

Schémas TVD d'ordre élevé pour la résolution de l'équation de Burgers,

S. Piperno¹

¹*INRIA, BP 93, 06902 Sophia Antipolis cedex (serge.piperno@sophia.inria.fr)*

SCHEMAS TVD D'ORDRE ELEVE POUR LA RESOLUTION DE L'EQUATION DE BURGERS

Serge Piperno
CERMICS

INRIA, B.P. 93, 06902 Sophia-Antipolis Cedex, France.

Résumé

Dans ce rapport, nous cherchons des schémas TVD d'ordre élevé pour la résolution numérique des équations ou systèmes hyperboliques, en une dimension d'espace. Comme tout schéma conservatif linéaire TVD est nécessairement du premier ordre, nous introduisons des limiteurs non linéaires, afin de rendre TVD des schémas linéaires très précis. Nous présentons de nouveaux limiteurs pour le β -schéma décentré d'ordre 3 (avec $\beta = 1/3$), plus efficaces que le limiteur de Spekreijse, ainsi que pour le β -schéma centré d'ordre 4 (avec $\beta = 1/3$). Nous comparons l'efficacité de ces schémas et celles de schémas existants sur des solutions irrégulières de l'équation de Burgers.

HIGH ORDER TVD SCHEMES FOR THE RESOLUTION OF BURGERS EQUATION

Abstract

In this paper, we build high order TVD schemes for the resolution of hyperbolic equations or systems. Since all linear TVD conservative schemes are necessarily first order accurate, non linear limiters need to be added to highly accurate linear schemes. We present in this paper new limiters for the third-order accurate MUSCL-type upwind scheme (with $\beta = 1/3$), which are more efficient than the limiters introduced by Spekreijse, and the fourth-order accurate MUSCL-type centered scheme (with $\beta = 1/3$). Accuracy and computational costs for limited and non-limited schemes are compared and tested on discontinuous solutions of Burgers equation.

1 Introduction

L'objet de ce rapport est la mise au point de schémas numériques TVD (à variation totale décroissante) d'ordre élevé pour une équation hyperbolique en général. Nous nous intéressons plus particulièrement à l'advection linéaire et à l'équation de Burgers, non linéaire, dont les solutions ressemblent à celles des solutions des équations d'Euler en mécanique des fluides non visqueux (pour ce qui est des champs vraiment non linéaires).

On part d'une constatation assez simple: tous les schémas linéaires d'ordre supérieur à 1 peuvent produire des oscillations, notamment près des discontinuités. Ces oscillations ont des conséquences assez graves sur la qualité des résultats (défaut de positivité par exemple), surtout pour les équations ou systèmes hyperboliques non linéaires. Historiquement, on s'est d'abord restreint à une classe spéciale de schéma sans oscillations (TVD) [1], classe qui s'est avérée très réduite, et ne contenant pas de schéma d'ordre élevé. Par la suite, on a ensuite adjoint des limiteurs non linéaires [2] à ces schémas pour les rendre TVD. L'étude présentée ici poursuit les travaux de Sweby [3] et Spekreijse [4].

Dans un premier temps, on rappelle un ensemble de notions générales sur les schémas numériques. On introduit le caractère TVD pour un schéma conservatif en volumes finis, et comment il peut être corrélé à sa stabilité ou à sa précision.

Nous étudions ensuite successivement le schéma décentré du premier ordre, seul schéma linéaire TVD, puis les schémas de type MUSCL [2] (Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws) décentrés ou centrés d'ordre supérieur. Nous présentons les schémas et limiteurs existants, puis nous présentons la partie originale de ce travail en introduisant de nouveaux limiteurs, pour des schémas de type MUSCL en flux décentrés et centrés.

Pour terminer, nous étudions le comportement des nouveaux schémas obtenus et nous comparons leur efficacité aux schémas existants.

2 Généralités sur les schémas numériques

Dans cette section, nous allons situer le cadre de notre étude. Nous nous intéressons aux équations hyperboliques (scalaires) mono-dimensionnelles, éventuellement non linéaires.

2.1 Equations hyperboliques linéaires ou non linéaires

Pour une fonction scalaire $u(x, t)$ en une dimension, une équation hyperbolique sous forme conservative s'écrit:

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}, \quad (1)$$

où f est une fonction de flux de classe C^1 et les indices x et t représentent des dérivations en espace et en temps.

A priori, f peut être quelconque. On distingue entre autres, l'équation d'advection:

$$u_t + cu_x = 0, \quad (2)$$

où $f(u) = cu$ est linéaire ($c \in \mathbb{R}$), et l'équation de Burgers,

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, \quad (3)$$

où $f(u) = u^2/2$ est non linéaire et strictement convexe.

Ces équations se rapprochent des équations d'Euler en une dimension pour certains aspects. Pour les équations d'Euler, tous les champs sont linéairement dégénérés ou vraiment non linéaires, et les solutions ressemblent aux solutions de l'équation d'advection et de l'équation de Burgers. Toutes ces équations sont écrites ici sous forme conservative. Cette forme a un sens. Elle dérive de principes physiques de conservation (masse, quantité de mouvement et énergie pour les équations d'Euler). Cette forme n'est équivalente à aucune forme différentielle, obtenue en supposant que f et u sont suffisamment régulières (forme non conservative par exemple). Ceci peut se voir aisément. Pour u suffisamment régulière, l'équation (3) est équivalente par exemple à

$$(u^2)_t + \left(\frac{u^3}{6}\right)_x = 0,$$

et les relations de Rankine-Hugoniot pour les deux formes conservatives précédentes donnent des vitesses différentes pour une discontinuité ($s = (u_G + u_D)/2$ et $s = 1/6 \cdot (u_D^3 - u_G^3)/(u_D^2 - u_G^2)$ respectivement).

2.2 Formulation en volumes finis

De manière classique pour les systèmes hyperboliques, on distingue les solutions classiques (assez régulières, mais parfois pour un temps limité), les solutions faibles (solutions au sens des distributions) et les solutions faibles entropiques (les solutions physiques, pour lesquels certains théorèmes d'existence et d'unicité peuvent exister). En restant proche de la formulation conservative, on s'assurera que, de manière naturelle, la viscosité numérique apportée par nos schémas sélectionne bien une solution faible entropique, donc physique.

On choisit donc une formulation en volumes finis. La forme intégrale de l'équation initiale de conservation nous assure que, pour un intervalle $[a, b]$,

$$\frac{d}{dt} \left(\int_a^b u(x, t) dx \right) = f(u(a, t)) - f(u(b, t)). \quad (4)$$

Le principe fondamental des formulations en volumes finis est le suivant: on partage le domaine en cellules (intervalles en une dimension) et on considère que la solution est constante sur ces cellules. Ainsi, les inconnues numériques u_i^n représentent des approximations à l'instant t^n de la moyenne de u sur la cellule i . On choisira un maillage régulier, tel que:

$$\begin{cases} x_i & = & i\Delta x \\ x_{i+\frac{1}{2}} & = & (i + \frac{1}{2})\Delta x \\ \mathcal{C}_i & = & [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \end{cases} \quad (5)$$

2.3 Schémas conservatifs

Definition 1 *Un schéma numérique est dit conservatif s'il existe une fonction ϕ de flux numérique telle que le schéma s'écrive sous la forme:*

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0, \quad (6)$$

où le flux numérique $\phi_{i+\frac{1}{2}}$ entre les cellules \mathcal{C}_i et \mathcal{C}_{i+1} est donné par $\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi(u_i^n, u_{i+1}^n)$.

On notera que, dans l'équation précédente, les parties temporelle et spatiale de l'équation d'origine sont encore séparées. Ainsi, on pourra s'intéresser de manière découplée aux schémas numériques choisis pour chaque dérivée. Dans la suite, on utilisera des schémas en temps explicites, à un ou plusieurs pas (schémas de Runge-Kutta), et des flux numériques plus ou moins précis en espace.

2.4 Précision des schémas numériques

L'approximation numérique fournie par le schéma spatial est d'autant meilleure que l'erreur de troncature est faible. Celle-ci est donnée par:

$$\varepsilon^x = \frac{\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} - (f(u))_x. \quad (7)$$

Definition 2 *On dit que le schéma (spatial) est consistant si*

$$\varepsilon^x = O(\Delta x) \text{ quand } \Delta x \rightarrow 0. \quad (8)$$

Lorsque le schéma spatial est conservatif, il est consistant si $\phi(u, u) = u$.

Definition 3 *De même, on dit que l'approximation spatiale est d'ordre p si*

$$\varepsilon^x = O(\Delta x^p) \text{ quand } x \rightarrow 0. \quad (9)$$

En une seule dimension, sur un maillage régulier, les schémas en volumes finis sont semblables aux schémas aux différences finies. L'écriture de l'erreur de troncature est bien plus facile. L'utilisation de développements limités de u aux points du maillage permet de calculer l'erreur de troncature des schémas. Pour chaque schéma, on calcule l'équation approchée que vérifie la solution numérique $(u_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. L'analyse de cette « équation équivalente » permet de mettre en évidence certaines propriétés fondamentales du schéma, comme la diffusion ou la dispersion [5].

2.5 Stabilité, principe du maximum, monotonie

On dispose d'une batterie de schémas linéaires, précis à l'ordre un ou plus en temps et/ou en espace, qui sont stables (stabilité L^2) lorsqu'ils sont appliqués à l'équation d'advection linéaire (2). La démonstration repose sur l'analyse de Von Neumann en modes de Fourier. Par exemple, le schéma de Lax-Wendroff

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} - c^2 \Delta t \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{\Delta x^2} = 0, \quad (10)$$

est d'ordre 2 en temps et en espace, mais stable en norme L^2 seulement si le nombre de Courant ν vérifie

$$\nu \equiv \frac{|c|\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

Cependant, le schéma de Lax-Wendroff produit des oscillations parasites, lorsqu'il est appliqué à des solutions discontinues. Sur la figure 1, on montre les solutions exacte et approchée de l'advection d'une vague carrée. Ce défaut est grave, car il peut apparaître des discontinuités de la solution faible entropique d'une équation ou d'un système hyperbolique non linéaire, même pour une donnée initiale régulière [6].

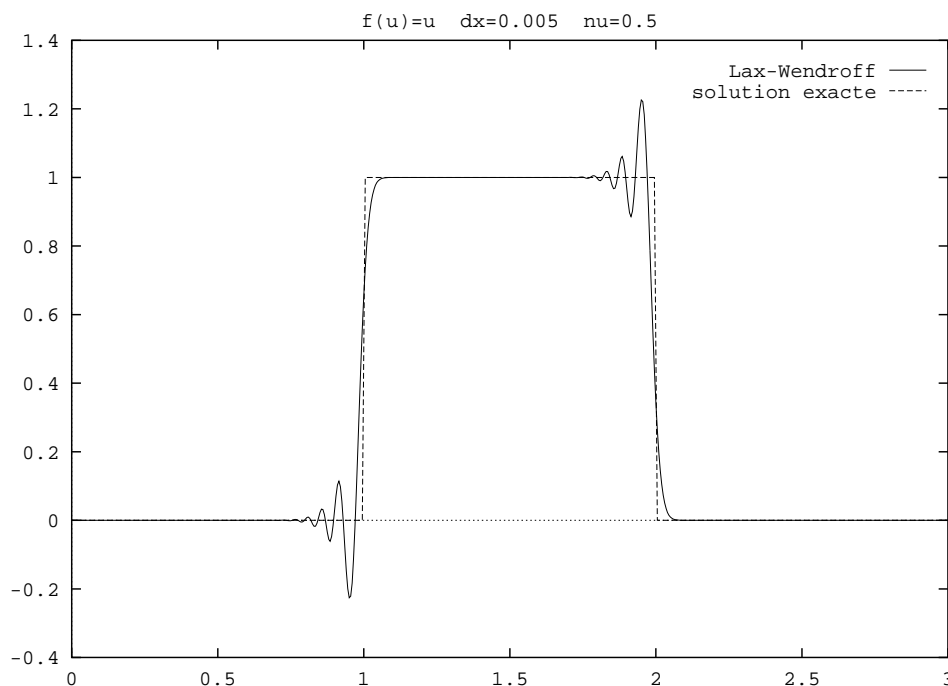


FIG. 1 – Oscillations générées par le schéma de Lax-Wendroff.

On sait que les solutions faibles de (1) ont de remarquables propriétés. Aucun maximum ni minimum local n'apparaît. Les valeurs aux minima locaux ne décroissent pas. Les valeurs aux maxima locaux ne croissent pas [1] (et donc la variation totale de u ne peut pas croître au cours du temps). On aimerait que les schémas numériques fournissent des solutions approchées qui aient les mêmes propriétés.

Introduisons quelques propriétés de monotonie que pourraient avoir les schémas conservatifs considérés. Harten, Hyman et Lax [7] ont introduit la notion de monotonie pour un schéma conservatif dans le sens étendu où il peut s'écrire sous la forme:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}}) \equiv \Phi(u_{i-l}^n, \dots, u_{i+m}^n), \quad (11)$$

avec $\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi(u_{i-l+1}^n, \dots, u_{i+m}^n)$

où la fonction de flux numérique ϕ est consistante, c'est-à-dire $\phi(u, \dots, u) = u$.

Definition 4 On dira qu'un tel schéma est **monotone** si et seulement si la fonction Φ est une fonction croissante (au sens large) de chacun de ses arguments.

D'une part, on peut montrer qu'un schéma monotone ne peut converger que vers une solution entropique (théorème essentiel sur la convergence des schémas monotones). D'autre part, on a le théorème [7] suivant:

Theorem 1 *Tout schéma monotone est au maximum d'ordre 1.*

Cette notion est donc un peu forte. Harten [1] a introduit des notions plus faibles de monotonie, dans le but d'obtenir des schémas d'ordre au moins égal à 2, monotones en un certain sens.

