intégrales de 0 à ε et de ε

à t $(0 < \varepsilon \leq t \wedge 1)$ et en utilisant les majorations (3) et (2), on trouve:

$$\begin{aligned}
\left|w(t,x) - w(t,x')\right| &\leq c\,\|f\|\,\frac{1}{\sqrt{t}}\,|x-x'| + c\,\|f\|^2 \int_0^{\varepsilon} s^{\alpha-1}\,ds \\
&\qquad + c\,\|f\|^2 \int_{\varepsilon}^{t} ds\,(s \wedge 1)^{\alpha-3/2}\,|x-x'| \\
&\leq c\,\|f\|\,\frac{1}{\sqrt{t}}\,|x-x'| + c\,\|f\|^2\,\varepsilon^{\alpha} \\
&\qquad + c\,\|f\|^2 (t + \varepsilon^{-1/2})\,|x-x'|\,.
\end{aligned}$$

En prenant $\varepsilon := |x-x'| \wedge t \wedge 1$, on en déduit que w est uniformément continue en la variable x sur $[\delta, T] \times \mathbb{R}^d$, pour tout $\delta > 0$.

□

3.3 Notations et remarques

Suivant la terminologie de [1], on note $Z := (\Omega^Z, \mathcal{G}^Z, Z, \theta^Z, (\mathbb{P}_\mu^Z)_{\mu \in M_f})$ le processus de Markov limite du théorème 3.2: $\mathcal{G}_t^{0,Z}$ est la tribu de Ω^Z engendrée par $(Z_s, s \in [0,t])$, $\mathcal{G}^Z$ la tribu complétée de $\mathcal{G}^{0,Z} := \mathcal{G}_\infty^{0,Z}$ par rapport aux mesures $\mathbb{P}_{\bar\eta}^Z := \int \mathbb{P}_\mu^Z \bar\eta(d\mu)$ où $\bar\eta$ décrit l'ensemble des probabilités sur M_f et $\mathcal{G}_t^Z$ la tribu complétée de $\mathcal{G}_t^{0,Z}$ dans $\mathcal{G}^Z$ par rapport aux mesures $\mathbb{P}_{\bar\eta}^Z$.

Le théorème 3.2 montre que si $0 \leq s < t \leq T$ et $f \in C_{b+}(\mathbb{R}^d)$ vérifie $a_T\,\|f\| < 1$, alors

$$\mathbb{E}_\mu^Z \left(\exp -(Z_t, f) \mid \mathcal{G}_s^Z \right) = \exp -(Z_s, w(t-s)), \tag{14}$$

où la fonction w est l'unique solution positive mesurable de l'équation (10).

Il est facile de de voir que (14) reste vraie pour $f \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^d)$ (telle que $a_T\,\|f\| < 1$). On utilise le fait que la fermeture de $C_{b+}(\mathbb{R}^d)$ pour la convergence simple bornée est $\mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^d)$. De plus, si $(f_n, n \in \mathbb{N})$ est une suite de fonctions de $\mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^d)$ (telles que $a_T\,\|f_n\| < 1$) qui converge simplement vers f (telle que $a_T\,\|f\| < 1$) et si (14) est vraie pour chaque fonction f_n, on remarque que les fonctions w^n solutions de (10) associées à f_n, convergent simplement (parce que $w^n(t,x) = -\log \mathbb{E}_{\delta_x}^Z\,(\exp -(Z_t, f_n)))$ puis que leur limite w vérifie l'équation (10) associée à f. Le résultat annoncé en découle facilement.

4 Propriétés de continuité

Avant d'énoncer les propriétés de continuité du superprocessus Z construit dans la partie précédente, on montre la proposition suivante.

Proposition 4.1 *Pour toute mesure $\eta \in M_f$, pour tout $T > 0$, pour tout entier p, il existe une constante M_p telle que pour toute fonction φ bornée par 1, lipschitzienne et de constante de Lipschitz bornée par 1, pour tout $(s,t) \in [0,T]^2$, l'on ait:*

$$\mathbb{E}_\eta^Z \left[((Z_t,\varphi) - (Z_s,\varphi))^{2p} \right] \leq M_p \left| t-s \right|^{p\alpha}.$$

La démonstration de cette proposition repose sur plusieurs lemmes. Le lemme technique suivant joue un rôle crucial dans le calcul des moments du processus Z. On fixe $T > 0$.

Lemme 4.2 *Soit une fonction bornée $J \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ telle que $|J(r,x)| \leq [2a_T]^{-1}\,\mathbf{1}_{[0,T]}(r)$. On considère l'équation intégrale suivante:*

$$v(\lambda,r,x) + \frac{1}{2}\mathbb{E}_x \int_0^{T-r} v(\lambda, r+s, B_s)^2 dA_s = \lambda J(r,x), \quad r \in [0,T], \tag{15}$$

$$v(\lambda,r,x) = 0, \quad r > T.$$

Alors pour $|\lambda| < 1$, il existe une unique solution mesurable $v(\lambda)$ de (15) telle que $a_T \left\| v(\lambda) \right\| < 1$.

On définit la suite de fonctions mesurables $(c_n)_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ par la récurrence suivante:

$$c_1(r,x) := J(r,x), \tag{16}$$

et pour tout entier $n \geq 2$,

$$c_n(r,x) := -\frac{1}{2}\mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty \sum_{j=1}^{n-1} c_j(r+s,B_s) c_{n-j}(r+s,B_s) dA_s \right]. \tag{17}$$

La série $\sum \lambda^n c_n$ est normalement convergente pour $|\lambda| < 1$. De plus pour $|\lambda| < 1$, on a l'expression suivante de la solution $v(\lambda)$:

$$v(\lambda,r,x) = \sum_{n=1}^\infty \lambda^n c_n(r,x), \qquad (r,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d.$$

Remarque. Contrairement aux énoncés précédents, où on considérait des équations intégrales de la forme (10), on a ici des solutions de signe quelconque (la fonction v n'est pas nécessairement positive).
Preuve. La fonction $f(\lambda) := \frac{1}{a_T}[1-\sqrt{1-\lambda}]$ est développable en série entière de rayon 1. De plus, la fonction f est solution de

$$f^2 = \frac{1}{a_T}\left[2f - \frac{\lambda}{a_T}\right]. \tag{18}$$

Si on note β_n les coefficients du développement de f, on remarque que $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = \frac{1}{2a_T}$, et que la suite β_n vérifie la relation de récurrence suivante:

$$\beta_n = \frac{1}{2}a_T \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \beta_{n-j}, \quad n \geq 2.$$

Remarquons que $\| c_1 \| \leq \beta_1$ et $\| c_n \| \leq \frac{1}{2}a_T \sum_{j=1}^{n-1} \| c_j \| \| c_{n-j} \|$ pour $n \geq 2$. On a donc pour tout entier $n > 0$, $\| c_n \| \leq \beta_n$. Cela entraine que la série $v(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n c_n$ est normalement convergente pour $|\lambda| < 1$.

De plus on vérifie facilement que la fonction v ainsi définie est solution de (15) et que pour $|\lambda| < 1$, $a_T \| v(\lambda) \| < 1$. L'unicité de la solution de (15) telle que $a_T \| v(\lambda) \| < 1$ découle d'arguments semblables au début de la preuve du théorème 3.2.

□

On montre également le lemme suivant.

Lemme 4.3 *Soit un entier $m > 1$, et soient $0 \leq t_1 < \ldots < t_m \leq T$. Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ une famille de fonctions appartenant à $\mathcal{B}_{b^+}(\mathbb{R}^d)$ telle que $2a_T \sum_{i=1}^{m} \| \varphi_i \| \leq 1$. On a alors pour toute mesure $\eta \in M_f$, pour tout $\lambda \in [0,1)$,*

$$\mathbb{E}_\eta^Z \exp -\lambda \sum_{t_i \geq r} (Z_{t_i - r}, \varphi_i) = \exp -(\eta, v(\lambda, r)),$$

où $v(\lambda)$ est l'unique solution mesurable positive de l'équation intégrable (15) avec $J(r,x) := \mathbb{E}_x \sum_{t_i \geq r} \varphi_i(B_{t_i - r})$. De plus on a $a_T \| v(\lambda) \| < 1/2$.

Preuve. On fixe $\lambda \in [0,1)$. La démonstration (cf lemme 4.1 de [5]) se fait par récurrence sur m. Pour $m = 1$, on utilise le théorème 3.2, et on a $v(\lambda, r, x) := w(t_1 - r, x)\mathbf{1}_{[0,t_1]}(r)$ où w est l'unique solution positive de (10) avec $f = \lambda\varphi_1$. On remarque alors que $v(\lambda)$ est solution de (15) avec $J(r,x) := \mathbb{E}_x \varphi_1(B_{t_1 - r})\mathbf{1}_{[0,t_1]}(r)$. On sait de plus que w est borné par $\lambda \| \varphi_1 \|$ ce qui implique $a_T \| v(\lambda) \| < 1/2$.

On suppose le résultat vrai au rang m. On se donne $0 \leq t_1 < \ldots < t_{m+1} \leq T$. Pour $r > t_1$, on peut utiliser l'hypothèse de récurrence et il vient:

$$\mathbb{E}_\eta^Z \exp -\lambda \sum_{t_i \geq r} (Z_{t_i - r}, \varphi_i) = \mathbb{E}_\eta^Z \exp -\lambda \sum_{t_i \geq r,\, i>1} (Z_{t_i - r}, \varphi_i) = \exp -(\eta, \tilde{v}(\lambda, r)),$$

où $\tilde{v}(\lambda)$ est l'unique solution mesurable positive de l'équation:

$$\tilde{v}(\lambda, r, x) + \frac{1}{2}\mathbb{E}_x \int_0^\infty \tilde{v}(\lambda, r+s, B_s)^2 dA_s = \lambda \mathbb{E}_x \sum_{t_i \geq r, i>1} \varphi_i(B_{t_i - r})$$

(remarquons que $\| \tilde{v}(\lambda) \| < \sum_{i>1} \| \varphi_i \| \leq 1/2a_T$).

Ensuite pour $0 \leq r \leq t_1$, on peut appliquer la propriété de Markov du processus Z à l'instant $t_1 - r$. Le théorème 3.2 donne alors

$$\mathbb{E}_\eta^Z \, \mathrm{e}^{-\lambda \sum_{t_i \geq r} (Z_{t_i - r}, \varphi_i)} = \mathbb{E}_\eta^Z \, \mathrm{e}^{-\lambda (Z_{t_1 - r}, \varphi_1) - (Z_{t_1 - r}, \tilde{v}(\lambda, t_1))} = \mathrm{e}^{-(\eta, \hat{v}(\lambda, r))},$$

où $\hat{v}(\lambda, r, .) := w(t_1 - r, .)\mathbf{1}_{[0,t_1]}(r)$, la fonction w étant solution de (10) avec $f = \lambda\varphi_1 + \tilde{v}(\lambda, t_1)$ (noter que $2a_T \| f \| < 1$). On sait donc que $\hat{v}$ est l'unique solution positive pour $r \in [0, t_1]$ de

$$\hat{v}(\lambda, r, x) + \frac{1}{2}\mathbb{E}_x \int_0^\infty \hat{v}(\lambda, r+s, B_s)^2 dA_s = \mathbb{E}_x \left[\lambda\varphi_1(B_{t_1 - r}) + \tilde{v}(\lambda, t_1, B_{t_1 - r})\right].$$

Or on a pour $0 \leq r \leq t_1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x \tilde{v}(\lambda, t_1, B_{t_1 - r}) &= \lambda \mathbb{E}_x \mathbb{E}_{B_{t_1 - r}} \sum_{i>1} \varphi_i(B_{t_i - t_1}) \\
&\qquad - \frac{1}{2}\mathbb{E}_x \mathbb{E}_{B_{t_1 - r}} \int_0^\infty \tilde{v}(\lambda, t_1 + s, B_s)^2 dA_s \\
&= \lambda \mathbb{E}_x \sum_{i>1} \varphi_i(B_{t_i - r}) - \frac{1}{2}\mathbb{E}_x \int_{t_1 - r}^\infty \tilde{v}(\lambda, r+s, B_s)^2 dA_s,
\end{aligned}$$

ce qui reporté dans l'équation précédente donne pour $0 \leq r \leq t_1$:

$$\hat{v}(\lambda, r, x) + \frac{1}{2}\mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty \hat{v}(\lambda, r+s, B_s)^2 dA_s + \int_{t_1 - r}^\infty \tilde{v}(\lambda, r+u, B_u)^2 dA_u\right] = \lambda J(r, x).$$

De plus on a $\hat{v}(\lambda, r, x) = 0$ si $r > t_1$. On en déduit que la fonction $v(\lambda, r, x) := \tilde{v}(\lambda, r, x)\mathbf{1}_{(t_1,\infty)}(r) + \hat{v}(\lambda, r, x)\mathbf{1}_{[0,t_1]}(r)$ est solution de (15). On vérifie trivialement que $v(\lambda)$ est positive et que $a_T \| v(\lambda) \| < 1/2$. On démontre l'unicité comme dans la preuve du théorème 3.2.