Definition 5 *On dira qu'un schéma est TVD (à variation totale décroissante, total variation diminishing) si et seulement si*

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n), \quad (12)$$

où $TV(u^n)$, la variation totale discrète de u^n , est donnée par

$$TV(u^n) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} |u_i^n - u_{i-1}^n|. \quad (13)$$

Definition 6 *Enfin, on dira qu'un schéma préserve la monotonie [1], si et seulement si il transforme une suite u^n monotone en une autre suite u^{n+1} également monotone. On dit qu'une suite u est monotone si et seulement si*

$$\forall i, \min(u_{i-1}, u_{i+1}) \leq u_i \leq \max(u_{i-1}, u_{i+1}). \quad (14)$$

Pour ces différentes notions de monotonie, on a les implications suivantes [1]:

Theorem 2 *Pour un schéma conservatif quelconque,*

$$\text{monotone} \implies \text{TVD} \implies \text{préserve la monotonie}. \quad (15)$$

Theorem 3 *Pour un schéma conservatif linéaire,*

$$\text{TVD} \iff \text{préserve la monotonie} \iff \text{monotone} \implies \text{du premier ordre} \quad (16)$$

En conséquence, il n'existe pas de schéma linéaire qui soit TVD et d'ordre supérieur à 1. Si l'on veut construire des schémas TVD d'ordre au moins égal à 2, ils doivent être non linéaires.

Dans les sections suivantes, nous étudions d'abord le schéma décentré (d'ordre 1), et nous vérifions qu'il est TVD. Nous verrons ensuite des schémas d'ordre 3 ou 4, fondés sur des schémas linéaires non TVD, auxquels on a ajouté des limiteurs non linéaires. Ces limiteurs rendent le schéma TVD, tout en lui gardant sa précision. Dans la suite, on considérera toujours des schémas temporels explicites de Runge-Kutta, dont l'ordre de précision est au moins égal à celui de l'approximation spatiale.

3 Schéma décentré du premier ordre

Pour l'équation d'avection (linéaire), tous les schémas décentrés du premier ordre sont identiques. Nous rappelons les propriétés de stabilité et de monotonie de ce schéma. Ensuite, nous nous intéressons à l'équation de Burgers, pour laquelle plusieurs schémas décentrés sont disponibles.

3.1 Equation d'advection

On s'intéresse à l'équation d'advection (2). Dans un premier temps, on suppose $c > 0$. Le schéma décentré à gauche est conservatif. Il s'écrit sous la forme (6) avec un flux numérique $\phi_{i+\frac{1}{2}}$ donné par

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi(u_i, u_{i+1}) = cu_i. \quad (17)$$

Ce schéma est linéaire. La partie en temps est traitée par un schéma explicite d'ordre 1. Le flux numérique est d'ordre 1 (donc consistant). L'équation équivalente pour ce schéma est

$$u_t + cu_x = \frac{c\Delta x}{2}(1 - \nu) + O(\Delta x^2, \Delta t^2), \quad (\nu = \frac{c\Delta t}{\Delta x}). \quad (18)$$

Une analyse de Fourier montre que ce schéma est stable (pour la norme L^2) sous la condition de Courant-Freidrichs-Lewy (CFL):

$$\nu \leq 1. \quad (19)$$

Quant à la monotonie, toutes les notions se confondent en linéaire. L'outil principal pour la démonstration qu'un schéma est TVD (ou pour la construction d'un tel schéma) est le théorème de Harten [1], valable dans le cas général d'une équation scalaire hyperbolique en une dimension (1), dont la démonstration est élémentaire:

Theorem 4 *Soit un schéma numérique utilisé pour (1), qui peut s'écrire sous la forme:*

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(A_{i+\frac{1}{2}} \Delta u_{i+\frac{1}{2}}^n + B_{i-\frac{1}{2}} \Delta u_{i-\frac{1}{2}}^n \right), \quad (20)$$

avec

$$\Delta u_{i+\frac{1}{2}}^n = u_{i+1}^n - u_i^n. \quad (21)$$

Alors le schéma est TVD si on a pour tout i ,

$$A_{i+\frac{1}{2}} \leq 0 \leq B_{i+\frac{1}{2}}, \quad B_{i+\frac{1}{2}} - A_{i+\frac{1}{2}} \leq \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (22)$$

- Le schéma décentré à gauche est consistant et TVD si $c > 0$ et $\nu \leq 1$.
- Le schéma décentré à droite, où le flux numérique $\phi_{i+\frac{1}{2}}$ est donné par

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi(u_i, u_{i+1}) = cu_{i+1}, \quad (23)$$

est consistant et TVD si $c < 0$ et $\nu \leq 1$.

- Enfin, le **schéma décentré**, où le flux numérique $\phi_{i+\frac{1}{2}}$ est donné par

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi(u_i, u_{i+1}) = c^+ u_i + c^- u_{i+1}, \text{ avec } \begin{cases} c^+ = \max(c, 0) \\ c^- = \min(c, 0) \end{cases}, \quad (24)$$

est consistant et TVD si $\nu \leq 1$.

On vérifie bien que le schéma est TVD, pour une donnée initiale discontinue ($u_0(x) = 1$ si $0 < x < 1$ et 0 sinon). On voit sur la Figure 2 que la solution approchée (obtenue avec $\nu = 0.9$ et $\Delta x = 0.0032$) est légèrement lissée, à cause de la diffusion numérique introduite par le schéma.

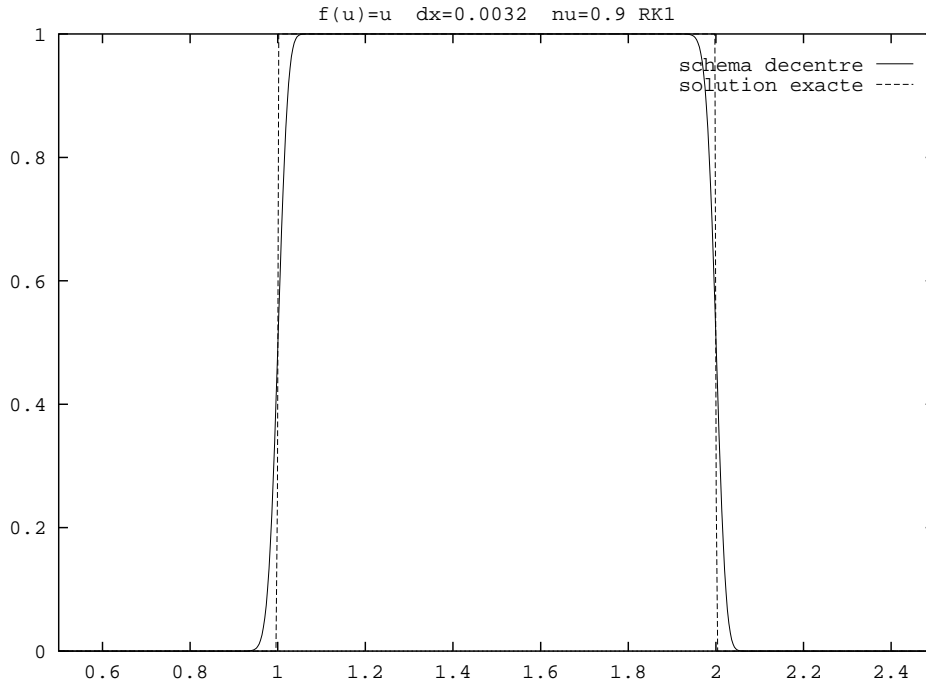


FIG. 2 – Solution approchée obtenue par le schéma décentré d'ordre 1.

3.2 Equation de Burgers

Pour l'équation de Burgers, les caractéristiques ont des pentes constantes, mais dont le signe peut être quelconque. Un schéma conservatif décentré en volumes finis devra prendre en compte ce phénomène, et pouvoir calculer avec la plus grande précision possible les flux aux interfaces entre les cellules, de part et d'autre desquelles la solution discrète u^n est constante. Cette situation ressemble localement à un *problème de Riemann*, où la donnée initiale u_0 est du type:

$$u_0(x) = \begin{cases} u_G, & \text{si } x < 0 \\ u_D, & \text{si } x > 0 \end{cases}, \text{ avec } u_G \neq u_D. \quad (25)$$

La méthode de Godunov est un schéma en volumes finis qui utilise des flux décentrés, fondés sur un solveur de Riemann exact. Elle est peu coûteuse pour l'équation de Burgers en

une dimension. Mais son extension au système (hyperbolique) des équations d'Euler est trop coûteuse. On choisit alors d'utiliser un solveur de Riemann approché. C'est le cas, par exemple, des flux de Roe, Van Leer ou Osher.

Pour l'équation de Burgers, les seules solutions entropiques bornées non constantes d'un problème de Riemann sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \text{choc} \quad u_G > u_D : \quad u(x, t) &= \begin{cases} u_G & \text{si } \frac{x}{t} < \frac{u_G + u_D}{2} \\ u_D & \text{si } \frac{x}{t} > \frac{u_G + u_D}{2} \end{cases} \\ \text{détente} \quad u_G < u_D : \quad u(x, t) &= \begin{cases} u_G & \text{si } \frac{x}{t} < u_G \\ \frac{x}{t} & \text{si } u_G < \frac{x}{t} < u_D \\ u_D & \text{si } \frac{x}{t} > u_D \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

Ainsi, le flux numérique utilisé dans la schéma de Godunov, fondé sur les solutions entropiques bornées des problèmes de Riemann, s'écrit (avec $f(u) = u^2/2$):

$$\phi_{\text{Godunov}}(u_G, u_D) = \begin{cases} f(u_G) & \text{si } 0 \leq u_G \leq u_D \text{ ou } u_G \geq |u_D| \\ f(u_D) & \text{si } u_G \leq u_D \leq 0 \text{ ou } |u_G| \leq -u_D \\ 0 & \text{si } u_G \leq 0 \leq u_D \end{cases}, \quad (27)$$

et le schéma de Godunov pour l'équation de Burgers s'écrit globalement:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t^n} + \frac{\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0, \text{ avec } \phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi_{\text{Godunov}}(u_i^n, u_{i+1}^n). \quad (28)$$

Le pas de temps Δt^n est variable au cours de la simulation. Après le n ème pas de temps, on obtient une solution approchée à l'instant $t^{n+1} = t^n + \Delta t^n$.

Theorem 5 *Sous la condition*

$$\frac{\Delta t^n}{\Delta x} \|u^n\|_{L^\infty} \leq 1, \quad (29)$$

le schéma de Godunov est monotone.

La démonstration de ce théorème n'est pas très complexe (voir par exemple [8]). Il permet d'assurer que le schéma de Godunov est TVD et d'ordre 1 sous la condition de type CFL non linéaire (29), et que, s'il converge presque partout vers une solution u quand Δt et Δx tendent vers 0, alors u est solution faible entropique de (3). Il vérifie aussi le principe du maximum et est stable en norme L^∞ .

On se propose d'essayer le schéma de Godunov sur le cas test suivant, où la solution à $t = 0$ est donnée par:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -3 < x < -2 \\ -1 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (30)$$

L'unique solution entropique bornée de l'équation de Burgers pour la donnée initiale (30) est donnée pour tout t par:

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -3 + t < x < -2 + t/2 \\ (x + 3)/t & \text{si } -3 < x < -3 + \min(t, \sqrt{2t}) \\ 0 & \text{sinon et } x < 0 \\ -u(-x, t) & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad (31)$$

qui est dessinée sur le Figure 3. On a deux détente et deux chocs, qui interagissent à $t = 2$. Ensuite, deux chocs symétriques se propagent en sens inverses (à la vitesse $\pm\sqrt{1/(2t)}$) et à $t = 4.5$, les deux chocs se réduisent en un seul choc stationnaire, entre deux détente. Tous les chocs ont été tracés en caractères gras. Les détente sont représentées par l'éventail de leur caractéristiques.

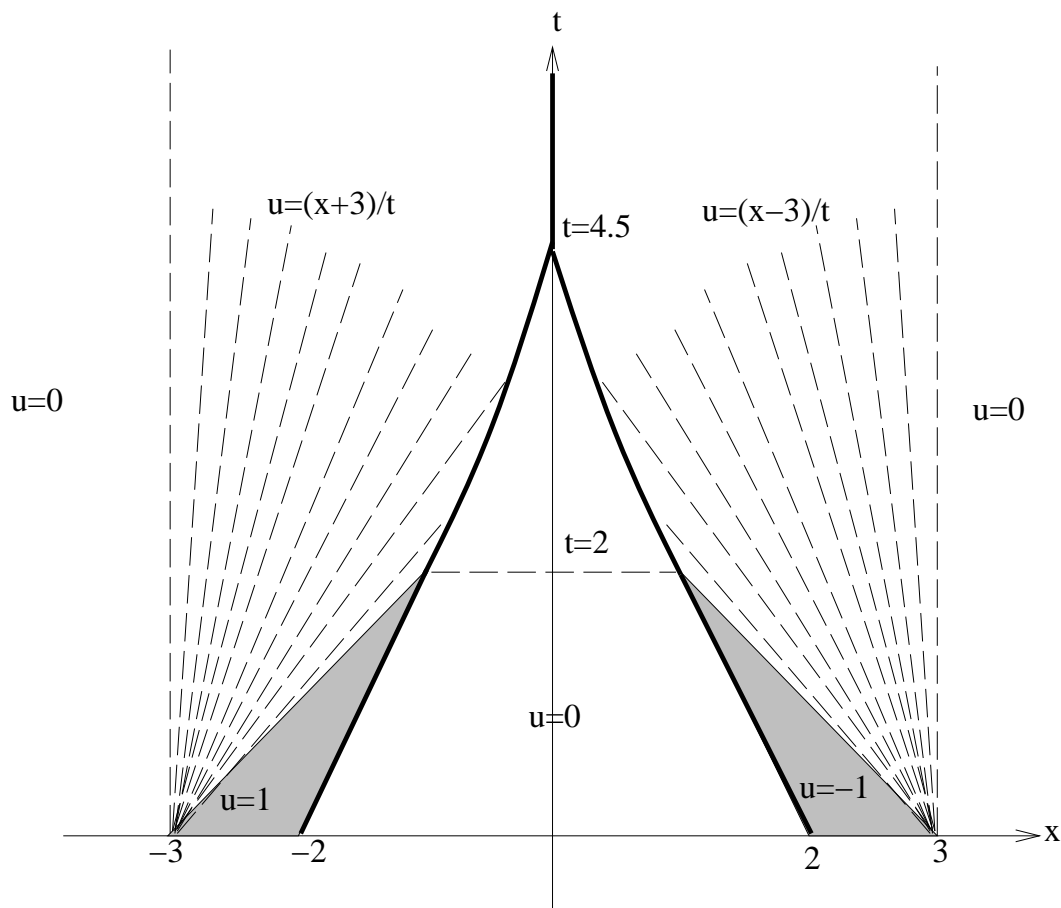


FIG. 3 – Solution entropique bornée de l'équation de Burgers pour $u_0(x)$ définie en (30).