□

Nous aurons également besoin du lemme élémentaire suivant:

Lemme 4.4 *Soit un entier $n \geq 1$, soit U une variable aléatoire réelle positive telle que l'on ait pour tout $\lambda > 0$ assez petit:*

$$\mathbb{E} \exp -\lambda U = \sum_{p=0}^{n} \lambda^p \alpha_p + O(\lambda^{n+1}).$$

Alors $U \in L^n(\Omega, \mathbb{P})$ et pour tout entier $p \leq n$, $\mathbb{E} U^p = p!(-1)^p \alpha_p$.

Avant de commencer la démonstration de la proposition 4.1, énonçons une conséquence importante des trois lemmes précédents:

Corollaire 4.5 *Soient deux entiers $p, m \geq 1$, soient des réels $0 \leq t_1 < \ldots < t_m \leq T$. Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ une famille de fonctions bornées appartenant à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Alors pour toute mesure $\eta \in M_f$, on a*

$$\mathbb{E}_\eta^Z \left\{ \left[\sum_{i=1}^{m} (Z_{t_i}, \varphi_i) \right]^p \right\} = p! \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k+p}}{k!} \sum_{n_1 + \cdots + n_k = p} \prod_{i=1}^{k} (\eta, c_{n_i}(0)), \tag{19}$$

où les fonctions c_n sont définies par les formules (16), (17) avec $J(r, x) := \mathbb{E}_x \left(\sum_{t_i \geq r} \varphi_i(B_{t_i - r}) \right)$.

Preuve. Supposons dans un premier temps que les fonctions φ_i sont positives et que $2 a_T \sum_{i=1}^{m} \| \varphi_i \| \leq 1$. D'après le lemme 4.3, pour $\lambda \in [0, 1)$, la fonction $v(\lambda, r, x) := -\log \mathbb{E}_{\delta_x}^Z \exp -\lambda \sum_{t_i \geq r} (Z_{t_i - r}, \varphi_i)$ est l'unique solution positive de l'équation intégrale (15) et $2 a_T \| v(\lambda) \| < 1$. On déduit alors du lemme 4.2 que cette fonction v s'écrit pour $\lambda \in [0, 1)$: $v(\lambda, r, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n c_n(r, x)$ où les fonctions c_n sont définies par les formules (16) et (17) avec $J(r, x) := \mathbb{E}_x \sum_{t_i \geq r} \varphi_i(B_{t_i - r})$.

Montrons que l'on a alors pour tout $r \geq 0$, pour tout $\lambda \in [0, 1)$:

$$\mathbb{E}_\eta^Z \, \mathrm{e}^{-\lambda \sum_{t_i \geq r} (Z_{t_i - r}, \varphi_i)} = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^p \left[\sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{n_1 + \cdots + n_k = p} \prod_{i=1}^{k} (\eta, c_{n_i}(r)) \right]. \tag{20}$$

Si $(\beta_n)_{n \geq 1}$ est la série introduite dans la preuve du lemme 4.2, la série

$$\sum_{p=1}^{\infty} \lambda^p \left[\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} \sum_{n_1 + \cdots + n_k = p} \prod_{i=1}^{k} [\beta_{n_i} (\eta, \mathbf{1})] \right]$$

converge pour $|\lambda| < 1$. En effet, toujours avec les notations de la preuve du lemme 4.2, on a pour $|\lambda| < 1$:

$$\begin{aligned} e^{f(\lambda)(\eta,\mathbf{1})} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \beta_n(\eta, \mathbf{1}) \right]^k \\ &= 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^p \left[\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=p} \prod_{i=1}^{k} [\beta_{n_i}(\eta, \mathbf{1})] \right]. \end{aligned}$$

On en déduit que la série

$$1 + \sum_{p=1}^{\infty} \lambda^p \left[\sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=p} \prod_{i=1}^{k} (\eta, c_{n_i}(r)) \right]$$

est absolument convergente si $|\lambda| < 1$. De plus le développement $v(\lambda, r, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n c_n(r, x)$ montre que pour tout $|\lambda| < 1$, la somme de cette série est égale à $\exp -(\eta, v(\lambda, r))$. On en déduit alors (20).

De (20) et du lemme 4.4, on déduit que pour tout entier p et pour tout $r \geq 0$, on a :

$$\mathbb{E}_{\eta}^{Z} \left\{ \left[\sum_{t_i \geq r} (Z_{t_i - r}, \varphi_i) \right]^p \right\} = p! \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k+p}}{k!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=p} \prod_{i=1}^{k} (\eta, c_{n_i}(r)). \tag{21}$$

Dans un deuxième temps, si les fonctions φ_i sont mesurables bornées quelconques, on note φ_i^+ et φ_i^- les parties respectivement positive et négative de φ_i. En posant $\varphi_i^\theta := \theta_i^+ \varphi_i^+ + \theta_i^- \varphi_i^-$, on remarque que les membres de droite et de gauche de (21) sont des polynômes en $(\theta_1^+, \theta_1^-, \ldots, \theta_m^+, \theta_m^-)$ qui coïncident sur l'ensemble $\left\{ \theta_i^\pm \geq 0, \sum_{i=1}^m \theta_i^+ \| \varphi_i^+ \| + \sum_{i=1}^m \theta_i^- \| \varphi_i^- \| \leq [2a_T]^{-1} \right\}$ d'intérieur non vide. Ils coïncident donc pour tous $\theta_i^\pm$, et entre autres pour $\theta_i^+ = -\theta_i^- = -1$. Cela termine la démonstration.

□

Remarques. La formule (19) donne immédiatement les moments à tout ordre de (Z_t, φ) pour $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ bornée. En particulier, si on note $\mathbb{E}_\eta := \int \eta(dx) \mathbb{E}_x$:

$$\mathbb{E}_{\eta}^{Z} [(Z_t, \varphi)] = \mathbb{E}_\eta (\varphi(B_t)), \tag{22}$$

$$\mathbb{E}_{\eta}^{Z} \left[(Z_t, \varphi)^2 \right] = [\mathbb{E}_\eta (\varphi(B_t))]^2 + \mathbb{E}_\eta \int_0^t [P_{t-s}\varphi(B_s)]^2 \, dA_s. \tag{23}$$

Preuve de la proposition 4.1.
En appliquant le corollaire précédent à $t_1 = t$, $t_2 = s$, $\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi$, on a pour tout entier p l'égalité:

$$\mathbb{E}_\eta^Z \left[((Z_t, \varphi) - (Z_s, \varphi))^p \right] = p! \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k+p}}{k!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=p} \prod_{i=1}^{k} (\eta, c_{n_i}(0)), \tag{24}$$

où les fonctions c_n vérifient la relation de récurrence (17) avec la condition initiale

$$c_1(r,x) := \mathbb{E}_x \left[\varphi(B_{t-r}) \mathbf{1}_{[0,t]}(r) - \varphi(B_{s-r}) \mathbf{1}_{[0,s]}(r) \right]. \tag{25}$$

Le lemme suivant nous permet de majorer les fonctions c_n. On rappelle que $\alpha \in (0,1)$ est le réel intervenant dans l'hypothèse (H) écrite pour ν.

Lemme 4.6 *On suppose $0 \leq t \leq s < T$, et on note $h := s - t$. Pour toute fonction bornée $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, les fonctions c_n définies par la relation de récurrence (17) et la condition initiale (25) vérifient la majoration: pour tout $n > 1$,*

$$|c_n(r,x)| \leq b_n \, \|\varphi\|^n \, h^{\frac{n\alpha}{2}} \mathbf{1}_{[0,t+h]}(r). \tag{26}$$

Les constantes b_n ne dépendent que de ν, T et n.

Preuve. La démonstration se fait par récurrence. Pour $n = 2$, on a

$$\begin{aligned} |c_2(r,x)| &= \frac{1}{2} \mathbb{E}_x \int_0^\infty c_1(r+u, B_u)^2 dA_u \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E}_x \int_0^\infty \left[(P_{t+h-r-u} - P_{t-r-u}) \, \varphi \right] (B_u)^2 \mathbf{1}_{[0,t)}(r+u) dA_u \\ &\qquad + \frac{1}{2} \mathbb{E}_x \int_0^\infty P_{t+h-r-u} \varphi(B_u)^2 \mathbf{1}_{[t,t+h]}(r+u) dA_u. \end{aligned}$$

Pour le second terme, en utilisant (6) et (2), il vient:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_x \int_0^\infty P_{t+h-r-u} \varphi(B_u)^2 \mathbf{1}_{[t,t+h]}(r+u) dA_u \\ &\qquad \leq c \, \|\varphi\|^2 \int_{(t-r)\vee 0}^{t+h-r} \frac{du}{(u \wedge 1)^{1-\alpha}} \mathbf{1}_{[0,t+h]}(r) \\ &\qquad \leq c \, \|\varphi\|^2 \; h^\alpha \mathbf{1}_{[0,t+h]}(r). \end{aligned}$$

On choisit $\varepsilon > 0$. Pour le premier terme, en utilisant (6) et (1) il vient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x \int_0^\infty \left[\left(P_{t+h-r-u} - P_{t-r-u} \right) \varphi \right] (B_u)^2 \mathbf{1}_{[0,t)}(r+u) dA_u \\
&\quad = \int_0^{t-r} du \int d\nu(y) p(u, x-y) \\
&\quad\quad \left[\int dz\, \varphi(z) \left(p(t-r+h-u, y-z) - p(t-r-u, y-z) \right) \right]^2 \mathbf{1}_{[0,t)}(r) \\
&\quad \leq c \, \| \varphi \|^2 \int_0^{t-r} du \int d\nu(y) p(u, x-y) \\
&\quad\quad \left[\int dz \int_{t-r-u}^{t-r+h-u} \frac{1}{v} \; p(v(1+\varepsilon), y-z) dv \right]^2 \mathbf{1}_{[0,t)}(r) \\
&\quad \leq c \, \| \varphi \|^2 \int_0^{t-r} du \int d\nu(y) p(u, x-y) \left(\ln \left[1 + \frac{h}{t-r-u} \right] \right)^2 \mathbf{1}_{[0,t)}(r).
\end{aligned}$$

Ensuite, comme pour tout $a > 0$, on a $\ln(1+a) \leq c\, a^{\alpha/2}$, il vient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_x \int_0^\infty \left[\left(P_{t+h-r-u} - P_{t-r-u} \right) \varphi \right] (B_u)^2 \mathbf{1}_{[0,t)}(r+u) dA_u \\
&\qquad \leq c \, \| \varphi \|^2 \int_0^{t-r} du \int d\nu(y) p(u, x-y) \left(\frac{h}{t-r-u} \right)^\alpha \\
&\qquad \leq c \, \| \varphi \|^2 \int_0^{t-r} \left(\frac{h}{t-r-u} \right)^\alpha \frac{du}{(u \wedge 1)^{1-\alpha}} \\
&\qquad = c \, \| \varphi \|^2 \, h^\alpha
\end{aligned}$$

en utilisant (2) une nouvelle fois. Donc on a

$$|c_2(r,x)| \leq c \, \| \varphi \|^2 \, h^\alpha \mathbf{1}_{[0,t+h]}(r),$$

ce qui donne (26) pour $n = 2$.

On suppose cette majoration vraie au rang $n \geq 2$ et on la montre au rang $n+1$:

$$\begin{aligned}
c_{n+1}(r,x) &= -\frac{1}{2} \mathbb{E}_x \int_0^\infty \sum_{p=1}^{n} c_p(r+u, B_u) c_{n+1-p}(r+u, B_u) dA_u \\
&= -\mathbb{E}_x \int_0^\infty c_1(r+u, B_u) c_n(r+u, B_u) dA_u \\
&\qquad - \frac{1}{2} \mathbb{E}_x \int_0^\infty \sum_{p=2}^{n-1} c_p(r+u, B_u) c_{n+1-p}(r+u, B_u) dA_u.
\end{aligned}$$

Pour le premier terme, en utilisant l'hypothèse de récurrence et un raisonnement similaire au précédent, il vient:

$$
\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}_x \int_0^\infty c_1(r+u,B_u)c_n(r+u,B_u)dA_u\right| \\
&\quad \le \mathbb{E}_x \int_0^\infty \left|\left(P_{t+h-r-u} - P_{t-r-u}\right)\varphi(B_u)\right| h^{\frac{n\alpha}{2}} \left\|\varphi\right\|^n b_n \mathbf{1}_{[0,t)}(r+u)dA_u \\
&\qquad + \mathbb{E}_x \int_0^\infty P_{t+h-r-u}\varphi(B_u) h^{\frac{n\alpha}{2}} \left\|\varphi\right\|^n b_n \mathbf{1}_{[t,t+h]}(r+u)dA_u \\
&\quad \le c\, h^{\frac{n\alpha}{2}} \left\|\varphi\right\|^{n+1} \mathbf{1}_{[0,t)}(r) \int_0^{t-r} \ln(1+\frac{h}{t-r-u})du \int d\nu(y)p(u,x-y) \\
&\qquad + h^{\frac{n\alpha}{2}} \left\|\varphi\right\|^{n+1} b_n \mathbf{1}_{[0,t+h]}(r)\mathbb{E}_x \int_{(t-r)\vee 0}^{(t+h-r)} dA_u \\
&\quad \le c\, h^{\frac{n\alpha}{2}} \left\|\varphi\right\|^{n+1} \mathbf{1}_{[0,t)}(r) \int_0^{t-r} \left(\frac{h}{t-r-u}\right)^\alpha \frac{du}{(u\wedge 1)^{1-\alpha}} \\
&\qquad + c\, h^{\frac{(n+1)\alpha}{2}} \left\|\varphi\right\|^{n+1} \mathbf{1}_{[0,t+h]}(r) \\
&\quad \le c\, h^{\frac{(n+1)\alpha}{2}} \left\|\varphi\right\|^{n+1} \mathbf{1}_{[0,t+h]}(r).
\end{aligned}
$$

Pour le second terme, en utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient:

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2}\mathbb{E}_x \int_0^\infty \sum_{p=2}^{n-1} c_p(r+u,B_u)c_{n+1-p}(r+u,B_u)dA_u\right| \\
&\qquad\qquad \le \frac{1}{2}\left\|\varphi\right\|^{n+1} \sum_{p=2}^{n-1} b_p b_{n-p+1} \mathbf{1}_{[0,t+h]}(r) h^{\frac{p\alpha}{2}} h^{\frac{(n-p+1)\alpha}{2}} \sup_x \mathbb{E}_x A_T \\
&\qquad\qquad \le c \left\|\varphi\right\|^{n+1} h^{\frac{(n+1)\alpha}{2}} \mathbf{1}_{[0,t+h]}(r).
\end{aligned}
$$

On obtient donc le résultat voulu à l'ordre $n+1$.

$\square$

Soit une fonction φ bornée par 1, lipschitzienne de constante de Lipschitz bornée par 1, alors on a $|c_1(0,x)| \le \mathbb{E}_x \left|\varphi(B_{t+h}) - \varphi(B_t)\right| \le c\,\sqrt{h}$. Comme $\alpha < 1$, on en déduit que pour tout entier $n \ge 1$, $|c_n(0,x)| \le b_n h^{\frac{p\alpha}{2}}$. En reportant cette inégalité dans la formule (24) on termine la démonstration de la proposition 4.1.

$\square$

Théorème 4.7 *Sous chaque probabilité $\mathbb{P}^Z_\eta$, $\eta \in M_f$, le processus Z possède une version continue.*

Preuve. On peut se limiter à $t \in [0,T]$, $T > 0$. On munit $\hat{\mathbb{R}}^d$, le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{R}^d$, d'une distance majorée sur $\mathbb{R}^d$ par la distance euclidienne. On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur $\hat{\mathbb{R}}^d$. Cet ensemble est dense dans $C(\hat{\mathbb{R}}^d)$ et séparable pour la convergence uniforme. Soit $\mathcal{L}_0$ un sous-ensemble dénombrable dense de $\mathcal{L}$ contenant $\mathbf{1}_{\hat{\mathbb{R}}^d}$. Si $\mathcal{L}_0 = \{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\}$, la formule

$$d(\mu, \mu') := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \left(\left|(\mu, \varphi_n) - (\mu', \varphi_n)\right| \wedge 1 \right)$$

définit une distance compatible avec la topologie de $M_f(\hat{\mathbb{R}}^d)$, et $M_f(\hat{\mathbb{R}}^d)$ est complet pour cette distance. D'après la proposition 4.1 et le critère de Kolmogorov, pour tout $\varphi \in \mathcal{L}_0$, le processus $((Z_t, \varphi), t \geq 0)$ possède une version continue. On note Δ_0 l'ensemble des nombres de la forme $k2^{-n}$ où k et n sont des entiers. On sait que p.s. pour tout $\varphi \in \mathcal{L}_0$, la fonction (Z_t, φ) est uniformément continue sur $[0,T] \bigcap \Delta_0$. On en déduit que p.s. l'application $t \mapsto Z_t$ à valeurs dans $M_f(\hat{\mathbb{R}}^d)$ est uniformément continue sur $[0,T] \bigcap \Delta_0$. Elle admet donc p.s. un unique prolongement continu sur $[0,T]$ que l'on note $X := (X_t, t \in [0,T])$.

Il reste à voir que p.s. pour tout $t \in [0,T]$, on a $(X_t, \mathbf{1}_{\{\infty\}}) = 0$. Soit une suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $C(\mathbb{R}^d)$ telles que $\mathbf{1}_{\{|x| \geq n+1\}} \leq g_n(x) \leq \mathbf{1}_{\{|x| \geq n\}}$, on montre alors le lemme suivant:

Lemme 4.8 *Soit T un réel positif. Pour toute mesure $\eta \in M_f(\mathbb{R}^d)$, pour tout $\varepsilon > 0$, on a:*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{p \geq 1} \sup_{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p \leq T} \mathbb{P}_\eta^Z \left(\sup_{i \in \{0, \ldots, p\}} (Z_{t_i}, g_n) \geq \varepsilon \right) = 0.$$

Preuve. Soit un entier $n \geq 1$. On note B_n la boule de $\mathbb{R}^d$ de centre 0 et de rayon n. Pour tout $s > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a $P_s \mathbf{1}_{B_n^c}(x) \geq \frac{1}{2} \mathbf{1}_{B_n^c}(x)$. On a donc, en utilisant la formule (22) pour les moments d'ordre 1 de Z, pour tous $t \in [0,T)$, $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\eta^Z & \left((Z_t, \mathbf{1}_{B_n^c}) \geq \varepsilon;\ (Z_T, \mathbf{1}_{B_n^c}) \mid \mathcal{G}_t^Z \right) \\
&= \mathbb{E}_\eta^Z \left((Z_t, \mathbf{1}_{B_n^c}) \geq \varepsilon;\ \mathbb{E}_{Z_t}^Z (Z_{T-t}, \mathbf{1}_{B_n^c}) \mid \mathcal{G}_t^Z \right) \\
&= \mathbb{E}_\eta^Z \left((Z_t, \mathbf{1}_{B_n^c}) \geq \varepsilon;\ (Z_t, P_{T-t} \mathbf{1}_{B_n^c}) \mid \mathcal{G}_t^Z \right) \\
&\geq \frac{1}{2} \mathbb{E}_\eta^Z \left((Z_t, \mathbf{1}_{B_n^c}) \geq \varepsilon;\ (Z_t, \mathbf{1}_{B_n^c}) \mid \mathcal{G}_t^Z \right) \\
&\geq \frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{1}_{(Z_t, \mathbf{1}_{B_n^c}) \geq \varepsilon}.
\end{aligned}$$

La même inégalité est triviale pour $t = T$. Donc on a aisément, en utilisant la propriété de Markov, pour tous entiers $n > 1$, $p \geq 1$, pour tous $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p \leq T$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}^Z_\eta\left(\sup_{i\in\{0,\ldots,\,p\}}(Z_{t_i}, g_{n-1}) \geq \varepsilon\right)\\
&\quad\leq \mathbb{P}^Z_\eta\left(\sup_{i\in\{0,\ldots,\,p\}}(Z_{t_i}, \mathbf{1}_{B_n^c}) \geq \varepsilon\right)\\
&\quad\leq \sum_{i=0}^{p}\mathbb{E}^Z_\eta\left(\sup_{j\in\{0,\ldots,\,i-1\}}(Z_{t_j}, \mathbf{1}_{B_n^c}) < \varepsilon;\ (Z_{t_i}, \mathbf{1}_{B_n^c}) \geq \varepsilon\right)\\
&\quad\leq \frac{2}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{p}\mathbb{E}^Z_\eta\left(\sup_{j\in\{0,\ldots,\,i-1\}}(Z_{t_j}, \mathbf{1}_{B_n^c}) < \varepsilon;\ (Z_{t_i}, \mathbf{1}_{B_n^c}) \geq \varepsilon;\ (Z_T, \mathbf{1}_{B_n^c})\right)\\
&\quad\leq \frac{2}{\varepsilon}\mathbb{E}^Z_\eta\left(\sup_{i\in\{0,\ldots,\,p\}}(Z_{t_i}, \mathbf{1}_{B_n^c}) \geq \varepsilon;\ (Z_T, \mathbf{1}_{B_n^c})\right)\\
&\quad\leq \frac{2}{\varepsilon}\mathbb{E}^Z_\eta\,(Z_T, \mathbf{1}_{B_n^c})\\
&\quad= \frac{2}{\varepsilon}(\eta, P_T\mathbf{1}_{B_n^c}).
\end{aligned}$$

Or par convergence dominée, on a:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\varepsilon}(\eta, P_T\mathbf{1}_{B_n^c}) = 0.$$

Cela termine la démonstration du lemme.

$\square$

Fin de la preuve du théorème 4.7. On a de plus

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]}(X_t, \mathbf{1}_{\{\infty\}}) &\leq \sup_{t\in[0,T]}(X_t, g_n)\\
&= \sup_{t\in[0,T]\cap\Delta_0}(X_t, g_n)\ \text{ p.s. par continuité}\\
&= \sup_{t\in[0,T]\cap\Delta_0}(Z_t, g_n)\ \text{ p.s.}
\end{aligned}$$

Or le lemme 4.8 entraîne que cette dernière quantité converge vers 0 en probabilité. On en déduit que p.s. $\sup_{t\in[0,T]}(X_t, \mathbf{1}_{\{\infty\}}) = 0$. Donc le processus X est à valeurs dans $M_f(\mathbb{R}^d)$, et est la version continue recherchée du processus Z.