On montre sur la Figure 4 la solution u trouvée à différents instants. On voit bien la rencontre des chocs et des détente à $t = 2$, puis la fusion des chocs en un seul choc stationnaire en $x = 0$. On a utilisé un nombre de Courant $\nu = 0.9$, avec un pas d'espace assez petit $\Delta x = 0.0032$.

Sur la Figure 5, on représente les variations totales des solutions exactes et approchées. La diffusion du schéma décentré est assez faible, puisque Δx est assez petit et ν est assez proche de 1.

4 Schémas décentrés TVD d'ordre supérieur

Comme on l'a déjà vu, il n'existe pas de schéma linéaire d'un ordre supérieur à 1 qui soit aussi TVD. Pourtant, on dispose de schémas conservatifs d'ordre élevé. Dans cette partie, on

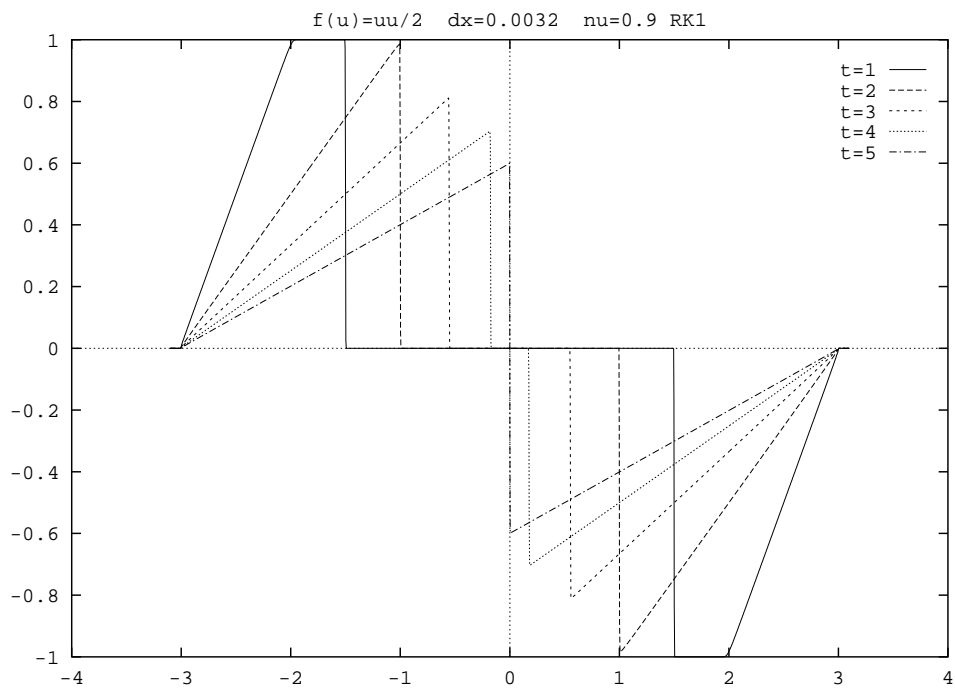


FIG. 4 – Solution approchée de l'équation de Burgers pour $u_0(x)$ définie en (30).

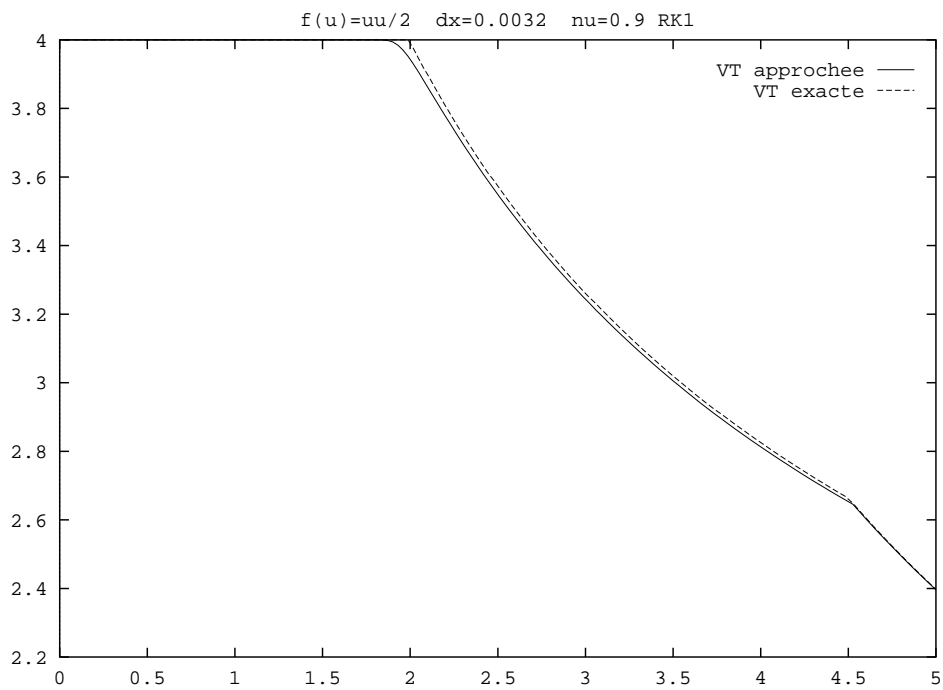


FIG. 5 – Variations totales des solutions approchée et exacte.

passé en revue des schémas décentrés existants qui sont TVD et d'ordre élevé (au sens de l'erreur de troncature et en dehors des extrema). Ces schémas ont été obtenus par adjonction de limiteurs non linéaires sur des schémas linéaires d'ordre élevé. On commence par l'équation d'advection (2) avec c quelconque. On étend ensuite les limiteurs à l'équation de Burgers.

4.1 Equation d'advection

4.1.1 Schémas non limités

On considère ici l'extension de type MUSCL [2] (Monotone Upwind Schemes for Conservation Laws) du schéma décentré vu plus haut. Le traitement pour la partie spatiale de ce schéma conservatif utilise la même fonction de flux numérique que le schéma décentré d'ordre 1, mais appliquée à des arguments différents, obtenus par interpolation affine dans chaque cellule. Le flux s'écrit :

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = c^+ u_{i+\frac{1}{2}}^- + c^- u_{i+\frac{1}{2}}^+ \equiv \phi \left(u_{i+\frac{1}{2}}^-, u_{i+\frac{1}{2}}^+ \right), \quad (32)$$

où ϕ est la fonction de flux numérique du schéma décentré d'ordre 1, et les états interpolés de chaque côté de l'interface de cellules consécutives (en $x_{i+\frac{1}{2}}$), $u_{i+\frac{1}{2}}^-$ et $u_{i+\frac{1}{2}}^+$, sont donnés par :

$$u_{i+\frac{1}{2}}^- = u_i + \frac{1}{2} \left[(1 - \beta) \Delta u_{i+\frac{1}{2}} + \beta \Delta u_{i-\frac{1}{2}} \right], \quad (33)$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^+ = u_{i+1} - \frac{1}{2} \left[(1 - \beta) \Delta u_{i+\frac{1}{2}} + \beta \Delta u_{i+\frac{3}{2}} \right], \quad (34)$$

où le symbole $\Delta u_{i+\frac{1}{2}}$ représente la pente donnée par

$$\Delta u_{i+\frac{1}{2}} = \Delta_- \{u_{i+1}\} = u_{i+1} - u_i \quad (35)$$

et β est un paramètre de décentrage. On obtient dans les cellules des pentes centrés quand $\beta = 0$, et des pentes totalement décentrées quand $\beta = 1$.

L'analyse de l'erreur de troncature de ce schéma donne :

$$\varepsilon^x = (1 - 3\beta) \frac{|c| \Delta x^2}{6} u_{xxx} + \beta \frac{|c| \Delta x^3}{4} u_{xxxx} + O(\Delta x^4). \quad (36)$$

Ce schéma est donc toujours d'ordre au moins 2 en espace. Il est d'ordre 3 en espace quand $\beta = 1/3$. Il serait dommage d'utiliser un tel schéma avec une intégration en temps d'ordre inférieur. On choisira donc un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 :

$$\begin{cases} u_i^* &= u_i^n + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \phi_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \\ u_i^{n+1} &= u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}^* - \phi_{i-\frac{1}{2}}^* \right) \end{cases}, \quad (37)$$

(les valeurs étoilées des flux sont calculées à partir des grandeurs u numériques étoilées correspondantes) ou trois (seulement pour les schémas linéaires)

$$\begin{cases} u_i^* &= u_i^n + \frac{1}{3} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \phi_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \\ u_i^{**} &= u_i^n + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}^* - \phi_{i-\frac{1}{2}}^* \right) \\ u_i^{n+1} &= u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}^{**} - \phi_{i-\frac{1}{2}}^{**} \right) \end{cases}. \quad (38)$$

Etant linéaire et d'ordre supérieur à 1, le schéma global obtenu ne peut pas être TVD (quel que soit le nombre de Courant ν !). Une simulation numérique le prouve aisément. L'advection d'une vague carrée par un tel schéma (Runge-Kutta « 3-linéaire » (38), $\beta = 1/3$, $c = 1$) produit des oscillations visibles sur la Figure 6.

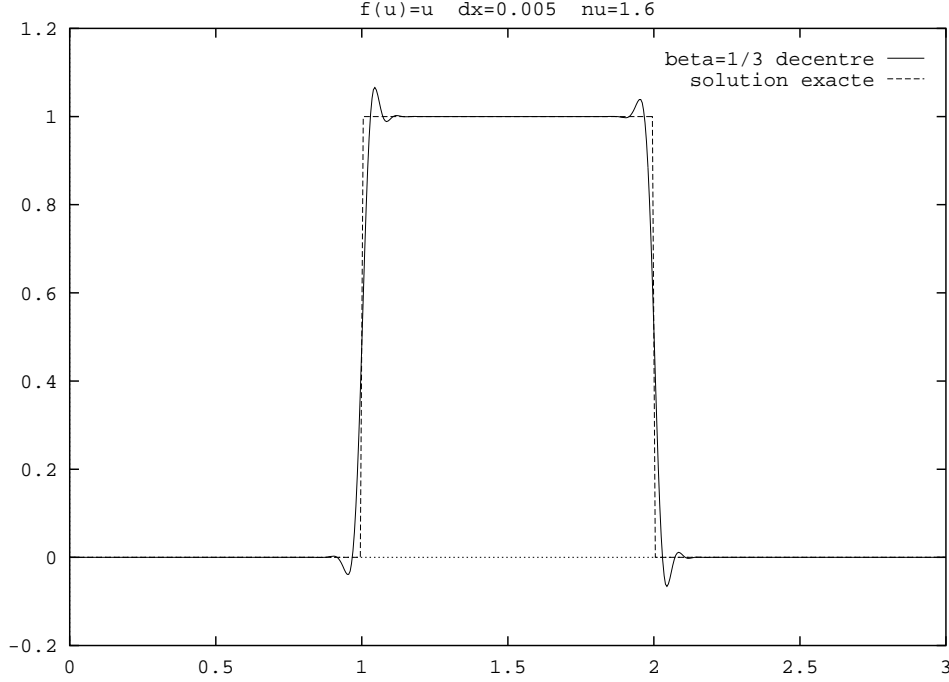


FIG. 6 – Oscillations générées par le β -schéma décentré ($\beta = 1/3$).

La stabilité L^2 de ces schémas peut être prouvée par une analyse de Fourier. On trouve par exemple, que le schéma présenté est stable pour $\nu < 1.63$ [9].

4.1.2 Schémas avec limiteurs

On cherche maintenant à comprendre l'origine de ces oscillations et à les éliminer. Nous reprenons ici l'analyse introduite par Sweby [3], et étendue par Spekreijse [4] à des β -schémas. L'idée de base de cette analyse est la suivante. Considérons le cas où $c > 0$. On sait que le seul schéma linéaire décentré qui soit TVD, est le schéma décentré à gauche d'ordre 1. On va donc essayer de voir tout autre schéma décentré comme une perturbation de celui-ci. Ainsi, le β -schéma décentré à gauche s'écrit ($c > 0$ et schéma explicite d'ordre 1 en temps):

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \nu \Delta_- \left\{ u_i + \frac{1-\beta}{2} \Delta u_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\beta}{2} \Delta u_{i-\frac{1}{2}} \right\}, \quad (39)$$

qui s'écrit aussi

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \nu \Delta u_{i-\frac{1}{2}} - \nu \Delta_- \left\{ \frac{1-\beta}{2} \Delta u_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\beta}{2} \Delta u_{i-\frac{1}{2}} \right\}. \quad (40)$$

Ainsi, à la manière de Sweby, on peut voir le dernier terme de (40), comme un terme d'anti-diffusion, qui transforme le schéma décentré à gauche en β -schéma. Ce dernier terme provoque des oscillations près des discontinuités parce qu'il est trop important. On envisage donc de le « limiter », en le multipliant par un coefficient φ_i , compris entre 0 et 1, à définir. Lorsque $\varphi = 0$, le schéma est réduit au schéma décentré à gauche, et lorsque $\varphi = 1$, on a le β -schéma classique. En utilisant encore les notations de (35), le schéma s'écrit

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \nu \Delta_- \left\{ u_i + \varphi_i \left[\frac{1-\beta}{2} \Delta u_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\beta}{2} \Delta u_{i-\frac{1}{2}} \right] \right\}. \quad (41)$$

On choisit φ_i de manière que,

1. le schéma reste d'ordre 2 (ou 3 quand $\beta = 1/3$) pour une solution u assez régulière,
2. le schéma soit TVD pour un nombre de Courant ν aussi grand que possible.

Comme souvent proposé dans la littérature, les limiteurs sont choisis comme fonction des rapports de gradients consécutifs, i.e.

$$\varphi_i = \varphi(r_i) \text{ avec } r_i = \frac{\Delta u_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta u_{i+\frac{1}{2}}}. \quad (42)$$

Le β -schéma limité se réécrit maintenant:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \nu \Delta u_{i-\frac{1}{2}} \left[1 + \left(\frac{\beta}{2} + \frac{1-\beta}{2r_i} \right) \varphi(r_i) - \left(\frac{\beta}{2} r_{i-1} + \frac{1-\beta}{2} \right) \varphi(r_{i-1}) \right]. \quad (43)$$

Le point 1. ci-dessus est atteint si la fonction φ est choisie assez régulière et de telle sorte que $\varphi(r) \simeq 1$ quand $r \simeq 1$. En effet, pour une solution u suffisamment régulière, en dehors des points où sa dérivée spatiale s'annule, on a:

$$r_i = 1 + O(\Delta x). \quad (44)$$

On a donc les implications (h et Δx sont pris tendant vers 0):

$$\varphi(1+h) = 1 + O(h) \implies \varphi_i = 1 + O(\Delta x), \quad (45)$$

$$\varphi(1+h) = 1 + O(h^2) \implies \varphi_i = 1 + O(\Delta x^2), \quad (46)$$

$$\varphi(1+h) = 1 + O(h^3) \implies \varphi_i = 1 + O(\Delta x^3), \quad (47)$$

et les termes dans l'équation équivalente apportés par l'adjonction des limiteurs, sont de l'ordre de $O(\Delta x^3)$ si on a (45), de l'ordre de $O(\Delta x^4)$ si on a (46) et de l'ordre de $O(\Delta x^5)$ si on a (47). Ainsi, (45) assure que l'on conserve l'ordre 2, et (46) et (47) [séparément] assurent que l'on conserve l'ordre 2 ou 3. Rappelons que les ordres des schémas sont « conservés » en dehors des extrema de la solution u (où la dérivée spatiale s'annule).

Le théorème 4 nous permet de construire des schémas TVD. On a le

Theorem 6 *Si on arrive à trouver une fonction φ pour laquelle il existe des constantes m_1 , m_2 , M_1 et M_2 telles que:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall r \in \mathbb{R} \quad , \quad m_1 \leq \left(\frac{\beta}{2} + \frac{1-\beta}{2r} \right) \varphi(r) \leq M_1 \\ \forall r \in \mathbb{R} \quad , \quad m_2 \leq \left(\frac{\beta}{2} r + \frac{1-\beta}{2} \right) \varphi(r) \leq M_2 \\ \text{et} \quad \quad \quad \quad \quad \quad M_2 \leq 1 + m_1 \end{array} \right. , \quad (48)$$

alors, le schéma (41) est TVD si on a:

$$\nu \leq \frac{1}{1 + M_1 - m_2}. \quad (49)$$

Passons au cas de l'équation d'advection où la vitesse c est négative. Lorsque $c < 0$ (on note $\nu = |c|\Delta t/\Delta x$), le schéma décentré (24) se réduit au schéma décentré à droite, et le β -schéma décentré à droite, qui s'écrit:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \nu \Delta_- \left\{ u_{i+1} - \frac{1-\beta}{2} \Delta u_{i+\frac{1}{2}} - \frac{\beta}{2} \Delta u_{i+\frac{3}{2}} \right\}, \quad (50)$$

est limité comme précédemment. La forme simple

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \nu \Delta_- \left\{ u_{i+1} - \varphi_i \left[\frac{1-\beta}{2} \Delta u_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\beta}{2} \Delta u_{i+\frac{3}{2}} \right] \right\}, \quad (51)$$

peut se transformer en

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \nu \Delta u_{i+\frac{1}{2}} \left[1 - \left(\frac{\beta}{2} t_i + \frac{1-\beta}{2} \right) \varphi(t_i) + \left(\frac{\beta}{2} + \frac{1-\beta}{2t_{i-1}} \right) \varphi(t_{i-1}) \right], \quad (52)$$

à condition de prendre

$$\varphi_i = \varphi(t_i) \text{ et } t_i = 1/r_{i+1} \quad (53)$$

(ici φ peut éventuellement différer de la fonction choisie pour le décentrage à gauche).

Et l'on reconnaît une expression très proche de (43). On voit très simplement que l'on peut utiliser la même fonction φ pour les deux décentrages à gauche et à droite. La précision est assurée (puisque les coefficients t_i ont des développements semblables à ceux des r_i lorsque u_x est non nulle. Le schéma décentré à droite (pour $c < 0$) est TVD sous l'hypothèse (49).

Finalement, dans le cas général, on peut utiliser le **schéma décentré** suivant:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = 0, \quad (54)$$

avec

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = c^+ u_{i+\frac{1}{2}^-} + c^- u_{i+\frac{1}{2}^+} \equiv \phi \left(u_{i+\frac{1}{2}^-}, u_{i+\frac{1}{2}^+} \right), \quad (55)$$

et

$$u_{i+\frac{1}{2}^-} = u_i + \varphi_i^+ \frac{1}{2} \left[(1-\beta) \Delta u_{i+\frac{1}{2}} + \beta \Delta u_{i-\frac{1}{2}} \right], \quad (56)$$

$$u_{i+\frac{1}{2}^+} = u_{i+1} - \varphi_i^- \frac{1}{2} \left[(1-\beta) \Delta u_{i+\frac{1}{2}} + \beta \Delta u_{i+\frac{3}{2}} \right], \quad (57)$$

où les limiteurs ϕ_i^+ et ϕ_i^- sont donnés par

$$\varphi_i^+ = \varphi(r_i) \quad (58)$$

$$\varphi_i^- = \varphi(t_i) \quad (59)$$

en fonction de φ et des rapports r_i et t_i définis respectivement en (42) et (53). Le schéma décentré obtenu est encore TVD sous l'hypothèse (49).

Dans un premier temps, nous nous intéressons au β -schéma limité avec $\beta = 1/2$, qui donne un schéma d'ordre 2 en espace. La moyenne de Van Albada permet de construire un premier limiteur intéressant. La fonction φ s'écrit alors:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{2r}{r^2 + 1}, & \text{si } r > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (60)$$

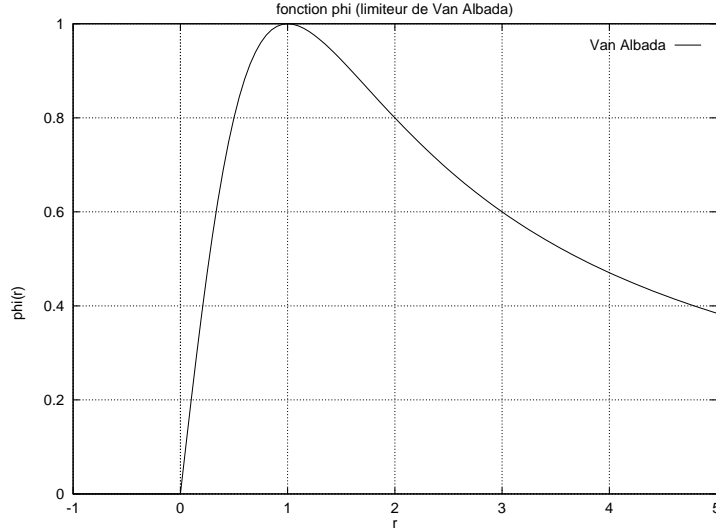


FIG. 7 – limiteur de Van Albada (60).

La fonction précédente, représentée sur la Figure 7, vérifie:

- $\varphi(1+h) = 1 + O(h^2)$ quand $h \rightarrow 0$, donc le schéma limité est bien d'ordre 2 (en dehors des points où $u_x = 0$).
- φ vérifie (48) avec les bornes $m_1 = m_2 = 0$ et $M_1 = M_2 = 0.603$. Donc le schéma limité est TVD si $\nu \leq 0.623$.

Ce schéma d'ordre 2 en espace est en fait utilisé avec le schéma explicite d'ordre 2 en temps (37). On observe que le schéma obtenu est TVD pour $\nu \leq 1$, ce qui est un assez bon résultat. On comparera les performances de ce schéma dans la dernière section.

Citons enfin un schéma proposé par Hancock (cité en 1981 par B. Van Leer dans [10]). Il s'agit d'obtenir un schéma d'ordre 2 en temps sans effectuer deux sous-pas aussi coûteux que dans le schéma de Runge-Kutta précédent. On peut voir ce schéma comme un prédicteur-correcteur. Celui-ci s'écrit, pour l'équation d'advection avec $c > 0$,

$$\begin{cases} u_i^* &= u_i^n - \frac{\nu}{2} p_i^n, \\ u_i^{n+1} &= u_i^n - \nu \Delta_- \left[u_i^* + \frac{1}{2} p_i^n \right], \end{cases} \quad (61)$$

où p_i^n , qui joue le rôle du gradient de u , est donné par

$$p_i^n = \frac{1}{2} \varphi(r_i) \left[\Delta u_{i-\frac{1}{2}} + \Delta u_{i+\frac{1}{2}} \right],$$

et toutes les autres grandeurs sont définies plus haut. Cette méthode permet effectivement d'obtenir un schéma d'ordre 2 en temps très peu cher, puisque le premier sous pas est très simple.

On peut montrer que ce schéma est TVD (avec le limiteur de Van Albada) pour $\nu \leq 0.857$, ce qui représente aussi un gain appréciable en efficacité. Par contre, la simplicité de l'étude du schéma provient de la nature linéaire du flux, puisqu'il y a quasiment confusion (à c près) entre le gradient du flux cu et le gradient de la variable u elle-même. L'extension à l'équation de Burgers ne parait pas immédiate, et nous en resterons là avec ce prédicteur.

On s'intéresse maintenant au β -schéma limité avec $\beta = 1/3$, qui donne un schéma d'ordre 3 en espace. Pour ce schéma, Spekreijse a proposé [4] le limiteur utilisant la fonction φ suivante:

$$\varphi(r) = \frac{3r^3 - 2r^2 + 3r}{2r^4 + 2}. \quad (62)$$

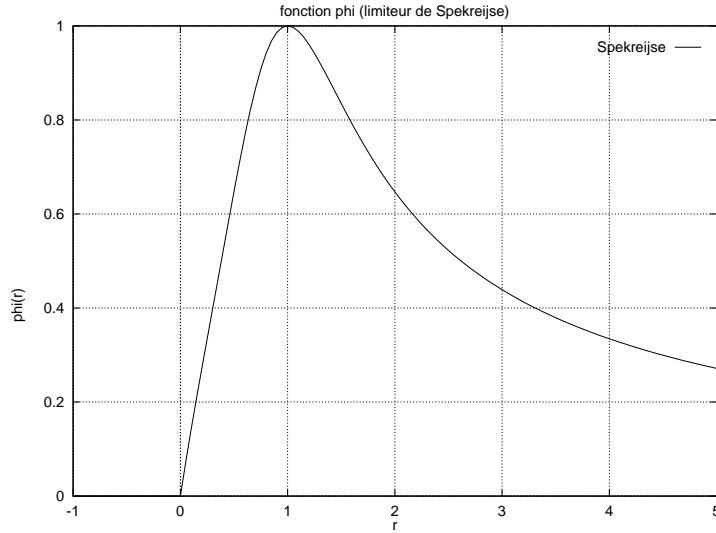


FIG. 8 – limiteur de Spekreijse (62).

Cette fonction, représentée sur la Figure 8, a les propriétés suivantes ($\beta = 1/3$):

- $\varphi(1+h) = 1 + O(h^2)$ quand $h \rightarrow 0$, donc le schéma limité est bien d'ordre 3 (en dehors des points où $u_x = 0$),
- φ vérifie (48) avec les bornes $m_1 = -0.0387$, $M_1 = 0.5595$, $m_2 = -0.3694$ et $M_2 = 0.5126$. Donc le schéma limité est TVD si $\nu \leq 0.518$.

Ce nouveau schéma est en fait utilisé avec un schéma en temps de type Runge-Kutta d'ordre 3, afin d'avoir des erreurs temporelle et spatiale du même ordre (puisque une condition de stabilité de type CFL relie Δx et Δt entre eux). Les limiteurs étant non linéaires, on choisit le schéma suivant, surnommé « RK3-non linéaire », d'ordre 3 dans le cas général:

$$\begin{cases} u_i^* &= u_i^n + \frac{1}{3} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \phi_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \\ u_i^{**} &= u_i^n + \frac{2}{3} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}^* - \phi_{i-\frac{1}{2}}^* \right) \\ u_i^{n+1} &= u_i^n + \frac{3}{4} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}^{**} - \phi_{i-\frac{1}{2}}^{**} \right) + \frac{1}{4} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \phi_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \end{cases} \quad (63)$$

où les valeurs étoilées des flux sont encore calculées à partir des grandeurs u numériques étoilées correspondantes. La démonstration que le β -schéma limité, utilisé avec un schéma en temps à plusieurs pas, est TVD, reste encore à trouver. On observe cependant que le schéma global obtenu est TVD pour $\nu < 0.96$, ce qui est un peu décevant. Nous verrons, dans la section suivante, comment ces limiteurs peuvent être améliorés, afin de produire un schéma globalement plus précis et plus stable.

4.2 Equation de Burgers

Le besoin de limiteur est peut-être encore plus grand pour les équations de Burgers, où des oscillations engendrent elles-mêmes des chocs et des détentes, qui sont des phénomènes non linéaires. Ces oscillations sont également très pénalisantes pour des simulations numériques d'écoulements compressibles (équations d'Euler).

Le schéma conservatif présenté plus haut s'étend directement à l'équation de Burgers. Il suffit de prendre un flux décentré. On se propose d'utiliser encore le flux de Godunov. Le schéma complet s'écrit sous la forme (63), où le flux numérique $\phi_{i+\frac{1}{2}}$ est égal au flux de Godunov

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi_{\text{Godunov}}(u_{i+\frac{1}{2}}^-, u_{i+\frac{1}{2}}^+), \quad (64)$$

entre les états limités $u_{i+\frac{1}{2}}^-$ et $u_{i+\frac{1}{2}}^+$ donnés par (56)-(59). On observe que le schéma proposé est également TVD pour l'équation de Burgers, toujours pour un nombre de Courant vérifiant $\nu < 0.96$.

5 Nouveaux schémas avec limiteurs

Dans cette section, nous proposons essentiellement deux nouveaux schémas. Le premier est fondé sur des flux décentrés de type MUSCL, adapté à la valeur $\beta = 1/3$ et utilise des limiteurs comparables à ceux de Spekreijse.

Le second schéma proposé ressemble au précédent, mais il est fondé sur des flux centrés de type MUSCL, dont on peut montrer qu'ils donnent un schéma précis à l'ordre 4 en espace pour $\beta = 1/3$.