$\square$

Par la suite on supposera toujours qu'on a remplacé Z par sa version continue. Grâce à un résultat de Perkins [12], on montre la proposition suivante:

Théorème 4.9 *Pour toute fonction bornée $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, p.s. le processus $((Z_t, \varphi), t > 0)$ est continu.*

Preuve. Rappelons sous forme de proposition le corollaire 2 de [12]:

Proposition 4.10 (Perkins) *Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, $(X_t)_{t\in[0,N]}$ un processus à valeurs dans $M_f(E)$. Soit C un sous-ensemble de $\mathcal{B}_1 := \left\{\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \|\varphi\| \leq 1\right\}$. Supposons qu'il existe des réels $p > 1$, $\delta > 0$, $c_0 > 0$ tel que*

$$\mathbb{E}\left(|(X_u, \varphi) - (X_t, \varphi)|^p\right) \leq c_0 \, |t-u|^{1+\delta} \quad \textit{pour tous} \quad u, t \in [0, N], \quad \varphi \in C,$$

et pour tout $\varphi \in C$, p.s. (X_t, φ) est continu sur $[0, N]$. Alors pour tout φ appartenant à la fermeture de C dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ pour la convergence simple bornée, et pour tout réel $0 < \eta < \frac{\delta}{p}$, il existe p.s. un réel $\rho(\varphi, \eta, \omega)$ tel que

$$|(X_u, \varphi) - (X_t, \varphi)| \leq \rho \, |u-t|^\eta \ \textit{ pour tous } u, t \in [0, N].$$

On utilise ensuite le lemme suivant:

Lemme 4.11 *Pour toute mesure $\eta \in M_f$, pour tout $T > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout entier p, il existe une constante M_p telle que pour toute fonction mesurable φ bornée par 1, pour tout $(s, t) \in [\varepsilon, T]^2$, l'on ait:*

$$\mathbb{E}_\eta^Z\left[((Z_t, \varphi) - (Z_s, \varphi))^{2p}\right] \leq M_p \, |t-s|^{p\alpha}.$$

Preuve. Reprenons les hypothèses et les notations du lemme 4.6. Grâce à ce lemme et à l'équation (24), il suffit de montrer que pour $0 < \varepsilon \leq t < s \leq T$, on a $|c_1(0, x)| \leq c \ h^{\frac{\alpha}{2}}$. En utilisant l'inégalité (1) et la majoration $\ln(1+a) \leq c a^{\alpha/2}$ vraie pour $a \geq 0$, on obtient:

$$|c_1(0, x)| = |(P_{t+h} - P_t)\varphi(x)| \leq c \, \|\varphi\| \ln(1 + \frac{h}{t}) \leq c \, \|\varphi\| \, h^{\alpha/2}$$

avec une constante dépendant uniquement de T et de ε, ce qui termine la démonstration du lemme.

□

On peut alors démontrer le théorème 4.9. La fermeture pour la convergence simple bornée de l'ensemble C_1 des fonctions continues à support compact, bornées par 1 est $\mathcal{B}_1$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute fonction $\varphi \in C_1$ le processus $((Z_t, \varphi), t \in [\varepsilon, T])$ est p.s. continu. Le lemme 4.11 permet d'appliquer la proposition 4.10 au processus $(Z_{\varepsilon+t}, t \in [0, T-\varepsilon])$ et d'en déduire le théorème 4.9.

□

Remarque. Il est clair qu'on ne peut pas en général avoir la continuité du processus (Z_t, φ) en $t = 0$ pour n'importe quelle fonction φ. En effet, sous $\mathbb{P}^Z_{\delta_x}$, si on choisit $\varphi := \mathbf{1}_{\{x\}}$, on a $(Z_0, \varphi) = 1$ alors que pour tout $t > 0$ p.s. $(Z_t, \varphi) = 0$ (cf la formule (22) pour les moments d'ordre 1 de Z).

5 Des mesures aléatoires associées à Z

Notre objectif dans cette partie est de construire certaines mesures aléatoires associées au superprocessus Z. Soit ρ une mesure positive σ-finie sur $\mathbb{R}^d$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on note $V_\rho(\varepsilon)$ la mesure aléatoire sur $[0,\infty)\times\mathbb{R}^d$ définie par:

$$\int V_\rho(\varepsilon)(ds, dy)\varphi(s, y) = \int_0^\infty ds \int \rho(dy) \int Z_s(dz) p(\varepsilon, z-y)\varphi(s, y),$$

où $\varphi \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d)$. Remarquons que la fonction $(\varepsilon, s, y) \mapsto (Z_s, p(\varepsilon, .-y))$ est p.s. continue sur $(0,\infty)\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d$. On en déduit que p.s. pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d)$ à support compact, l'application $\varepsilon \mapsto (V_\rho(\varepsilon), \varphi)$ est continue. On désire étudier la limite quand $\varepsilon \to 0$ de $V_\rho(\varepsilon)$. Intuitivement cette limite vaut "$z(s, y)ds\rho(dy)$" où "$z(s, y)$" serait la densité de la mesure $Z_s(dy)$ par rapport à la mesure de Lebesgue, si cette densité existait.

En fait, si on note H_b^T l'ensemble des fonctions bornées de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d)$ à support dans $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ et $H_b := \bigcup_{T>0} H_b^T$, on a la proposition suivante:

Proposition 5.1 *Supposons que la mesure ρ vérifie (H). Alors il existe une variable aléatoire notée Γ_ρ définie sur $(\Omega^Z, \mathcal{G}^Z)$ à valeurs dans l'ensemble des mesures positives sur $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d$ telle que p.s. pour tout $T > 0$,*

$$(\Gamma_\rho, \mathbf{1}_{[0,T]\times\mathbb{R}^d}) < \infty \tag{27}$$

et telle que pour toute fonction $\varphi \in H_b$, on a p.s.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(V_\rho(\varepsilon), \varphi) = (\Gamma_\rho, \varphi).$$

Le processus $(\int_0^t \Gamma_\rho(ds,dy)\varphi(s,y), t \geq 0)$ *est adapté à la filtration* $(\mathcal{G}_t^Z)_{t\geq 0}$. *Il est p.s. continu et on a:*

$$\mathbb{E}_\eta^Z \int_0^t \Gamma_\rho(ds,dy)\varphi(s,y) = \int \eta(dx) \int_0^t ds \int \rho(dy) p(s,y-x)\varphi(s,y). \qquad (28)$$

La formule (28) montre en particulier que la mesure $\Gamma_\rho(ds,dy)$ est p.s. portée par $\mathbb{R}^+ \times \operatorname{supp} \rho$.

On fixe ρ vérifiant (H) avec un coefficient $\beta \in (0,1)$. La démonstration de la proposition repose sur le lemme suivant:

Lemme 5.2 *Pour toute mesure* $\eta \in M_f$, *pour tout entier* p, *pour tout réel* $T > 0$, *il existe une constante* M_p *telle que pour toute fonction* $\varphi \in H_b^T$, *pour tous* ε, $\varepsilon' > 0$, *pour tous* $t, t' \in [0,T]$, *on a*

$$\mathbb{E}_\eta^Z \left[\left[(V_\rho(\varepsilon),\varphi) - (V_\rho(\varepsilon'),\varphi) \right]^{2p} \right] \leq M_p \left\| \varphi \right\|^{2p} \left| \varepsilon - \varepsilon' \right|^{2p\beta}, \qquad (29)$$

$$\mathbb{E}_\eta^Z \left[(V_\rho(\varepsilon), \varphi \mathbf{1}_{[t,t']})^{2p} \right] \leq M_p \left\| \varphi \right\|^{2p} \left| t - t' \right|^{2p\beta}. \qquad (30)$$

Preuve du lemme 5.2. La démonstration est en deux étapes. On établit dans une premiere étape une formule de moment pour les mesures aléatoires $V_\rho(\varepsilon)$.

Soient $T > 0$, $\varepsilon > 0$, et $\varphi \in H_b^T$. On suppose dans un premier temps que la fonction $\varphi(s,y)$ est continue en la variable s uniformément sur $\mathbb{R}^d$. A l'aide de (2) et (3), on en déduit que l'application

$$(s,x) \mapsto f_\varepsilon(s,x) := \int \varphi(s,y) p(\varepsilon, x-y) \rho(dy)$$

est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. Donc grâce au théorème 4.7, p.s. le processus $((Z_s, f_\varepsilon(s)), s \geq 0)$ est continu. De plus ce processus est nul pour $s \geq T$.

Soit $\tau = (0 = t_0, \ldots, t_l = T)$ une subdivision de $[0,T]$, on note $U(\tau) := \sum_{i=1}^l (t_i - t_{i-1})(Z_{t_i}, f_\varepsilon(t_i))$. Une application directe du corollaire 4.5 donne pour tout entier $p > 0$:

$$\mathbb{E}_\eta^Z \left[U(\tau)^p \right] = p! \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k+p}}{k!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=p} \prod_{i=1}^k (\eta, c_{n_i}^\tau(0)), \qquad (31)$$

où les fonctions c_n^τ sont définies par la récurrence (17) avec la condition initiale $c_1^\tau(r,x) := \mathbb{E}_x \sum_{i=1}^l (t_i - t_{i-1}) \mathbf{1}_{t_i \geq r} f_\varepsilon(t_i, B_{t_i - r})$. Notons que $\sup_\tau \left\| c_1^\tau \right\| < \infty$. On en déduit que pour tout entier p,

$$\sup_\tau \mathbb{E}_\eta^Z \left[U(\tau)^{2p} \right] < \infty.$$

La famille $U(\tau)^p$ où τ décrit l'ensemble des subdivisions de $[0,T]$ est donc uniformément intégrable.

Par un argument de continuité, pour toute suite de subdivisions finies τ^m de $[0,T]$ dont le pas tend vers 0, on a p.s.

$$\lim_{m\to\infty} U(\tau^m) = \int_0^\infty (Z_s, f_\varepsilon(s))\, ds.$$

De plus il est clair que quand $m\to\infty$, la fonction $c_1^{\tau^m}$ converge vers

$$J_\varepsilon(r,x) := \mathbb{E}_x \int_0^\infty ds\ f_\varepsilon(s+r, B_s) = \int_0^\infty ds \int \rho(dy) p(\varepsilon+s, x-y)\varphi(s+r,y).$$

Il en découle facilement que pour tout $n\geq 1$ les fonctions $c_n^{\tau^m}$ convergent simplement vers les fonctions c_n, définies par la récurrence (17) et la condition initiale $c_1(r,x) = J_\varepsilon(r,x)$. Par passage à la limite dans (31), on obtient

$$\mathbb{E}_\eta^Z (V_\rho(\varepsilon),\varphi)^p = p! \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k+p}}{k!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=p} \prod_{i=1}^k (\eta, c_{n_i}(0)). \tag{32}$$

Par un argument de classe monotone, l'égalité ci-dessus est vraie pour toute fonction $\varphi\in H_b$.

Ce résultat se généralise facilement à une famille finie de fonctions et de mesures. Soit un entier n, soient des mesures $\rho_1,\ldots,\rho_n$ vérifiant l'hypothèse (H), soient des fonctions $\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in H_b$, soient des réels $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ strictement positifs, on a pour tout entier p:

$$\mathbb{E}_\eta^Z\left[\left[\sum_{i=1}^n (V_{\rho_i}(\varepsilon_i),\varphi_i)\right]^p\right] = p! \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k+p}}{k!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=p} \prod_{i=1}^k (\eta, c_{n_i}(0)). \tag{33}$$

où les fonctions c_n sont définies par la récurrence (17) avec la condition initiale $c_1(r,x) := \sum_{i=1}^n \int_0^\infty ds \int \rho_i(dy) p(\varepsilon_i+s, x-y)\varphi_i(s+r,y)$.

Dans une deuxième étape, on utilise cette dernière formule pour démontrer les majorations (29) et (30). Soit $T>0$ fixé. Soit une fonction $\varphi\in H_b^T$. On conserve la notation $J_\varepsilon(r,x) := \int_0^\infty ds\int\rho(dy)\varphi(s+r,y)p(\varepsilon+s,x-y)$. Remarquons qu'en utilisant successivement les majorations (1) et (2), il vient pour $\varepsilon,\varepsilon'\in(0,1]$:

$$\begin{aligned} |J_\varepsilon(r,x) - J_{\varepsilon'}(r,x)| &\leq c\,\|\varphi\| \int_0^{T-r} ds \int_{[s+\varepsilon, s+\varepsilon']} \frac{du}{u^{2-\beta}} \\ &\leq c\,\|\varphi\|\, \mathbf{1}_{[0,T]}(r)\, |\varepsilon-\varepsilon'|^\beta, \end{aligned} \tag{34}$$

où on a utilisé $u \wedge 1 \geq cu$ pour $u \in [0, T+1]$.

Nous appliquons alors (33) avec $\varphi_1 = -\varphi_2 = \varphi$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = \varepsilon'$ et $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Remarquons que dans ce cas $c_1 = J_\varepsilon - J'_\varepsilon$ et donc d'après le calcul précédent, $|c_1(r,x)| \leq c\,\|\varphi\|\,\mathbf{1}_{[0,T]}(r)\,|\varepsilon - \varepsilon'|^\beta$. Une récurrence simple montre que $|c_n(r,x)| \leq c\,\|\varphi\|^n\,\mathbf{1}_{[0,T]}(r)\,|\varepsilon - \varepsilon'|^{n\beta}$. La majoration (29) découle alors de (33).

Pour la majoration (30), à l'aide des arguments ci-dessus, on remarque qu'il suffit de montrer que

$$c_1(r,x) := \int_0^\infty ds \int \rho(dy)\varphi(s+r,y)\mathbf{1}_{[t,t']}(r+s)p(\varepsilon+s, x-y)$$

est majoré par $c\,\|\varphi\|\,\mathbf{1}_{[0,T]}(r)\,|t-t'|^\beta$. Or cette dernière majoration est une simple application de (2).

□

Preuve de la proposition 5.1. Pour toute fonction $\varphi \in H_b$, on pose

$$\Gamma'_\rho(\varphi) := \liminf_{\varepsilon \to 0} (V_\rho(\varepsilon), \varphi).$$

On a vu au début de cette partie que p.s. pour toute fonction $\varphi \in H_b$, l'application $\varepsilon \mapsto (V_\rho(\varepsilon), \varphi)$ est continue sur $(0, \infty)$. Le lemme de Kolmogorov et la majoration (29) montrent que cette application admet une limite à droite en 0. En particulier, pour tout $\varphi \in H_b$, p.s., $\liminf_{\varepsilon\to 0}(V_\rho(\varepsilon),\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0}(V_\rho(\varepsilon), \varphi)$.

On désire ensuite obtenir une formule pour les moments de Γ'_ρ. Pour cela, on part de la formule (32), avec $\varphi \in H_b$. On conserve les notations introduites dans la preuve du lemme précédent. Remarquons que les arguments de la démonstration de (34) entrainent la convergence de $J_\varepsilon(r,x)$ vers $\int_0^\infty ds \int \rho(dy)\varphi(s+r,y)p(s,x-y)$ pour la convergence simple bornée. La définition des fonctions c_n montre alors que le terme de droite de (32) converge quand $\varepsilon \to 0$. De plus d'après (29), $(V_\rho(\varepsilon),\varphi)$ converge vers $\Gamma'_\rho(\varphi)$ dans $L^p(\mathbb{P}^Z_\eta)$ pour tout entier p. Par passage à la limite dans (32), on obtient alors une formule pour les moments de Γ'_ρ:

$$\mathbb{E}^Z_\eta\left[\Gamma'_\rho(\varphi)^p\right] = p! \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k+p}}{k!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=p} \prod_{i=1}^k (\eta, c_{n_i}(0))$$

où les fonctions c_n sont définies par la formule (17) avec la condition initiale $c_1(r,x) := \int_0^\infty ds \int \rho(dy)p(s,x-y)\varphi(s+r,y)$. On remarque alors grâce à (2) que pour toute fonction $\varphi \in H_b$, on a $\mathbb{E}^Z_\eta \Gamma'_\rho(|\varphi|) < \infty$.

Montrons qu'il existe une variable aléatoire Γ_ρ à valeurs dans l'espace des mesures positives sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ telle que pour toute fonction $\varphi \in H_b$, p.s. $(\Gamma_\rho, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0}(V_\rho(\varepsilon), \varphi)$.

On voit immédiatement que Γ'_ρ est p.s. linéaire (i.e. pour tous réels a, b, pour toutes fonctions $\varphi, \phi \in H_b$, on a p.s. $\Gamma'_\rho(a\varphi + b\phi) = a\Gamma'_\rho(\varphi) + b\Gamma'_\rho(\phi)$), p.s. positive (i.e. si $\varphi \in H_b$ est positive alors p.s. $\Gamma'_\rho(\varphi) \geq 0$) et p.s. finie sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ pour tout $T < \infty$. Soit $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions positives de H_b^T qui converge simplement vers $\varphi_\infty \in H_b^T$. A l'aide de la formule pour les moments de Γ'_ρ (avec $\varphi = \varphi_\infty - \varphi_m$), et d'un argument de convergence dominée, il est aisé de vérifier que $\Gamma'_\rho(\varphi_m)$ converge dans $L^p(\mathbb{P}_\eta^Z)$ vers $\Gamma'_\rho(\varphi_\infty)$. Or la suite $\Gamma'_\rho(\varphi_m)$ est p.s. croissante et majorée par $\Gamma'_\rho(\varphi_\infty)$, on en déduit qu'elle converge p.s. vers $\Gamma'_\rho(\varphi_\infty)$.

On utilise alors un résultat sur l'existence de noyaux qui découle facilement de la proposition 4.1 de [8]. Soient E un espace lusinien, $(\Omega, \mathcal{G})$ un espace mesurable et $(\mathbb{P}_i)_{i \in I}$ une famille de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{G})$. Dans l'énoncé suivant, p.s. signifie $\mathbb{P}_i$-p.s. pour tout $i \in I$. Soit Λ une application définie sur $\{f \in \mathcal{B}(E), \|f\| < \infty\} \times \Omega$ à valeurs dans $\hat{\mathbb{R}}$, telle que pour toute $f \in \mathcal{B}(E)$ bornée, $\Lambda(f)$ est $\mathcal{G}$-mesurable.

Lemme 5.3 *On suppose que Λ est p.s. finie, linéaire positive et que pour toute suite croissante $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$, $f_m \in \mathcal{B}_{b+}(E)$, qui converge vers $f \in \mathcal{B}_{b+}(E)$, on a p.s. $\Lambda(f_m) \uparrow \Lambda(f)$.*

Alors il existe un noyau fini K de $(\Omega, \mathcal{G})$ sur $(E, \mathcal{B}(E))$ tel que pour toute fonction bornée $f \in \mathcal{B}(E)$, on a p.s. $K(f) = \Lambda(f)$.

On applique le lemme en prenant $(\Omega, \mathcal{G}, (\mathbb{P}_i)_{i \in I}) = (\Omega^Z, \mathcal{G}^Z, (\mathbb{P}_\eta^Z)_{\eta \in M_f})$, pour tout entier n, $E_n := [n, n+1) \times \mathbb{R}^d$, et pour tout $f \in \mathcal{B}(E_n)$, la variable aléatoire $\Lambda_n(f) := \Gamma'_\rho(f)$. Pour tout entier n, Λ_n vérifie les hypothèses du lemme ci-dessus. Donc il existe un noyau K_n de $(\Omega^Z, \mathcal{G}^Z)$ sur $(E_n, \mathcal{B}(E_n))$ tel que p.s. $K_n(f) = \Lambda_n(f)$. On peut alors considérer le noyau Γ_ρ de $(\Omega^Z, \mathcal{G}^Z)$ sur $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d))$ défini par:

$$\Gamma_\rho(\varphi) := \sum_{n \in \mathbb{N}} K_n(\varphi \mathbf{1}_{[n,n+1) \times \mathbb{R}^d}).$$

Comme Γ'_ρ est p.s. linéaire, on a pour tout $\varphi \in H_b$, p.s. $\Gamma_\rho(\varphi) = \Gamma'_\rho(\varphi)$. On a donc obtenu la première partie de la proposition. La formule (28) découle des formules ci-dessus pour les moments de Γ'_ρ.

Enfin remarquons que pour toute fonction $\varphi \in H_b$, on a la convergence p.s. de $(V_\rho(\varepsilon), \varphi \mathbf{1}_{[0,t]})$ vers $(\Gamma_\rho, \varphi \mathbf{1}_{[0,t]})$. Donc il est clair que le processus

$(\int_0^t \Gamma_\rho(ds,dy)\varphi(s,y), t \geq 0)$ est adapté à la filtration $(\mathcal{G}_t^Z)_{t\geq 0}$. De plus à l'aide du lemme de Fatou et de l'inégalité (30), on a pour tout entier p

$$\mathbb{E}_\eta^Z\left[\left[\int \Gamma_\rho(ds,dy)\varphi(s,y)\mathbf{1}_{[t,t']}(s)\right]^{2p}\right] \leq M_p \, \|\varphi\|^{2p} \, |t-t'|^{2p\beta}.$$

Comme le processus $(\int_0^t \Gamma_\rho(ds,dy)\,|\varphi(s,y)|, t \geq 0)$ est croissant, on déduit de l'inégalité précédente et du lemme de Kolmogorov, que ce processus est p.s. continu.

□

6 Le temps local associé à D

On rappelle que l'on note $D = \operatorname{supp} \nu$ et D^r l'ensemble des points de $\mathbb{R}^d$ réguliers pour D pour le mouvement brownien. On introduit maintenant les éléments nécessaires à la démonstration des théorèmes de représentation du super-mouvement brownien avec catalyse. On rappelle d'abord les résultats de [10] concernant le temps local de D^r et les formules d'excursions. On étudie ensuite un cas particulier utile pour les formules de représentation.

Le temps local associé à D

On pose $M := \{t > 0, B_t \in D^r\}$. Comme l'ensemble $D \backslash D^r$ est polaire (cf [13]), on a p.s. $M = \{t > 0, B_t \in D\}$. L'ensemble aléatoire M est p.s. un fermé de $(0,\infty)$. Le processus $\mathbf{1}_D(B_t)$ étant optionnel, l'ensemble M l'est aussi. Il est de plus homogène en temps i.e. pour tout $t \geq 0$,

$$(M-t)\cap(0,\infty) = \{s > 0, B_s \circ \theta_t \in D\} = M \circ \theta_t.$$

On utilise les notations classiques suivantes (cf [10]):

$$\begin{array}{rcl} R & := & T_D = \inf\{s > 0, s \in M\}; \\ R_t & := & R \circ \theta_t; \\ G & := & \{t > 0, R_{t-} = 0,\ R_t > 0\}. \end{array}$$

L'ensemble G est l'ensemble des extrémités gauches dans $(0,\infty)$ des intervalles contigus à M. L'ensemble G est p.s. dénombrable et p.s. $G \subset M$. Comme D^r est régulier pour lui même, p.s. M ne possède pas de points isolés.

D'après [10], il existe une unique fonctionnelle additive continue L de B telle que

$$\mathbb{E}_x\left[\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\, dL_t\right] = \mathbb{E}_x[\mathrm{e}^{-R}]. \tag{35}$$

On a p.s. $(\mathrm{supp}\ dL_t)\bigcap(0,\infty) = \{t > 0, B_t \in D^r\} = M$. Au sens de [1], le support de la fonctionnelle additive L est D^r. On dit que la fonctionnelle additive est le temps local de M ou le temps local de D^r.

La formule d'excursion

On note ω_δ la fonction constante égale à δ sur $\mathbb{R}^+$. Rappelons que l'on s'est placé sur l'espace canonique $\Omega = \mathbb{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d\bigcup\{\delta\})$. On définit la fonction i_s de Ω dans Ω pour tout $s \geq 0$ par:

$$\begin{aligned} i_s(\omega)(t) &= \omega(t+s) \quad \text{si} \quad 0 \leq t < R_s \\ i_s(\omega)(t) &= \delta \quad \text{si} \quad t \geq R_s. \end{aligned}$$

On note $\mathcal{F}^0 := \sigma(B_s, s \in \mathbb{R}^+)$. Le résultat suivant est un cas particulier de la proposition 9.2 de [10].