5.1 Un schéma décentré d'ordre 3

5.1.1 Construction d'un nouveau limiteur

La construction d'un limiteur plus efficace que celui de Spekreijse se fonde sur la remarque suivante. Tous les β -schémas (sans limiteurs) ne se comportent pas de manière équivalente près des discontinuités. Ainsi, le schéma à pentes centrées ($\beta = 0$) se comporte mieux dans une discontinuité où $r = \pm\infty$ que dans une zone où $r = 0$. Ceci est montré sur la Figure 9, où l'on a fait advecter une vague carrée.

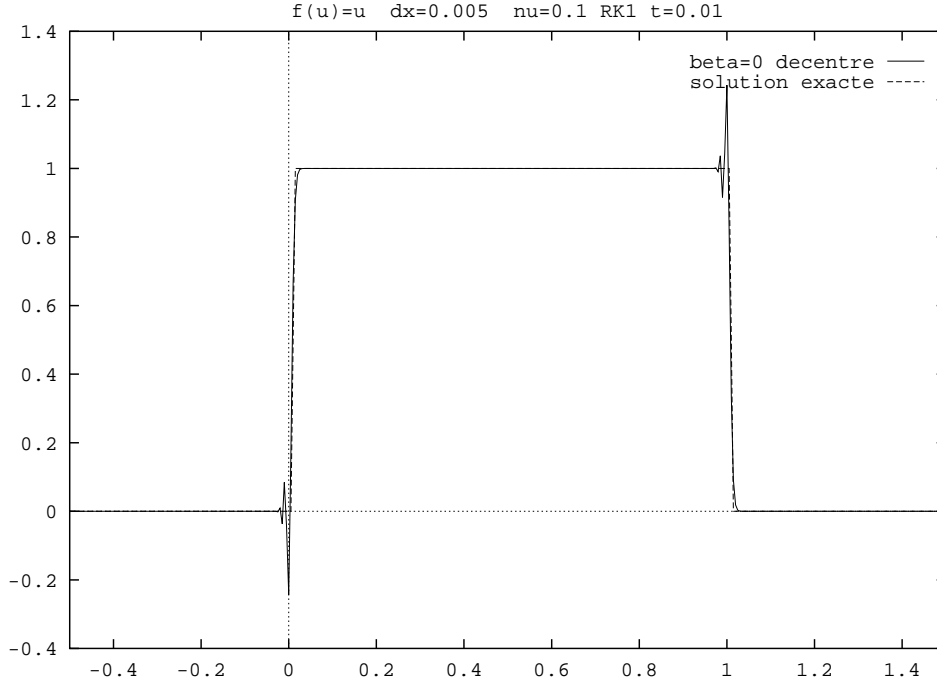


FIG. 9 – Oscillations générées par le 0-schéma pour $r = 0$ (et non pas pour $r = \pm\infty$).

Au contraire, le schéma à pentes totalement décentrées ($\beta = 1$) se comporte mieux dans une discontinuité où $r = 0$ que dans une zone où $r = \pm\infty$. Ceci est montré sur la Figure 10, où l'on a fait advecter la même vague carrée.

Le flux numérique inhérent au schéma limité (41) peut aussi être écrit:

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = u_i + \Delta u_{i-\frac{1}{2}} \theta(r_i), \quad (65)$$

avec

$$\theta(r) = \varphi(r) \left[\frac{1-\beta}{2r} + \frac{\beta}{2} \right]. \quad (66)$$

On voit que, quand $r \rightarrow 0$, $\theta(r) \rightarrow 1/2$. Ceci était également vrai pour le 1-schéma sans limiteur, qui n'oscille pas dans une zone où $r \rightarrow 0$.

Par contre, quand $r \rightarrow \pm\infty$, $\theta(r) \sim 1/(4r)$. Or pour le 0-schéma sans limiteur, on avait $\theta(r) \sim 1/(2r)$. On note d'ailleurs que le limiteur de Spekreijse ne ressemble à aucun β -schéma quand $r \rightarrow \pm\infty$.

On se propose alors de construire un nouveau limiteur. On requiert les propriétés suivantes:

- $\varphi(1+h) = 1 + O(h^3)$ quand $h \rightarrow 0$. Le nouveau limiteur conservera l'ordre 3 et sera encore moins actif dans les zones de régularité.
- pour $\beta = \frac{1}{3}$, $\theta(r) \rightarrow \frac{1}{2}$, quand $r \rightarrow 0$. Ce qui nécessite $\varphi(r) \sim \frac{3r}{2}$, quand $r \rightarrow 0$.
- pour $\beta = \frac{1}{3}$, $\theta(r) \sim \frac{1}{2r}$, quand $r \rightarrow \pm\infty$. Ce qui nécessite $\varphi(r) \sim \frac{3}{r}$, quand $r \rightarrow \pm\infty$.

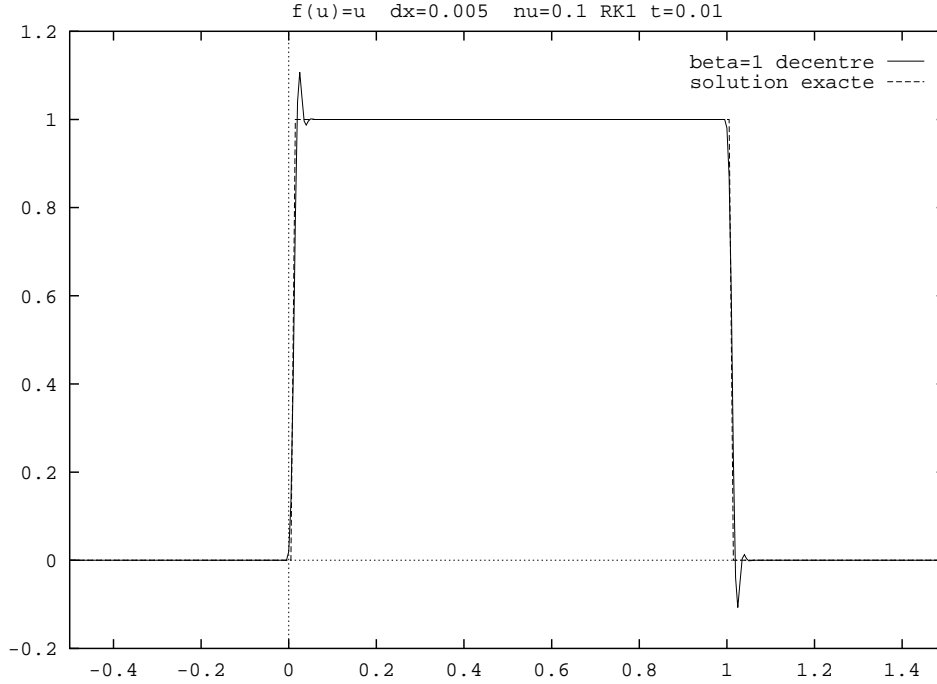


FIG. 10 – Oscillations générées par le 1-schéma pour $r = \pm\infty$ (et non pas $r = 0$).

– on se restreint à $\varphi(r) = 0$ si $r < 0$ (cette restriction n'a aucune influence sur le limiteur de Spekreijse)

On a choisi la fonction suivante:

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0 \\ \frac{3r^4 - 7r^3 + 3r^2 + 3r}{2} & \text{si } 0 \leq r \leq 1 \\ \frac{3r^2 - 6r + 19}{r^3 - 3r + 18} & \text{si } 1 \leq r \end{cases} . \quad (67)$$

Ce nouveau limiteur, représenté sur la Figure 11 vérifie (48) avec les bornes $m_1 = 0$, $M_1 = 0.655$, $m_2 = 0$ et $M_2 = 0.654$. Donc le schéma décentré (54)-(59) avec le nouveau limiteur est TVD si $\nu \leq 0.604$, ce qui laisse présager un plus grand domaine de stabilité. Il est toujours précis à l'ordre 3 (sauf aux points où $u_x = 0$) et devrait être moins actif que le limiteur de Spekreijse dans les zones où u est régulière et monotone.

5.1.2 Comparaisons des performances

Lorsque le nouveau limiteur est utilisé avec le schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 non linéaire (63), l'expérience montre que le schéma global est TVD jusqu'à $\nu < 1.05$, au lieu de $\nu < 0.96$ pour le limiteur de Spekreijse, ce qui constitue un gain appréciable.

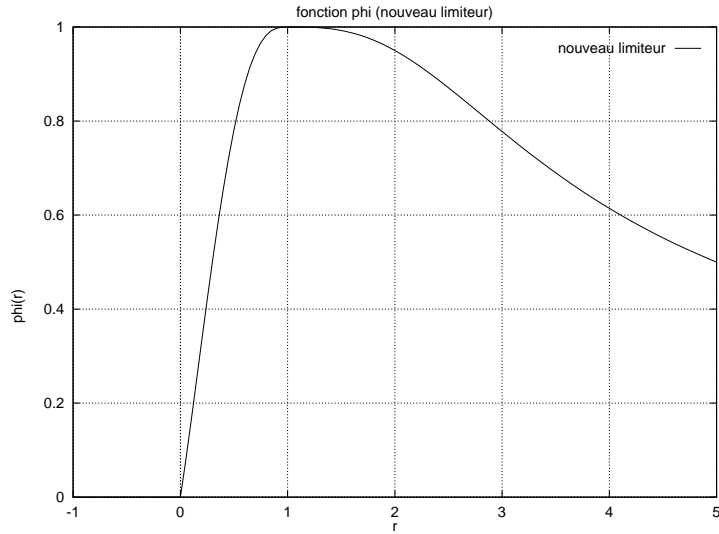


FIG. 11 – *Un nouveau limiteur pour $\beta = 1/3$ (67).*

D'autre part, le nouveau limiteur apporte également un certain gain en précision sur des solutions discontinues. En effet, nous avons considéré l'advection d'une vague carrée (située au départ entre $x = 0$ et $x = 1$, avec $c = 1$). Nous avons choisi le schéma en temps précédent (d'ordre 3) avec un nombre de Courant égal à $\nu = 0.9$ (avec $\Delta x = 0.0008$), afin que les deux limiteurs produisent un schéma stable. En fonction du temps, nous avons tracé sur la Figure 12 l'erreur en norme L_1 entre la solution approchée et la solution exacte.

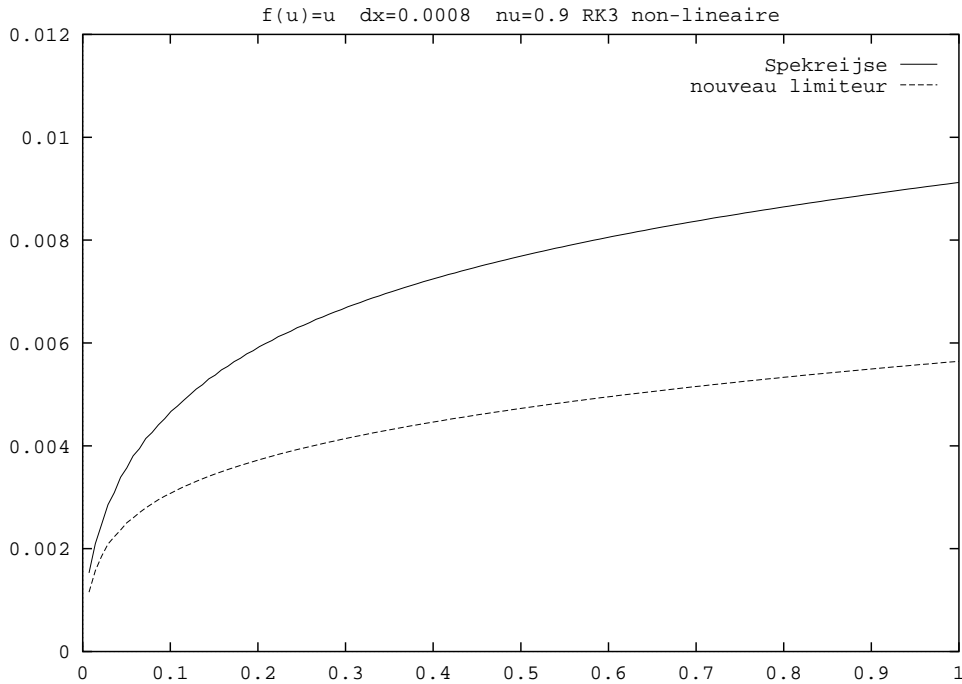


FIG. 12 – *Erreurs en norme L_1 pour les deux limiteurs d'ordre 3.*

Le nouveau limiteur réduit l'erreur de près de 40%. En prenant ce nouveau limiteur avec un pas d'espace égal à $\Delta x = 0.0014$, on aurait obtenu la même précision qu'avec le limiteur de Spekreijse et $\Delta x = 0.0008$, qui correspondrait à un temps de calcul plus de trois fois supérieur.

Pour l'équation de Burgers, on se propose de comparer les résultats numériques obtenus avec le β -schéma ($\beta = 1/3$) non limité, puis avec les deux limiteurs présentés (celui de Spekreijse et celui proposé ici). On utilise à nouveau le cas test utilisé pour le schéma d'ordre 1 (u_0 donnée par (30), et solution entropique bornée dessinée sur la Figure 3).

On présente sur la Figure 13 la solution approchée à différents instants intermédiaires. Le

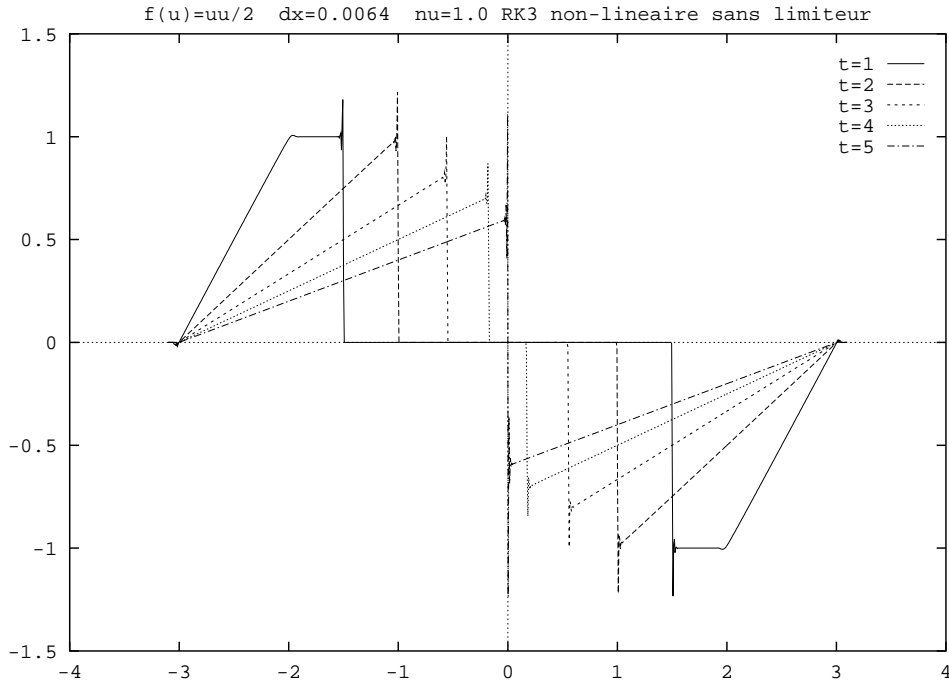


FIG. 13 – *Solution approchée à différents instants (sans limiteur).*

β -schéma avec $\beta = 1/3$ n'est en fait jamais TVD lorsqu'on n'ajoute pas de limiteur. Le schéma global obtenu est cependant stable, pour ν assez petit (comme dans le cas linéaire).

L'ajout d'un limiteur assure que le schéma est TVD (pour le schéma explicite en temps d'ordre 1). Par exemple, le nouveau limiteur (67), utilisé avec (63) et $\nu = 1.05$ donne une solution approchée satisfaisante, qui est présentée sur la Figure 14.

Comme pour l'advection, on compare l'erreur L_1 entre la solution exacte et les solutions approchées obtenues avec le limiteur de Spekreijse et le limiteur (67). Pour pouvoir faire cette comparaison, on choisit $\Delta x = 0.0064$ et $\nu = 0.9$. Les deux courbes sont présentées sur la Figure 15.

Ici encore, le nouveau limiteur fournit une solution dont l'erreur est moindre (de 40% environ). Ce gain en précision peut être transformé en gain en temps de calcul, en prenant un pas d'espace plus grand.

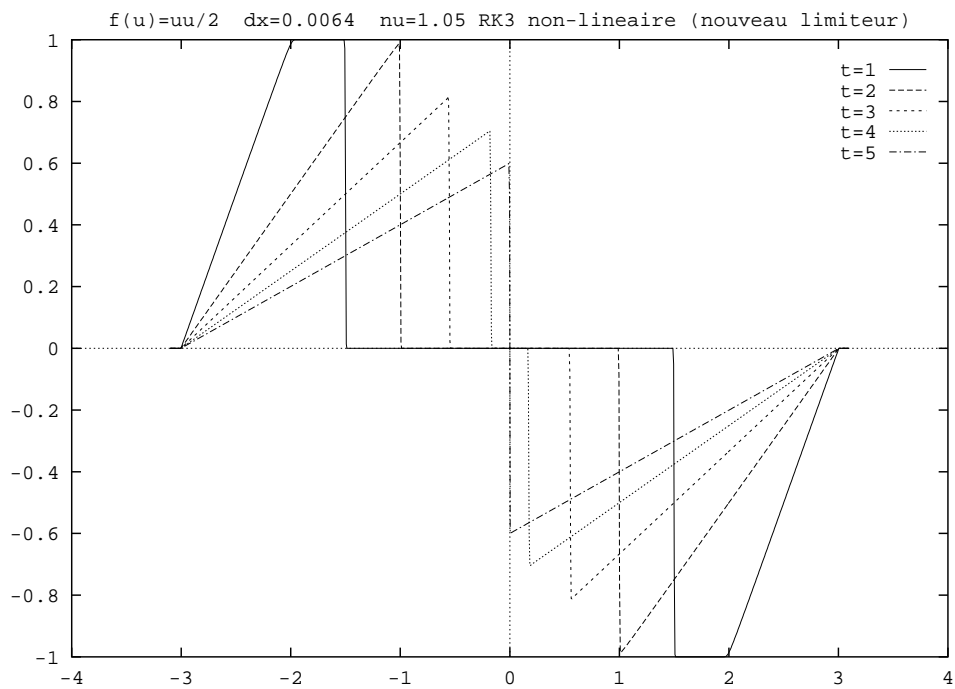


FIG. 14 – Solution approchée à différents instants, avec le limiteur (67).

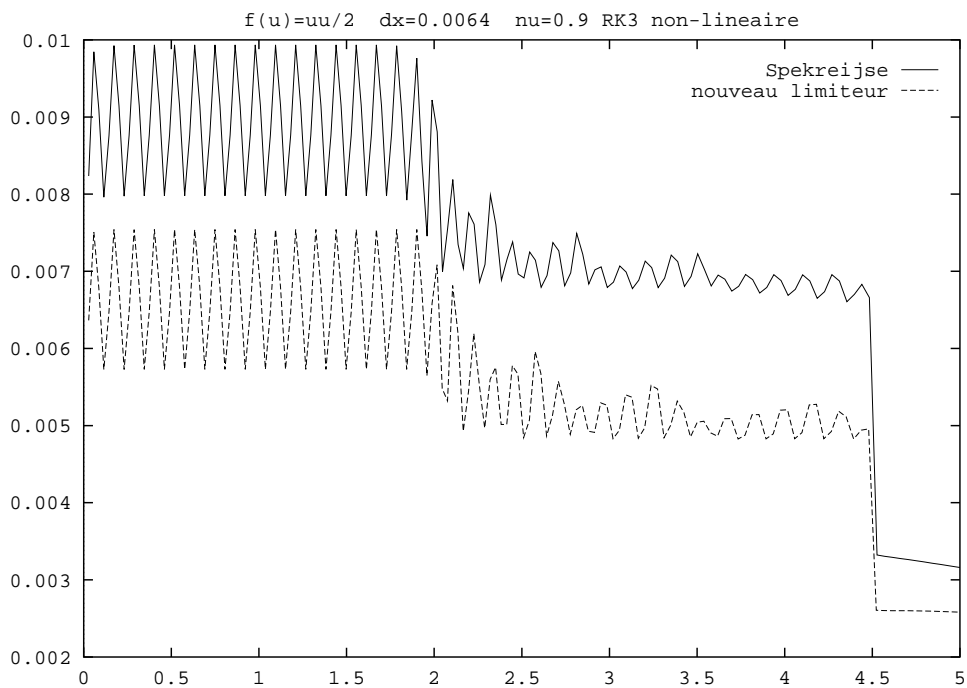


FIG. 15 – Erreurs L_1 pour les solutions approchées obtenues avec les deux limiteurs.

5.2 Un schéma centré d'ordre 4

Tous les schémas vus jusqu'ici sont décentrés. Le décentrage, qui correspond à sélectionner les informations des cellules voisines en fonction de leur sens de propagation, revient à rajouter une certaine quantité de diffusion numérique. D'ailleurs, les flux numériques décentrés sont définis comme étant la somme de flux centrés et de termes diffusifs. On s'intéresse ici aux mêmes schémas que précédemment, en utilisant maintenant des flux centrés, avec l'espoir d'obtenir un gain en précision. Nous essaierons ensuite de rajouter des limiteurs, afin d'obtenir un schéma TVD. On s'intéresse dans un premier temps à l'équation d'acvection linéaire (2).

5.2.1 Schéma non limité

On considère les flux numériques suivants:

$$\begin{aligned}\phi_{i+\frac{1}{2}}^c &= c \frac{u_{i+\frac{1}{2}}^- + u_{i+\frac{1}{2}}^+}{2}, \\ \phi_{i+\frac{1}{2}}^d &= c^+ u_{i+\frac{1}{2}}^- + c^- u_{i+\frac{1}{2}}^+, \\ \phi_{i+\frac{1}{2}} &= \gamma \phi_{i+\frac{1}{2}}^d + (1 - \gamma) \phi_{i+\frac{1}{2}}^c,\end{aligned}\tag{68}$$

où les états interpolés de chaque côté de l'interface de cellules consécutives (en $x_{i+\frac{1}{2}}$), $u_{i+\frac{1}{2}}^-$ et $u_{i+\frac{1}{2}}^+$, sont encore donnés par :

$$u_{i+\frac{1}{2}}^- = u_i + \frac{1}{2} \left[(1 - \beta) \Delta u_{i+\frac{1}{2}} + \beta \Delta u_{i-\frac{1}{2}} \right],\tag{69}$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^+ = u_{i+1} - \frac{1}{2} \left[(1 - \beta) \Delta u_{i+\frac{1}{2}} + \beta \Delta u_{i+\frac{3}{2}} \right].\tag{70}$$

On montre que le flux précédent donne un schéma d'ordre 4 en espace pour les valeurs $\gamma = 0$ (flux centrés) et $\beta = 1/3$. L'erreur de troncature est alors donnée par :

$$\varepsilon^x = -\frac{|c| \Delta x^5}{30} u_{xxxxx} + O(\Delta x^6).\tag{71}$$

Il est à noter que dans le développement de l'erreur de troncature, tous les termes de diffusions (nombre pair de dérivées en espace) disparaissent.

Ce schéma étant d'ordre 4, on utilise simultanément un schéma temporel d'ordre 4, même dans le cas non linéaire (pour l'adjonction future de limiteurs). On choisit le schéma de type Runge-Kutta suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i^* = u_i^n + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \phi_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \\ u_i^{**} = u_i^n + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}^* - \phi_{i-\frac{1}{2}}^* \right) \\ u_i^{***} = u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}^{**} - \phi_{i-\frac{1}{2}}^{**} \right) \\ u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{1}{6} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(\phi_{i+\frac{1}{2}}^{***} - \phi_{i-\frac{1}{2}}^{***} \right) + 2 \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}^{**} - \phi_{i-\frac{1}{2}}^{**} \right) \right. \\ \left. + \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}^n - \phi_{i-\frac{1}{2}}^n \right) + 2 \left(\phi_{i+\frac{1}{2}}^* - \phi_{i-\frac{1}{2}}^* \right) \right]\end{array} \right.\tag{72}$$

où les valeurs étoilées des flux sont encore calculées à partir des grandeurs numériques étoilées correspondantes.

Le schéma d'ordre 4 en temps et en espace obtenu, étant linéaire, ne peut être TVD. Une analyse en mode de Fourier montre cependant qu'il est stable en norme L^2 pour $\nu < 2.06$ [9]. On cherche maintenant à rajouter des limiteurs pour rendre le schéma TVD. Dans la suite, on ne se limitera pas au cas $\beta = 1/3$ et $\gamma = 0$, bien que ce jeu de paramètres uniquement donne un schéma d'ordre 4.

5.2.2 Schéma avec limiteurs

Pour simplifier les écritures, on se limite au cas où $c > 0$. Comme précédemment, on rajoute quelques limiteurs dans le flux (68), sous la forme de facteurs multiplicatifs φ_i et ψ_i , destinés à être positifs et plus petits que 1. On étudie donc un nouveau flux numérique de la forme suivante (avec $c = 1$):

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = u_i + \frac{1 - \beta\gamma}{2} \varphi_i \Delta u_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\beta}{4} \psi_i \left((\gamma + 1) \Delta u_{i-\frac{1}{2}} + (\gamma - 1) \Delta u_{i+\frac{3}{2}} \right). \quad (73)$$

On remarque que, lorsque $\varphi_i = \psi_i = 1$, on retrouve le schéma non limité (68). Comme pour le schéma d'ordre 3 de la section précédente, on va chercher des limiteurs φ_i et ψ_i de telle sorte que:

- le flux numérique (73) garde la même précision que sa version non limitée (donc qu'il reste d'ordre 4 quand $\beta = 1/3$ et $\gamma = 0$),
- ce flux numérique, utilisé avec le schéma en temps explicite et d'ordre 1 (forward-Euler), soit TVD pour un nombre de Courant ν aussi grand que possible.

Le schéma global (en temps et en espace) peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} = & u_i^n - \nu \Delta u_{i-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1 - \beta\gamma}{2} \left(\frac{\varphi_i}{r_i} - \varphi_{i-1} \right) \right. \\ & + \frac{\beta}{4} \psi_i \left(\gamma + 1 + \frac{\gamma - 1}{r_i r_{i+1}} \right) \\ & \left. - \frac{\beta}{4} \psi_{i-1} r_{i-1} \left(\gamma + 1 + \frac{\gamma - 1}{r_i r_{i-1}} \right) \right], \end{aligned} \quad (74)$$

où les coefficients r_i sont encore donnés par les rapports de gradients consécutifs (42).

On choisit les limiteurs φ_i et ψ_i comme des fonctions des coefficients r_i et r_{i+1} . Notre choix s'est porté sur des limiteurs de la forme suivante:

$$\begin{cases} \varphi_i &= \varphi(r_i), \\ \psi_i &= \psi_1(r_i) \psi_2(r_{i+1}). \end{cases} \quad (75)$$

A nouveau, si les trois fonctions φ , ψ_1 et ψ_2 sont assez régulières autour de 1, et telles que:

$$\varphi(1+h) = \psi_1(1+h) = \psi_2(1+h) = 1 + O(h^3), \text{ pour } h \text{ assez petit}, \quad (76)$$

alors le schéma obtenu est encore d'ordre 4 en espace en dehors des points où $u_x = 0$, puisqu'on a alors $r_i = r_{i-1} = r_{i+1} = 1 + O(\Delta x)$, et tous les termes apportés par les limiteurs dans l'équation équivalente du schéma sont des $O(h^5)$.

D'un autre côté, le théorème 4 nous permet de choisir les fonctions pour que le schéma soit TVD. On se restreint à des fonctions φ , ψ_1 et ψ_2 nulles sur \mathbb{R}^- . On a le

Theorem 7 *Si les fonctions φ , ψ_1 et ψ_2 sont telles que:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall r \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \varphi(r) \leq M_1, \\ \forall r \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \frac{\varphi(r)}{r} \leq M_2, \\ \forall (r, s) \in \mathbb{R}^2, \quad \left| \psi_1(r)\psi_2(s) \left(1 + \gamma - \frac{1-\gamma}{rs} \right) \right| \max(1, |r|) \leq M_3, \\ \text{et} \quad (1-\beta\gamma) M_1 + \beta M_3 \leq 2 \end{array} \right. \quad (77)$$

alors, le schéma d'ordre 1 en temps construit sur le flux numérique (73) est TVD si

$$\frac{1}{\nu} \geq 1 + \frac{1-\beta\gamma}{2} M_2 + \frac{\beta}{2} M_3. \quad (78)$$

La démonstration de ce théorème est assez élémentaire. Elle utilise évidemment le théorème 4, à partir de l'expression (74).