Proposition 6.1 (Maisonneuve) *Il existe une famille universellement mesurable de mesures σ-finies sur $(\Omega, \mathcal{F}^0)$, $(H^x)_{x\in D^r}$, telle que pour tout processus Z prévisible positif, et pour toute fonction $f \in \mathcal{F}^0$ positive vérifiant $f(\omega_\delta) = 0$, on a*

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{s\in G} Z_s f\circ i_s\right] = \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\infty} Z_s H^{B_s}(f) dL_s\right].$$

Par des arguments classiques de classe monotone, on généralise cette égalité à une fonction positive $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)\otimes\mathcal{F}^0$.

Lemme 6.2 *Avec les notations de la proposition précédente, pour tout processus Z prévisible positif et pour toute fonction positive $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)\otimes\mathcal{F}^0$ vérifiant $f(.,\omega_\delta) = 0$, on a la relation*

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{s\in G} Z_s f(s,.)\circ i_s\right] = \mathbb{E}_x\left[\int_0^{\infty} Z_s H^{B_s}(f(s,.)) dL_s\right].$$

Un cas particulier

Donnons un exemple utile pour la suite: soit une fonction positive $\phi \in \mathcal{F}^0$ telle que $\phi(\omega_\delta) = 0$, et soit t un réel positif fixé. On pose pour tout réel s positif et pour tout $\omega \in \Omega$, $f(s,\omega) := \phi \circ i_{t-s}(\omega)\mathbf{1}_{[0,t)}(s)$. Remarquons que la fonction positive $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F}^0$. On peut alors calculer:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x\left[\sum_{s\in G} Z_s f(s,.)\circ i_s\right] &= \mathbb{E}_x\left[\sum_{s\in G} Z_s \mathbf{1}_{s<t}\phi\circ i_{t-s}\circ i_s\right] \\ &= \mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{\{R<t,\, t\notin M\}} Z_{g_t}\phi\circ i_t\right],\end{aligned}$$

où $g_t := \sup\{s < t, s \in M\}$ (la condition $\{R < t, t \notin M\}$ est équivalente à $0 < g_t < t$). En prenant $Z := 1$ et $\phi(\omega) := \varphi(\omega(0))$ où $\varphi \in \mathcal{B}_+(\mathbb{R}^d)$, et en utilisant le lemme 6.2, on trouve:

$$\mathbb{E}_x \int_0^\infty 1_{s<t}\, H^{B_s}(\varphi(\omega(t-s)))dL_s = \mathbb{E}_x\left[\varphi(B_t)\mathbf{1}_{t>T_D}\mathbf{1}_{B_t\in D^c}\right]. \tag{36}$$

7 Formules de représentation

Dans ce paragraphe et le suivant, on fait l'hypothèse suivante (H'): *La mesure de Revuz notée μ associée au temps local L vérifie la condition d'intégrabilité (H).* Rappelons (cf (6)) que L et μ sont liés par la relation: pour tout $\varphi \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$,

$$\mathbb{E}_\eta \int_0^\infty \varphi(s,B_s)dL_s = \int \eta(dx)\int_0^\infty ds \int \mu(dy)p(s,x-y)\varphi(s,y). \tag{37}$$

La condition (H') est automatiquement vérifiée lorsque $d = 1$. En dimension supérieure, nous montrons en appendice que la condition (H') est vérifiée dès que D satisfait une hypothèse de régularité assez faible. En général, on sait seulement que $\int_{B(x,1)} |x-y|^{-d+2}\,\mu(dy)$ (resp. $\int \log_+\left(|x-y|^{-1}\right)\mu(dy)$) est uniformément borné sur $\mathbb{R}^d$ si $d \geq 3$ (resp. $d = 2$), ce qui est légèrement moins fort que l'hypothèse (H) sur μ.

On note Q_t le semigroupe de transition du mouvement brownien tué sur D: pour tous $\varphi \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^d)$, $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$,

$$Q_t\varphi(x) := \mathbb{E}_x\left[\varphi(B_t)\mathbf{1}_{\{t<T_D\}}\right].$$

Enfin pour toute mesure $\eta \in M_f$, on note ηQ_t la mesure sur $\mathbb{R}^d$ définie par $(\eta Q_t, \varphi) := (\eta, Q_t\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^d)$.

Pour tout réel $t > 0$, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^d)$, on considère la fonction:

$$\gamma_t^{\varphi}(s,x) := \mathbf{1}_{s<t} H^x[\phi \circ i_{t-s}]\mathbf{1}_D(x), \quad (s,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d,$$

où pour tout $\omega \in \Omega$, $\phi(\omega) := \varphi(\omega(0))\mathbf{1}_{D^c}(\omega(0))$. On a déjà remarqué que l'application $(s,\omega) \mapsto \phi \circ i_{t-s}(\omega)$ est $\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \otimes \mathcal{F}^0$-mesurable. Comme (H^x) est une famille universellement mesurable, la fonction γ_t^{φ} est $\mathcal{B}^*(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$-mesurable. De plus elle est à support dans $[0,t] \times \mathbb{R}^d$.

Grâce à l'hypothèse (H'), il est possible de considérer la mesure aléatoire Γ_ρ construite dans la proposition 5.1 pour $\rho = \mu$. Il existe un unique prolongement de Γ_μ à $\mathcal{B}^*(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ que l'on continue de noter Γ_μ. On introduit pour tout $t > 0$ la mesure aléatoire Θ_t définie pour tout $\varphi \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^d)$ par

$$(\Theta_t, \varphi) := (\Gamma_\mu, \gamma_t^{\varphi}) = \int \Gamma_\mu(ds,dy)\mathbf{1}_{s<t} H^y(\varphi(\omega(t-s))). \tag{38}$$

On vérifie facilement que le processus $\Theta = (\Theta_t, t > 0)$ est à valeurs dans M_f. En effet, pour $\varphi \in \mathcal{B}_{b+}(\mathbb{R}^d)$, on a en utilisant successivement (28), (37), et (36):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\eta^Z(\Theta_t, \varphi) &= \mathbb{E}_\eta^Z(\Gamma_\mu, \gamma_t^{\varphi}) \\
&= \int \eta(dx) \int_0^{+\infty} ds \int \mu(dy) p(s, x-y) \gamma_t^{\varphi}(s,y) \\
&= \mathbb{E}_\eta \int_0^{+\infty} dL_s H^{B_s}\left[\varphi(\omega(t-s))\right] \mathbf{1}_{t>s} \\
&= \mathbb{E}_\eta \left[\varphi(B_t)\mathbf{1}_{\{t>T_D,\, B_t \in D^c\}}\right].
\end{aligned}$$

Remarquons que supp $\Theta_t \subset D^c$.

Le théorème suivant fournit une représentation de la mesure Z_t sur le complémentaire de D. Cette représentation fait intervenir deux termes. L'un, ηQ_t, correspond intuitivement aux "particules" qui n'ont pas visité l'ensemble de catalyse entre les instants 0 et t. L'autre, Θ_t, rend compte au contraire des particules "libérées" par l'ensemble de catalyse.

Théorème 7.1 *Pour toute mesure $\eta \in M_f$, $\mathbb{P}_\eta^Z$-p.s., on a pour tout $t > 0$,*

$$\mathbf{1}_{D^c}.Z_t = \Theta_t + \eta Q_t.$$

Preuve. Soit un réel $t > 0$ fixé. Il est facile de généraliser la formule (33) de la manière suivante: pour tout entier p, pour $\varepsilon > 0$, pour toutes fonctions bornées $f \in H_b$, $\psi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\mathbb{E}_\eta^Z\left[[(V_\mu(\varepsilon), f) + (Z_t, \psi)]^p\right] = p! \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k+p}}{k!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=p} \prod_{i=1}^{k} (\eta, c_{n_i}(0)),$$

où les fonctions c_n sont définies par la récurrence (17) et la condition initiale

$$c_1(r,x) = \int_0^\infty ds \int \mu(dy) p(\varepsilon + s, y - x) f(r+s, y) + \mathbf{1}_{[0,t]}(r) \mathbb{E}_x \psi(B_{t-r}).$$

En utilisant les arguments de la preuve de la proposition 5.1, on obtient par passage à la limite:

$$\mathbb{E}_\eta^Z\left[[(\Gamma_\mu, f) + (Z_t, \psi)]^p\right] = p! \sum_{k=1}^{p} \frac{(-1)^{k+p}}{k!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=p} \prod_{i=1}^{k} (\eta, c_{n_i}(0)), \qquad (39)$$

où les fonctions c_n sont définies par la récurrence (17) et la condition initiale:

$$c_1(r,x) = \int_0^\infty ds \int \mu(dy) p(s, y - x) f(r+s, y) + \mathbf{1}_{[0,t]}(r) \mathbb{E}_x \psi(B_{t-r}).$$

Remarquons alors que par des arguments de convergence dominée et d'uniforme intégrabilité, le résultat s'étend aux fonctions $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ telles que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d, r \in \mathbb{R}^+} \int_0^\infty ds \int \mu(dy) p(s, y-x) \, |f(r+s, y)| < \infty \qquad (40)$$

(cette condition assure que les fonctions c_n intervenant dans le membre de droite de (39) sont uniformément bornées). Il s'étend alors immédiatement aux fonctions $f \in \mathcal{B}^*(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ satisfaisant (40).

Soit une fonction φ positive bornée à support dans D^c. La fonction $f = \gamma_t^\varphi$ vérifie (40). En effet, en raisonnant comme dans le calcul effectué ci-dessus pour $\mathbb{E}_\eta^Z(\Theta_t, \varphi)$, on a:

$$\int_0^\infty ds \int \mu(dy) p(s, y-x) \gamma_t^\varphi(r+s, y) = \mathbf{1}_{[0,t]}(r) \mathbb{E}_x \left[\varphi(B_{t-r}) \mathbf{1}_{\{t-r > T_D, B_{t-r} \in D^c\}}\right].$$

On peut appliquer la formule (39) avec le choix $f = \gamma_t^\varphi$, $\psi = -\varphi$. Dans ce cas on a

$$\begin{aligned}
c_1(r,x) &= \int_0^\infty ds \int \mu(dy) p(s, y-x) \gamma_t^\varphi(r+s, y) - \mathbf{1}_{[0,t]}(r) \mathbb{E}_x \varphi(B_{t-r}) \\
&= \mathbf{1}_{[0,t]}(r) \mathbb{E}_x \left[\varphi(B_{t-r}) \mathbf{1}_{\{t-r > T_D, B_{t-r} \in D^c\}} - \varphi(B_{t-r})\right] \\
&= -\mathbf{1}_{[0,t]}(r) \mathbb{E}_x \left[\varphi(B_{t-r}) \mathbf{1}_{\{t-r \le T_D\}}\right] \\
&= -\mathbf{1}_{[0,t]}(r) Q_{t-r} \varphi(x),
\end{aligned}$$

où pour la troisième égalité, on a utilisé le fait que φ s'annule sur D. En particulier $c_1(r,x)=0$ si $x\in D^r$. Comme la fonctionnelle A ne croît p.s. que sur $\{s>0, B_s\in D\}=\{s>0, B_s\in D^r\}$, on en déduit aussitôt que

$$c_2(0,x)=-\frac{1}{2}\mathbb{E}_x\int_0^\infty c_1(s,B_s)^2 dA_s=0.$$

Ces observations nous permettent de calculer pour tout $t>0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\eta^Z\left[((\Theta_t,\varphi)+(\eta Q_t,\varphi)-(Z_t,\varphi))^2\right] &= \mathbb{E}_\eta^Z\left[((\Theta_t,\varphi)-(Z_t,\varphi))^2\right]\\ &\quad +(\eta Q_t,\varphi)^2+2(\eta Q_t,\varphi)\mathbb{E}_\eta^Z\left[(\Theta_t,\varphi)-(Z_t,\varphi)\right]. \qquad (41)\end{aligned}$$

D'après (39) et les calculs ci-dessus pour les fonctions $c_1(0,x)$, $c_2(0,x)$ on a

$$\mathbb{E}_\eta^Z\left[(\Theta_t,\varphi)-(Z_t,\varphi)\right]=(\eta,c_1(0))=-(\eta Q_t,\varphi),$$

$$\mathbb{E}_\eta^Z\left[((\Theta_t,\varphi)-(Z_t,\varphi))^2\right]=-2(\eta,c_2(0))+(\eta,c_1(0))^2=(\eta Q_t,\varphi)^2.$$

Il en découle aussitôt que le terme de droite de (41) est nul, et donc pour tout $t>0$, $\mathbb{P}_\eta^Z$-p.s., $(Z_t,\varphi)=(\Theta_t,\varphi)+(\eta Q_t,\varphi)$. Enfin, il est facile de vérifier que le processus $((\Theta_t+\eta Q_t,\varphi),t>0)$ est $\mathbb{P}_\eta^Z$-p.s. continu (voir les arguments de la partie suivante). D'après la partie 4, le processus $((Z_t,\varphi),t>0)$ est $\mathbb{P}_\eta^Z$-p.s. continu. Donc on a $\mathbb{P}_\eta^Z$-p.s. pour tout $t>0$, $(Z_t,\varphi)=(\Theta_t+\eta Q_t,\varphi)$. Il en découle que $\mathbb{P}_\eta^Z$-p.s. pour tout $t>0$, $\mathbf{1}_{D^c}.Z_t=\Theta_t+\eta Q_t$.