Nous choisissons, pour $\gamma = 0$ et $\beta = 1/3$ le jeu de fonctions φ , ψ_1 et ψ_2 suivant (voir Figure 16) :

$$\left\{ \begin{array}{l} r \leq 0 \quad \varphi(r) = \psi_1(r) = \psi_2(r) = 0 \\ 0 \leq r \leq 1 \quad \varphi(r) = -3r^5 + 11r^4 - 14r^3 + 6r^2 + r, \quad \psi_1(r) = \psi_2(r) = \frac{r^3}{r^3 + (1-r)^3} \\ 1 \leq r \quad \varphi(r) = \psi_2(r) = 1, \quad \psi_1(r) = \frac{1}{1 + (r-1)^3} \end{array} \right. \quad (79)$$

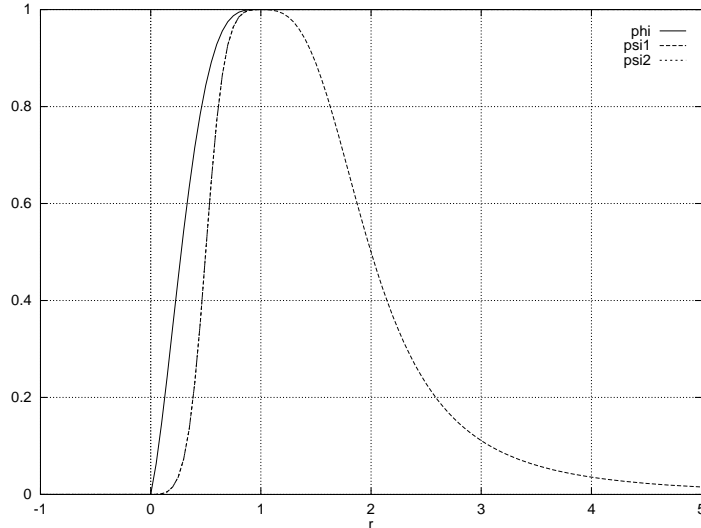


FIG. 16 – Fonctions φ , ψ_1 et ψ_2 pour $\gamma = 0$ et $\beta = 1/3$ (79).

Remarque: on a préféré prendre $\varphi'(0) = 1$. En effet, pour cette valeur, lorsque $r_i \rightarrow 0$, le flux numérique $\phi_{i+\frac{1}{2}}$ de (73) tend vers $u_i + \Delta u_{i-\frac{1}{2}}/2$. Or, on peut vérifier que, le β -schéma avec

des flux décentrés et $\beta = 1$, qui donnait de bon résultats quand $r_i \rightarrow 0$ (voir Figure 10), donne le même flux. De même, on vérifie que, lorsque $r_i \rightarrow \pm\infty$, le flux numérique $\phi_{i+\frac{1}{2}}$ de (73) tend vers $u_i + \Delta u_{i+\frac{1}{2}}/2$, qui est donné aussi par le β -schéma avec des flux décentrés et $\beta = 0$, qui donnait de bon résultats quand $r_i \rightarrow \pm\infty$ (voir Figure 9). La fonction φ précédente est telle que $\varphi^{(3)}_{rrr}(1) = 0$, ce qui n'est pas nécessaire pour avoir un schéma d'ordre 4, mais cela rend les limiteurs encore moins actifs dans les zones où u est régulière.

Lorsque l'on choisit $\beta = 1/3$ et $\gamma = 0$, les fonctions φ , ψ_1 et ψ_2 vérifient les hypothèses du théorème 7 avec les constantes $m_1 = 1$, $M_2 = 1.8$ et $M_3 = 4/3$. On en déduit que le schéma explicite d'ordre 1 en temps et utilisant le flux numérique (73) est TVD si $\nu \leq 0.47$. Lorsqu'on utilise le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 (même en non linéaire) (72), on observe que le schéma obtenu est TVD si $\nu \leq 1.28$.

Rappelons l'expression du flux numérique limité d'ordre 4 dans le cas où $c > 0$:

$$\frac{1}{c}\phi_{i+\frac{1}{2}}^{c>0} = u_i + \frac{1-\beta\gamma}{2}\varphi(r_i)\Delta u_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\beta}{4}\psi_1(r_i)\psi_2(r_{i+1})\left((\gamma+1)\Delta u_{i-\frac{1}{2}} + (\gamma-1)\Delta u_{i+\frac{3}{2}}\right), \quad (80)$$

où les r_i sont les rapports de gradients

$$r_i = \frac{\Delta u_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta u_{i+\frac{1}{2}}}.$$

Pour l'advection linéaire dans le cas $c < 0$, on trouve que l'on peut mettre au point de la même manière des limiteurs similaires. Le flux numérique s'écrira alors:

$$\frac{1}{c}\phi_{i+\frac{1}{2}}^{c<0} = u_{i+1} - \frac{1-\beta\gamma}{2}\varphi(t_i)\Delta u_{i+\frac{1}{2}} - \frac{\beta}{4}\psi_1(t_i)\psi_2(t_{i-1})\left((\gamma+1)\Delta u_{i+\frac{3}{2}} + (\gamma-1)\Delta u_{i-\frac{1}{2}}\right), \quad (81)$$

où les fonctions φ , ψ_1 et ψ_2 sont les mêmes que précédemment, et les t_i sont donnés par

$$t_i = \frac{\Delta u_{i+\frac{3}{2}}}{\Delta u_{i+\frac{1}{2}}}.$$

On voit que ces deux expressions ne s'expriment pas simplement comme des flux centrés pris entre deux états qu'il est possible de définir sans indication sur le signe de c . Le sens profond de cette observation est le suivant: le flux décentré d'ordre 1 est TVD parce qu'il ajoute de la diffusion. On ne peut augmenter son ordre qu'en rajoutant de l'antidiffusion. Ceci ne peut être fait qu'avec un schéma de type décentré (flux décentré entre deux nouveaux états interpolés/limités plus précisément) qui sélectionne les sens de propagation des caractéristiques pour apporter une diffusion de signe constant. Ainsi, on ne pourra probablement pas créer un schéma centré TVD d'ordre 4. Par contre, comme tout flux centré s'écrit comme un flux décentré entre deux états égaux (par conservativité du flux décentré), on pourra écrire notre schéma comme un flux décentré.

Les deux équations (80) et (81) peuvent s'écrire, pour toute valeur de c :

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi^d\left(u_{i+\frac{1}{2}}^-, u_{i+\frac{1}{2}}^+\right) \equiv c^+ u_{i+\frac{1}{2}}^- + c^- u_{i+\frac{1}{2}}^+, \quad (82)$$

avec

$$u_{i+\frac{1}{2}}^- = u_i + \frac{1-\beta\gamma}{2}\varphi(r_i)\Delta u_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\beta}{2}\psi_1(r_i)\psi_2(r_{i+1})\left(\frac{\gamma+1}{2}\Delta u_{i-\frac{1}{2}} + \frac{\gamma-1}{2}\Delta u_{i+\frac{3}{2}}\right) \quad (83)$$

et

$$u_{i+\frac{1}{2}^+} = u_{i+1} - \frac{1-\beta\gamma}{2}\varphi(t_i)\Delta u_{i+\frac{1}{2}} - \frac{\beta}{2}\psi_1(t_i)\psi_2(t_{i-1})\left(\frac{\gamma-1}{2}\Delta u_{i-\frac{1}{2}} + \frac{\gamma+1}{2}\Delta u_{i+\frac{3}{2}}\right). \quad (84)$$

Remarque: on vérifiera bien que, si l'on omet les limiteurs (les fonctions φ , ψ_1 et ψ_2) dans les expressions précédentes, on retrouve le flux classique pour l'advection linéaire du $\beta\gamma$ -modèle, c'est-à-dire le flux numérique donné par (68) avec les états interpolés non limités (69-70).

5.2.3 Application à l'équation de Burgers

La formulation précédente s'étend aussi facilement que n'importe quel schéma de type MUSCL. On utilisera à nouveau une forme décentrée pour des flux éventuellement centrés. Ainsi, si l'on choisit le flux de Godunov, qui est un flux décentré, le flux numérique s'écrira:

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \phi_{\text{Godunov}}\left(u_{i+\frac{1}{2}^-}, u_{i+\frac{1}{2}^+}\right), \quad (85)$$

où le flux numérique de Godunov est défini en (27) et les états interpolés à l'interface et limités $u_{i+\frac{1}{2}^-}$ et $u_{i+\frac{1}{2}^+}$ sont donnés par (83-84).

5.2.4 Comparaisons des résultats

On se propose de comparer ici les résultats obtenus avec le schéma précédent ($\beta = 1/3$ et $\gamma = 0$) avec ou sans limiteurs. Lorsqu'on omet les limiteurs, le schéma est linéairement stable jusqu'à $\nu \leq 2.06$. Cependant, pour la donnée initiale proposée en (30), dont l'unique solution entropique bornée est dessinée en Figure 3, le schéma est instable à partir du moment où le choc stationnaire apparaît, et cela pour tout nombre de Courant ν . La solution à $t = 5$ ne peut pas être obtenue. De plus, on obtient pour $\nu = 1.3$ des solutions intermédiaires comportant de très fortes oscillations parasites. Le fait que le schéma ne soit pas TVD a des conséquences plus graves en non linéaire (Burgers) que pour l'advection linéaire. Pour l'équation de Burgers, chaque petite oscillation crée des chocs et des détonations supplémentaires. Notons également que ces oscillations parasites ont tendance à entraîner une limitation inutile du pas de temps à cause de (29).

L'ajout de limiteurs assure que le schéma est TVD (pour le schéma explicite en temps d'ordre 1). Pour le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 (72), on observe que le schéma reste TVD jusqu'à $nu \leq 1.28$. On obtient des états intermédiaires sont pour $\nu = 1.28$ sans oscillations et proches de ceux présentés en Figure 14.

Dans la suite, on compare les différents schémas TVD présentés dans ce rapport. Il convient de faire une analyse assez fine de leur efficacité (évaluation des gains en précision et des augmentations des coûts de calcul).

6 Discussion

Dans cette section, on se propose de comparer les performances des différents schémas considérés. La comparaison est faite de la manière suivante: pour chaque cas-test, on se fixe un certain temps de calcul C pour faire la simulation numérique. On choisit dans tous les cas le nombre de Courant ν maximal qui assure la décroissance de la variation totale. On ajuste le pas d'espace Δx (le maillage est toujours supposé régulier) pour que le temps de calcul soit égal à la valeur fixée. D'une manière générale, ce temps de calcul peut s'exprimer en fonction du temps final T , de ν et de Δx sous la forme

$$C = C^{\text{ste}} \frac{T}{\nu \Delta x^2}. \quad (86)$$

Ensuite, on compare les différentes solutions approchées obtenues avec la solution exacte. Afin de rendre possible une comparaison fine, on a initialisé la valeur approchée u_i de u dans la cellule i avec la moyenne de la solution exacte à $t = 0$. De même, on compare toujours la suite u_i des valeurs discrètes approchées à la suite u_i^e des moyennes sur chaque cellule de la solution exacte.

On commence par considérer l'advection ($c = 1$) d'une vague régulière

$$u_0(x) = \begin{cases} 1024 x^5 (1-x)^5 & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (87)$$

La fonction u_0 est quatre fois continûment dérivable. Ainsi, l'analyse en équation équivalente est licite. Pour les schémas linéaires d'ordre 4 avec flux centrés ou d'ordre 3 avec flux décentrés, sans limiteurs, le théorème de Lax s'applique: la différence globale entre la solution exacte et la solution approchée au bout d'un temps fixé est de l'ordre de Δx^4 . On vérifie aisément que c'est bien le cas. Par contre, une expérience numérique montre que l'adjonction de limiteurs, que ce soit à l'ordre 3 ou 4, produit une erreur qui n'est pas d'ordre 3 ou 4. En fait, les schémas limités ne sont que d'ordre 1 autour des extrema, et l'erreur produite en ces points est prépondérante.

Nous allons comparer, à titre indicatif, les erreurs d'approximations produites par différents schémas. On montre sur le Tableau 1 les paramètres des différentes simulations, jusqu'au temps $t = 1$.

	Schéma	Ordres (temps, espace)	limiteurs	TVD	ν	Δx	C
A1	RK2 (37)	2 - 2	Van albada (60)	oui	1.00	0.00112	10.04
A2	RK3 (63)	3 - 3	Spekreijse (62)	oui	0.93	0.00125	9.92
A3	RK3 (63)	3 - 3	nouveau (67)	oui	1.05	0.00116	9.97
A4	RK4 (72)	4 - 4	(79) et (83-85)	oui	1.28	0.00131	10.00

TAB. 1 – Paramètres des différentes simulations pour l'advection linéaire.

Examinons ces résultats. Nous avons comparé les schémas limités d'ordre 2, 3 ou 4 en espace, utilisés avec un schéma en temps du même ordre, soit respectivement les schémas (37), (63) et (72). On a toujours constaté que, à temps de calcul égal, on n'a pas intérêt à utiliser un schéma en temps d'une précision supérieure à celle du schéma en espace.

Sur la Figure 17, on montre, pour les expériences **A2**, **A3** et **A4**, les erreurs L_1 et L_2 de la solution approchée au cours du temps. Les erreurs obtenues pour l'expérience **A1**, qui ont été omises, sont beaucoup plus importantes (toujours à temps de calcul égal).