□

Corollaire 7.2 *Supposons que D soit de mesure de Lebesgue nulle. Alors $\mathbb{P}_\eta^Z$-p.s., pour tout $t>0$,*

$$Z_t=\Theta_t+\eta Q_t.$$

Preuve. D'après le théorème 4.9 le processus $(Z_t,\mathbf{1}_D)$ est p.s. continu sur $(0,\infty)$. La formule de moment d'ordre 1 (22) et l'hypothèse sur D montrent que pour tout $t>0$, $\mathbb{P}_\eta^Z((Z_t,\mathbf{1}_D)=0)=1$. On en déduit que p.s. pour tout $t>0$, $(Z_t,\mathbf{1}_D)=0$. Le corollaire découle alors du théorème 7.1.

□

8 Existence et régularité de la densité du super-processus Z par rapport à la mesure de Lebesgue en dehors de D

A l'aide de la formule de représentation précédente, il est alors possible de démontrer l'existence et la régularité de la densité du super-mouvement brownien avec catalyse. On note Δ le Laplacien en dimension d.

Théorème 8.1 *P.s., pour tout $t > 0$, la mesure aléatoire Z_t possède sur D^c une densité $z(t,y)$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Cette densité est de classe C^∞ sur $(0,\infty)\times D^c$. De plus on a p.s. pour tout $(t,y)\in(0,\infty)\times D^c$,*

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t,y) = \frac{1}{2}\Delta z(t,y).$$

Preuve. On note q la densité de transition du mouvement brownien tué sur D: pour tout $(t,x,y)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$,

$$q(t,x,y) := p(t,x-y) - \mathbb{E}_x\left[\mathbf{1}_{T_D<t}\,p(t-T_D, B_{T_D}-y)\right]. \tag{42}$$

On définit $D_\varepsilon := \left\{x\in\mathbb{R}^d, d(x,D)\le\varepsilon\right\}$ et $T_\varepsilon := \inf\{t>0, \omega(t)\in D_\varepsilon^c\}$. En utilisant la propriété de Markov forte des mesures H^x pour le noyau de transition Q_t (cf [10] théorème 5.1), on obtient pour toute fonction φ positive mesurable à support dans $D_{2\varepsilon}^c$, pour tous $u<t$ et pour tout $x\in D^r$,

$$\begin{aligned} H^x(\varphi(\omega(t-u))) &= H^x\left(\int q(t-u-T_\varepsilon,\omega(T_\varepsilon),y)\mathbf{1}_{t-u-T_\varepsilon>0}\;\varphi(y)dy\right) \\ &= \int dy\;\varphi(y)H^x\left(q(t-u-T_\varepsilon,\omega(T_\varepsilon),y)\mathbf{1}_{t-u-T_\varepsilon>0}\right). \end{aligned}$$

En reportant cette égalité dans la définition (38) de la mesure aléatoire Θ, on voit que la mesure Θ_t possède une densité θ_t par rapport à la mesure de Lebesgue. Cette densité est donnée pour tout $y\in D_{2\varepsilon}^c$ par

$$\theta_t(y) := \int \Gamma_\mu(du,dx)H^x\left(q(t-u-T_\varepsilon,\omega(T_\varepsilon),y)\mathbf{1}_{t-u-T_\varepsilon>0}\right). \tag{43}$$

Pour étudier la régularité de θ_t, nous avons besoin des lemmes suivants.

Lemme 8.2 *Pour tout $x\in\mathbb{R}^d$, la fonction $(t,y)\mapsto q(t,x,y)$ est de classe C^∞ sur $(0,\infty)\times D^c$ et pour tous $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}^p$, pour tous $\varepsilon>0$, $\delta_0>0$, on a*

$$\sup\left\{\left|\frac{\partial^{n+m}}{\partial t^n\partial y^m}q(t,x,y)\right|; t>0, x\in\mathbb{R}^d, y\in D_\varepsilon^c, |x-y|>\delta_0\right\}<\infty.$$

De plus pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a:

$$\frac{\partial q}{\partial t}(t,x,y) = \frac{1}{2}\Delta_y q(t,x,y), \quad (t,y) \in (0,\infty) \times D^c.$$

Preuve. La première assertion du lemme se démontre par récurrence à l'aide de l'expression de q dans (42) et grâce à des arguments classiques de dérivation sous le signe somme. La deuxième assertion est classique.

Lemme 8.3 *On a pour tout $\varepsilon > 0$, $\sup_{x \in D^r} H^x [T_\varepsilon < \infty] < \infty$.*

Preuve. Soit $r_0 > 0$. En utilisant la propriété forte de Markov sous la mesure H^x, il vient:

$$\begin{aligned}
H^x(T_D > r_0) &\geq H^x\left(T_\varepsilon < \infty, T_D - T_\varepsilon > r_0\right) \\
&\geq H^x\left(T_\varepsilon < \infty, \mathbb{E}_{\omega(T_\varepsilon)}[T_D > r_0]\right) \\
&\geq H^x\left(T_\varepsilon < \infty, \mathbb{E}_{\omega(T_\varepsilon)}[\forall s \leq r_0, |B_s - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2})]_{|x_0 = \omega(T_\varepsilon)}]\right) \\
&\geq cH^x\left(T_\varepsilon < \infty\right).
\end{aligned}$$

De plus on sait par [10] théorème 4.1 que pour tout $x \in D^r$, on a $H^x(1 - \mathrm{e}^{-T_D}) \leq 1$ ce qui implique que $H^x(T_D > r_0) \leq [1 - \mathrm{e}^{-r_0}]^{-1} < \infty$, pour tout $r_0 > 0$. On en conclut que $\sup_{x \in D^r} H^x [T_\varepsilon < \infty] < \infty$.

□

Fin de la preuve du théorème 8.1.
On vérifie aisément à l'aide du lemme 8.2 ci-dessus que la fonction $(t,y) \mapsto \int q(t,x,y)\eta(dx)$ qui est la densité de la mesure ηQ_t par rapport à la mesure de Lebesgue, est de classe C^∞ sur $(0,\infty) \times D^c$. De plus cette fonction est solution de l'équation de la chaleur sur $(0,\infty) \times D^c$.

On a vu que Θ_t posséde une densité par rapport à la mesure de Lebesgue donnée par (43). Un argument de convergence dominée reposant sur les lemmes 8.2, 8.3 et la propriété (27), montre que la fonction $(t,y) \mapsto \theta_t(y)$ est continue sur $(0,\infty) \times D^c$ en dehors d'un ensemble de probabilité nulle. Un raisonnement par récurrence utilisant les mêmes arguments et le théorème de dérivation sous le signe somme montre que p.s. la fonction $(t,y) \mapsto \theta_t(y)$ est de classe C^∞. Enfin, comme la fonction $(t,y) \mapsto q(t,x,y)$ est solution de l'équation de la chaleur sur $(0,\infty) \times D^c$, on vérifie à l'aide de (43) qu'il en est de même pour θ. On conclut alors à l'aide du théorème de représentation.

□

Remarque. Lorsque D est de mesure de Lebesgue nulle, les théorèmes 7.1 et 8.1 entraînent que p.s. pour tout $t > 0$, Z_t est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. On obtient ainsi une généralisation d'un résultat de [3] pour le cas d'un point de catalyse en dimension un (voir aussi [4] pour certaines extensions en dimension supérieures).

9 Mesure martingale orthogonale associée à Z

Les résultats de cette partie sont vrais sans l'hypothèse (H'). On utilise les mesures aléatoires construites dans le paragraphe 5 pour identifier la mesure de covariance de la mesure martingale associée à Z. Rappelons d'abord brièvement la construction de cette mesure martingale.

On note $C_b^{2,1}$ l'ensemble des fonctions bornées $\varphi \in C(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ telles que $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ existent et soient continues bornées. Pour toute fonction $\varphi \in C_b^{2,1}$, on considère

$$M\varphi_t := (Z_t, \varphi(t)) - (Z_0, \varphi(0)) - \int_0^t \left(Z_s, \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s) + \frac{1}{2}\Delta\varphi(s) \right) ds.$$

Le membre de droite est bien défini, car le processus $(Z_s, \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s) + \frac{1}{2}\Delta\varphi(s))$ est p.s. continu sur $[0, t]$. En utilisant la propriété de Markov du processus Z, et le calcul des moments de Z, on vérifie facilement que le processus $(M\varphi_t, t \geq 0)$ est une $(\mathcal{G}_t^Z)_{t\geq 0}$-martingale. Remarquons que grâce à la propriété de Markov du processus Z, et aux formules (22) et (23), on calcule pour toutes fonctions φ, ϕ de classe $C_b^{2,1}$

$$\mathbb{E}_\eta^Z M\varphi_t M\phi_s = \int \eta(dx) \int_0^{t\wedge s} du \int \nu(dy) p(u, x-y) \varphi(u, y) \phi(u, y). \qquad (44)$$

La martingale $(M\varphi_t, t \geq 0)$ est donc de carré intégrable.

De plus l'application $\varphi \mapsto M\varphi$ est une isométrie d'espace vectoriel de $H_b \bigcap C_b^{2,1}$ muni de la semi-norme

$$\| \varphi \|_\nu^2 := \mathbb{E}_\eta \int_0^\infty \varphi(u, B_u)^2 dA_u$$

dans l'ensemble des martingales continues de carrés intégrables muni de la norme $\mathbb{E}_\eta^Z M_\infty^2$. Par des arguments de densité, on peut prolonger M à tout H_b. Il est alors facile de vérifier que dans la terminologie de [14], M est une mesure martingale. De plus on déduit de la formule (44) que pour tous $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$, tels que $A \bigcap B = \emptyset$, on a pour tout $t \geq 0$,

$\mathbb{E}^Z_\eta (M\mathbf{1}_A)_t (M\mathbf{1}_B)_t = 0$. Par définition M est alors une mesure martingale orthogonale.

Avant d'énoncer le résultat principal de ce paragraphe, rappelons que puisque la mesure ν vérifie la condition (H), on peut considérer la mesure aléatoire Γ_ν construite dans la proposition 5.1. On identifie alors la mesure de covariance de M à l'aide de la mesure aléatoire Γ_ν.

Proposition 9.1 *Pour toute fonction bornée $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$, p.s. pour tout $t \geq 0$, on a*

$$< M\varphi >_t = \int_0^t \Gamma_\nu(ds, dy)\varphi(s, y)^2.$$

Preuve. On utilise les notations du paragraphe 5. D'après la définition de $V_\rho(\varepsilon)$ avec $\rho := \nu$, et en utilisant la propriété de Markov pour Z, on a pour tous $t \geq 0$, $s \geq 0$, $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^Z_\eta \left[\int_s^{t+s} V_\nu(\varepsilon)(du, dy)\varphi(u, y)^2 \mid \mathcal{G}^Z_s \right] \\ &= \int Z_s(dx) \int_0^t du \int \nu(dy) \int dz\, p(u, x - z)p(\varepsilon, z - y)\varphi(u + s, y)^2. \end{aligned}$$

Par un argument de convergence dominée utilisant à nouveau (2) et (3) , le membre de droite de l'égalité ci-dessus converge vers

$$\int Z_s(dx) \int_0^t du \int \nu(dy)\, p(u, x - y)\varphi(u + s, y)^2 = \mathbb{E}_{Z_s} \int_0^t \varphi(u + s, B_u)^2 dA_u.$$

De plus on a vu que la variable aléatoire $(V_\nu(\varepsilon), \varphi\mathbf{1}_{[s,t+s]})$ converge dans $L^2(\mathbb{P}^Z_\eta)$ vers $(\Gamma_\nu, \varphi\mathbf{1}_{[s,t+s]})$. On a donc finalement par passage à la limite:

$$\mathbb{E}^Z_\eta \left[\int_s^{t+s} \Gamma_\nu(du, dy)\varphi(u, y)^2 \mid \mathcal{G}^Z_s \right] = \mathbb{E}_{Z_s} \int_0^t \varphi(u + s, B_u)^2 dA_u.$$

Par ailleurs, en utilisant la propriété de Markov du processus Z et la formule (44), on obtient pour tous $t \geq 0$, $s \geq 0$,

$$\mathbb{E}^Z_\eta \left[[M\varphi_{t+s}]^2 \mid \mathcal{G}^Z_s \right] = [M\varphi_s]^2 + \mathbb{E}_{Z_s} \int_0^t \varphi(s + u, B_u)^2 dA_u.$$

Comme le processus $\left(\int_0^t \Gamma_\nu(ds, dy)\varphi(s, y)^2, t \geq 0 \right)$ est croissant, continu, adapté et nul en 0, le processus

$$\left(< M\varphi >_t - \int_0^t \Gamma_\nu(ds, dy)\varphi(s, y)^2, t \geq 0 \right)$$

est une martingale continue à variation finie nulle en 0. Cette martingale est donc identiquement nulle.

$\square$

Appendice

On désire donner une hypothèse sur D qui entraîne la condition (H') introduite dans le paragraphe 7. Rappelons que B désigne un mouvement brownien d-dimensionnel. Soit $C_n(x) := \left\{y \in \mathbb{R}^d, 2^{-n} \leq |x-y| \leq 2^{-n+1}\right\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. On introduit l'hypothèse (H"):

– *si $d = 2$, il existe une constante $b > 0$ et un entier n_0 tels que pour tous $x \in D$, $n \geq n_0$,*

$$\inf_{y,|x-y|=2^{-n-4}} \mathbb{P}_y(T_D < T_{C_n(x)}) \geq b > 0,$$

où $T_{C_n(x)} := \inf\{t > 0, B_t \in C_n(x)\}$,

– *si $d \geq 3$, il existe une constante $b > 0$ et un entier n_0 tels que pour tous $x \in D$, $n \geq n_0$,*

$$\operatorname{cap}(D \bigcap C_n(x)) \geq b \operatorname{cap}(C_n(x)),$$

où $\operatorname{cap}(A)$ est la capacité newtonienne ($\operatorname{cap}(C_n(x)) = c(d)2^{-n(d-2)}$).

En dimension $d \geq 3$, l'hypothèse (H") est vérifiée lorsque D est l'adhérence ou la frontière d'un domaine lipschitzien (borné) ou bien encore si D est l'adhérence d'un domaine lipschitzien (borné) d'une sous variété de dimension $d-1$. Lorsque $d = 2$, on voit facilement que l'hypothèse (H") est satisfaite si D est un compact connexe.

Lemme *La condition (H") implique (H').*

Preuve. Rappelons que $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ désigne la filtration complétée associée à B. Soit ζ une variable exponentielle de paramètre 1 indépendante de B. Soit

$$\mathcal{L}_D := \sup\{t > 0, t < \zeta, B_t \in D\}$$

avec la convention usuelle $\sup\{\emptyset\} = 0$.

Montrons dans un premier temps que pour tout $\beta \in (0,1)$,

$$\mathbb{E}_x\left[\mathcal{L}_D^{-\beta} \mathbf{1}_{\mathcal{L}_D > 0}\right] \geq c \int_{B(x,1)} \frac{\mu(dy)}{|x-y|^{d-2+2\beta}}, \tag{45}$$

où μ est la 1-mesure d'équilibre de D (cf paragraphe 7) et la constante c ne dépend que de d et de β. Remarquons que

$$\mathbb{P}_x[\mathcal{L}_D > 0] = \mathbb{P}_x[T_D < \zeta] = \mathbb{E}_x\left[\mathrm{e}^{-T_D}\right].$$

Il découle de (35) et de (37) que $\mathbb{P}_x[\mathcal{L}_D > 0] = \int \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}\, p(s, x-y) ds\, \mu(dy)$. On déduit de l'égalité ci-dessus et de la propriété de Markov (voir [13] p.61-62) pour le processus $(B_{t\wedge\zeta}, t \geq 0)$, que

$$\mathbb{P}_x[\mathcal{L}_D > t] = \int_t^\infty ds\ \mathrm{e}^{-s} \int p(s, x-y)\mu(dy).$$

Donc on en déduit alors que pour $0 < \beta < 1$,

$$\mathbb{E}_x\left[\mathcal{L}_D^{-\beta} \mathbf{1}_{\mathcal{L}_D > 0}\right] = \int_0^\infty ds\ s^{-\beta}\, \mathrm{e}^{-s} \int p(s, x-y)\mu(dy),$$

et l'inégalité (45) en découle facilement.

On veut ensuite majorer le terme de gauche de (45). Soit $x \in D$. Remarquons que sous l'hypothèse (H"), $\mathbb{P}_x$-p.s., $\mathcal{L}_D > 0$. On note $S_t := \sup_{s\leq t} |B_t - x|$. Soit la suite de temps d'arrêt $\sigma_n := \inf\{t > 0, S_t > 2^{-4n}\}$. On a alors pour tout $m > 1$,

$$\mathbb{P}_x\left[S_{\mathcal{L}_D} < 2^{-8m}\right] \leq \mathbb{P}_x\left[\bigcap_{n=m}^{2m-1} \{\forall t \in [\sigma_{n+1}, \sigma_n], B_t \notin D\}\right] + \mathbb{P}_x[\zeta \leq \sigma_m] \tag{46}$$

On a facilement $\mathbb{P}_x[\zeta \leq \sigma_m] \leq \mathbb{E}_x[\sigma_m] = 2^{-8m}\mathbb{E}_x[\sigma_0]$.
Si $d = 2$, on a par (H"): pour $4n \geq n_0$,

$$\mathbb{P}_x[\exists t \in [\sigma_{n+1}, \sigma_n], B_t \in D \mid \mathcal{F}_{\sigma_{n+1}}] \geq b > 0.$$

Si $d \geq 3$, on vérifie aisément (cf [9] p256) que pour $4n + 2 \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_x[\exists t \in [\sigma_{n+1}, \sigma_n], B_t \in D \mid \mathcal{F}_{\sigma_{n+1}}] \\
&\qquad \geq \mathbb{P}_x\left[\exists t \in [\sigma_{n+1}, \sigma_n], B_t \in D \bigcap C_{4n+2}(x) \mid \mathcal{F}_{\sigma_{n+1}}\right] \\
&\qquad \geq c\, 2^{(4n+2)(d-2)} \operatorname{cap}(D \bigcap C_{4n+2}(x)) \\
&\qquad \geq c' > 0,
\end{aligned}$$

d'après l'hypothèse (H"). Remarquons que c' est indépendant de x. On peut supposer $c' \in (0, b \wedge (1/2))$. Par applications successives de la propriété de Markov forte à (46), il vient en utilisant les majorations ci-dessus, pour tout $m \geq (n_0 + 2)/4$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x\left[S_{\mathcal{L}_D} < 2^{-8m}\right] &\leq \left(\prod_{n=m}^{2m-1} (1 - c')\right) + 2^{-8m}\mathbb{E}_x[\sigma_0] \\
&\leq c(1 - c')^m.
\end{aligned}$$

On choisit ensuite $\beta' > 0$ (indépendamment de x), tel que $2^{8\beta'}(1-c') < 1$, et il vient:

$$\mathbb{E}_x S_{\mathcal{L}_D}^{-\beta'} \leq 1 + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{(8n+8)\beta'} \mathbb{P}_x \left[S_{\mathcal{L}_D} < 2^{-8n} \right] \leq c, \tag{47}$$

où c est indépendant de x.

D'autre part, pour tout $\delta \in (0, 1/2)$ et pour tout $p > 0$, on sait que

$$\mathbb{E}_x \left[\sup_{t \leq 1} \left(\frac{S_t}{t^\delta} \right)^p \right] \leq C(p, \delta) < \infty. \tag{48}$$

A l'aide de l'inégalité de Hölder on déduit facilement de (47) et de (48) que pour $0 < \beta < \delta\beta'$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x \left[\mathcal{L}_D^{-\beta} \right] &\leq \mathbb{E}_x \left[(\mathcal{L}_D \wedge 1)^{-\beta} \right] \\ &= \mathbb{E}_x \left[\left(\frac{S_{\mathcal{L}_D \wedge 1}}{(\mathcal{L}_D \wedge 1)^\delta} \right)^{\beta/\delta} S_{\mathcal{L}_D \wedge 1}^{-\beta/\delta} \right] \leq C < \infty. \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant la propriété de Markov forte, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E}_x \left[\mathcal{L}_D^{-\beta} \mathbf{1}_{\mathcal{L}_D > 0} \right] = \mathbb{E}_x \left[\mathbf{1}_{T_D < \infty} \mathbb{E}_{B_{T_D}} \left[(a + \mathcal{L}_D)^{-\beta} \right]_{|a = T_D} \right] \leq C.$$

On déduit de la majoration ci-dessus et de (45) que l'hypothèse (H') est vérifiée.

□

Remerciements. Je tiens à remercier J.F. Le Gall pour son aide et nos nombreuses discussions.

Références

[1] R. BLUMENTHAL and R. GETOOR. Markov processes and potential theory. Academic press, New York, 1968.

[2] D. A. DAWSON and K. FLEISCHMANN. Diffusion and reaction caused by point catalysts. SIAM J. Appl. Math., **52** (1): 163–180, 1992.

[3] D. A. DAWSON and K. FLEISCHMANN. A super-brownian motion with a single point catalyst. Stoch. Process. and Appl., **49**: 3–40, 1994.

[4] D. A. DAWSON and K. FLEISCHMANN. Super-brownian motion in higher dimensions with absolutely continuous mesure states. J. Theor Probab, **8** (1): 179–206, 1995.

[5] E. DYNKIN. Branching particle systems and superprocesses. Ann. Probab., **19**: 1157–1194, 1991.

[6] K. FALCONER. The geometry of fractal sets. Cambridge University Press, 1985.

[7] K. FLEISCHMANN and J.-F. LE GALL. A new approach to the single point catalytic super-brownian motion. Probab. Th. Rel. Fields, **102**: 63–82, 1995.

[8] R. GETOOR. On the construction of kernels. In Lect. Notes Math., volume 465, pages 443–463. Springer, Berlin, 1974.

[9] K. ITÔ and H. P. McKean. Diffusion processes and their sample paths. Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[10] B. MAISONNEUVE. Exit systems. Ann. Probab., **3**: 399–411, 1975.

[11] J. NEVEU. Arbres et processus de Galton-Watson. Ann. Inst. Henri Poincaré, **22**: 199–207, 1986.

[12] E. PERKINS. On the continuity of measure valued processes. In Seminar on Stochastic Processes 1990, volume 24, pages 261–268. Birkhaüser, 1991.

[13] S. C. PORT and C. J. STONE. Brownian motion and classical potential theory. Academic Press, 1978.

[14] J. WALSH. An introduction to stochastic partial differential equations. In Lect. Notes Math., volume 1180, pages 266–439. Springer, 1986.