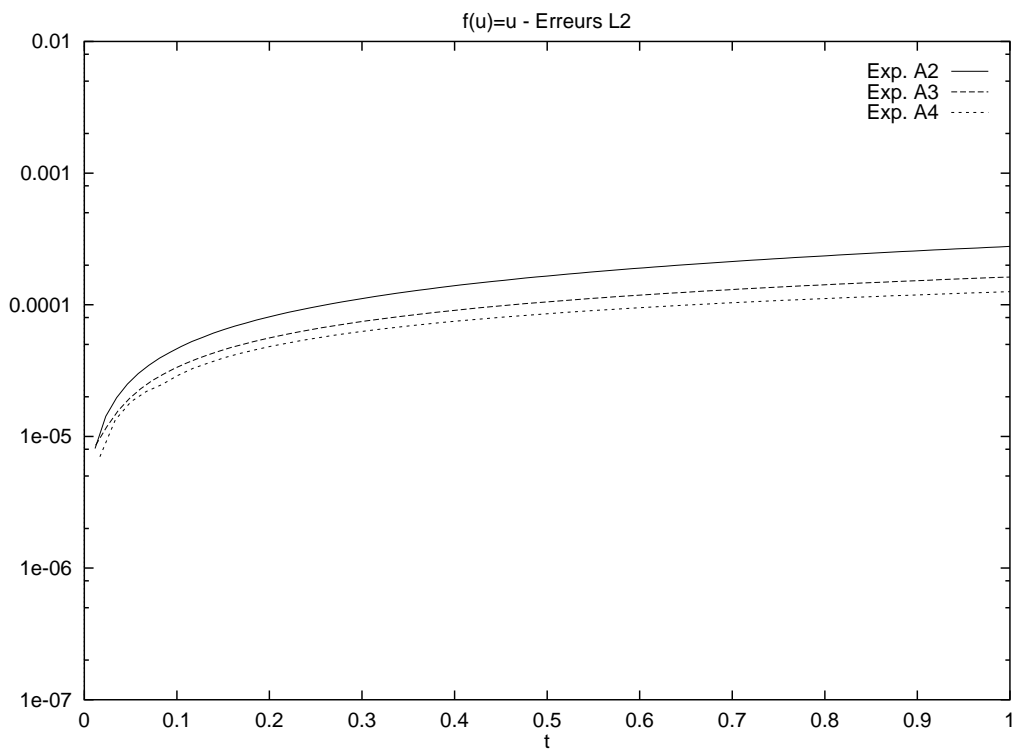
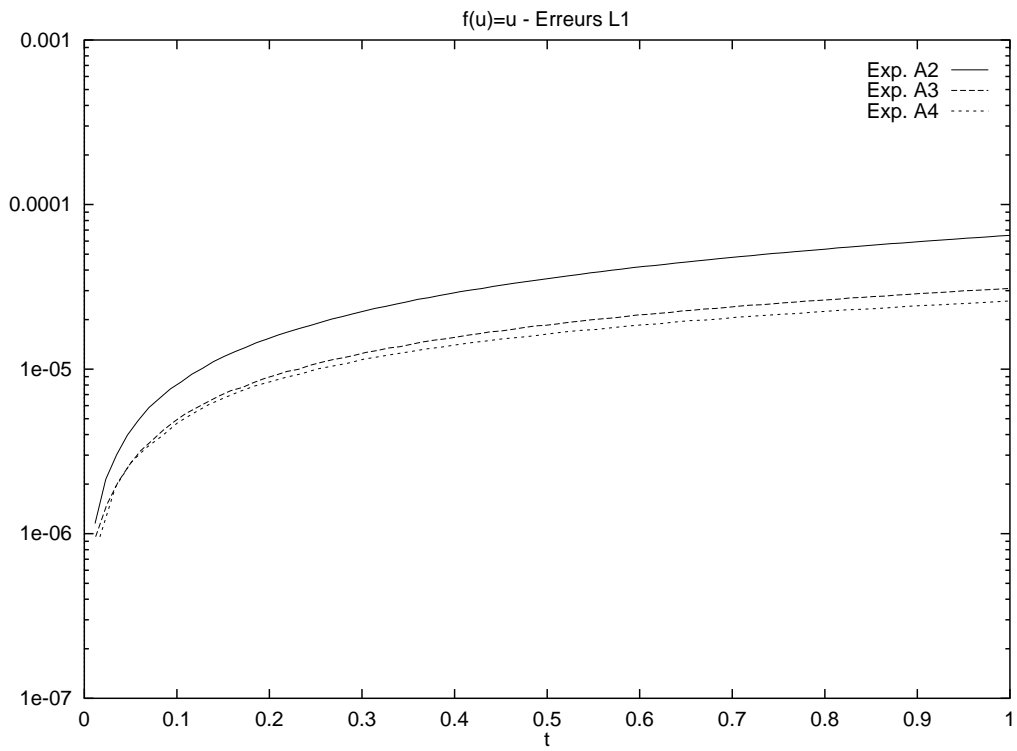


FIG. 17 – Erreurs L_1 et L_2 pour les simulations **A2**, **A3** et **A4**.

Sur ce cas test linéaire, on remarque que le schéma limité à partir du schéma d'ordre 4 semble un peu plus efficace que le schéma limité d'ordre 3 (67), celui-ci étant d'ailleurs plus efficace que le limiteur de Spekreijse (62). Les limiteurs introduits ici, qui rendent les schémas TVD, détériorent la précision des schémas, en grande part parce que ce cas test utilise une donnée initiale très régulière, et la solution exacte reste également très régulière au cours du temps. Or, l'on sait que les solutions des systèmes hyperboliques non linéaires ne le restent pas longtemps. Il convient donc de s'intéresser aussi à des cas-tests plus irréguliers, pour des équations non linéaires.

Passons maintenant à un cas-test pour l'équation de Burgers. On choisit la donnée initiale (30) dont l'unique solution entropique bornée pour $t > 0$ est représentée sur la Figure 3. On effectue la simulation jusqu'à $t = 5$, où le choc stationnaire est déjà apparu en $x = 0$. Dans la suite, on s'arrangera toujours pour que le centre d'une cellule soit en $x = 0$, afin de mettre tous les schémas (utilisés avec différents pas d'espace) sur un même pied d'égalité pour ce qui est de la position du choc stationnaire.

On montre sur le Tableau 2 les paramètres des différentes simulations. Ici encore, on a essayé

	Schéma	Ordres (temps, espace)	limiteurs	TVD	ν	Δx	C
B1	RK2 (37)	2 - 2	Van albada (60)	oui	1.00	0.00185	60.26
B2	RK3 (63)	3 - 3	Spekreijse (62)	oui	0.96	0.00225	60.48
B3	RK3 (63)	3 - 3	nouveau (67)	oui	1.05	0.00213	60.00
B4	RK4 (72)	4 - 4	(79) et (83-85)	oui	1.28	0.00280	60.20

TAB. 2 – Paramètres des différentes simulations pour l'équation de Burgers.

tous les schémas avec plusieurs schémas en temps. Il s'est toujours avéré inutile d'utiliser une précision en temps supérieure à la précision en espace. D'autre part, les limiteurs sont nécessaires pour mener à bien cette simulation, les schémas non limités réagissant particulièrement mal (explosion numérique) à l'apparition du choc stationnaire à $t = 4.5s$.

Comparons les résultats des expériences **B1** à **B4**. Pour **B3** et **B4**, on a utilisé les nouveaux limiteurs proposés dans ce rapport. On a représenté sur la Figure 18 les erreurs L_1 et L_2 pour toutes les expériences.

On observe, pour les deux erreurs, que les schémas limités d'ordre 3 ou 4 sont très nettement supérieurs au schéma d'ordre 2 avec $\beta = 1/2$ limités par la fonction de Van Albada (celui-ci supporte d'ailleurs assez mal la rencontre des chocs et des détente à $t = 2s$).

Comme on l'avait vu précédemment, le nouveau limiteur pour le schéma en flux décentrés avec $\beta = 1/3$ est plus efficace que le limiteur de Spekreijse. Enfin, les nouveaux limiteurs mis au points pour les flux centrés avec $\beta = 1/3$ souffrent probablement de la lourdeur du schéma en temps. Néanmoins, ces résultats ne sont qu'indicatifs, puisque la différence de structure des deux schémas ne permet pas d'assurer que les codes utilisés ont exactement le même niveau d'optimisation. Une étude sur des systèmes hyperboliques en au moins deux dimensions est nécessaire pour pouvoir conclure sur l'efficacité des différents schémas.

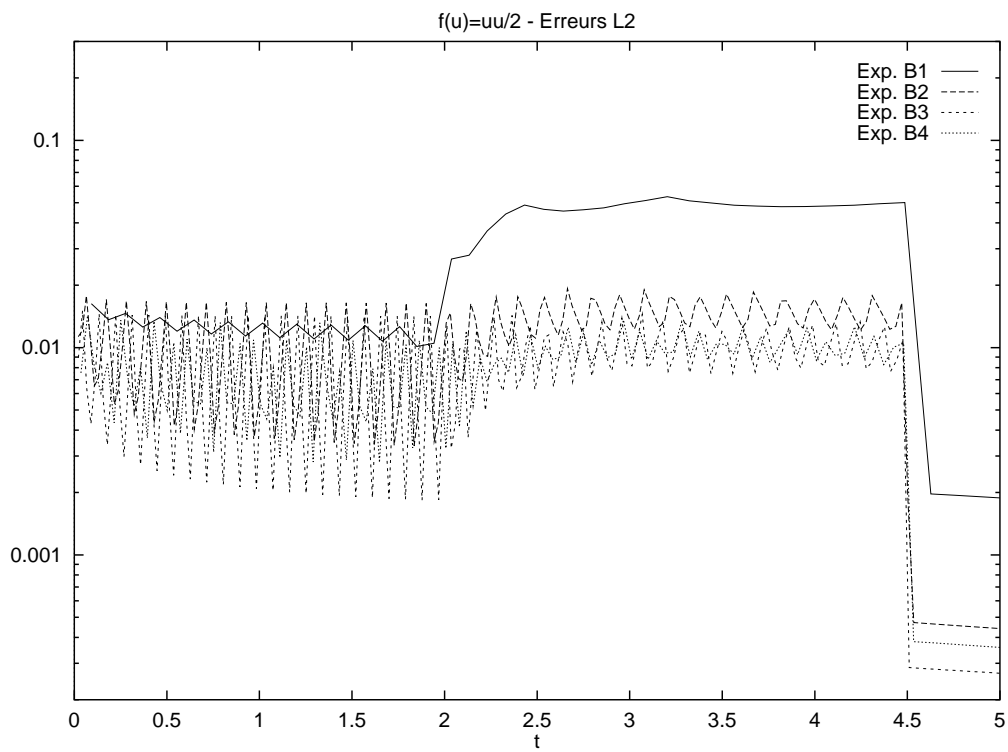
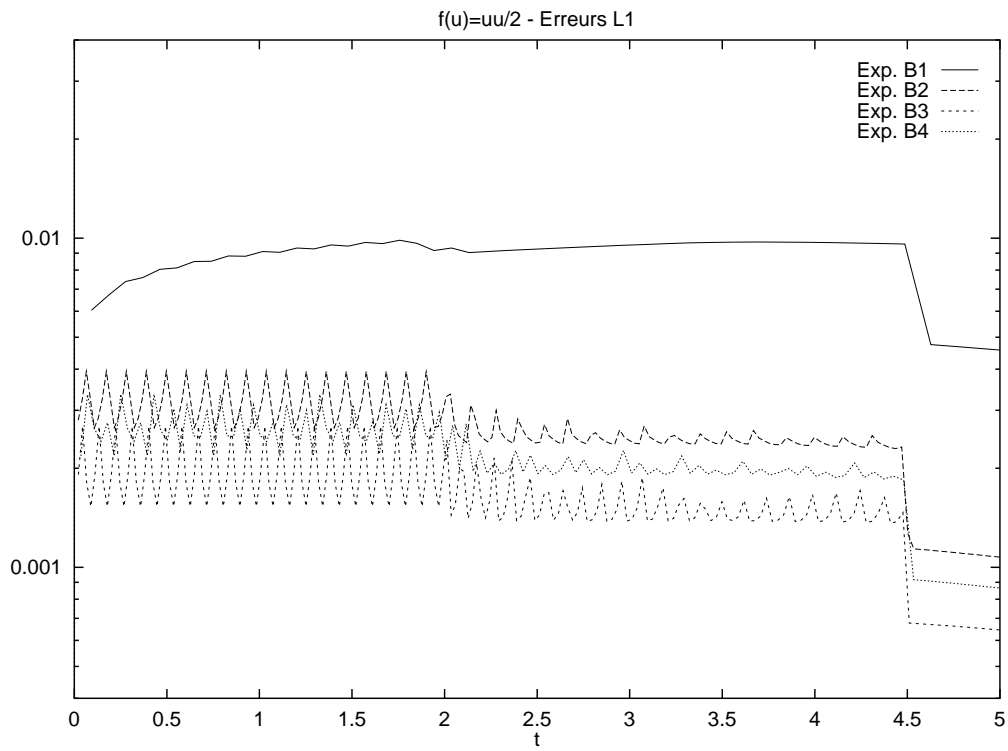


FIG. 18 – Erreurs L_1 et L_2 pour les simulations B1 à B4.

7 Extensions aux systèmes en plusieurs dimensions

Les deux schémas avec limiteurs introduits dans ce rapport peuvent s'écrire sous la forme d'un schéma conservatif, où les flux aux interfaces s'expriment comme un flux numérique décentré entre deux états "limités", qui sont eux-mêmes fonctions des grandeurs en jeu et des limiteurs. Ainsi, ces schémas s'étendent sans aucune difficulté aux équations hyperboliques scalaires en plusieurs dimensions d'espace. Les différences finies présentés ici peuvent être remplacées par des gradients moyennés sur les cellules en volumes finis ou par des gradients décentrés utilisant des triangles "amont" ou "aval" [11]. Pour les systèmes en plusieurs dimensions, on pourra par exemple limiter composante par composante, et prendre pour limiteur le minimum des "limiteurs par composante" obtenus, ce qui est classique mais risque d'introduire un léger excès de diffusion numérique [12].

L'application de ces limiteurs à des systèmes hyperboliques linéaires et non linéaires en plusieurs dimensions d'espace est en cours. On pourra ainsi vérifier si le limiteur (67) appliqué au schéma décentré d'ordre 3 reste plus efficace que le schéma centré d'ordre 4 limité.

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier, pour leur soutien sans faille, Loula Fezoui, qui nous a fait partager ses connaissances en "CFD", et Sophie Depeyre, source intarissable de données sur la stabilité linéaire des divers schémas utilisés.

Références

- [1] A. Harten. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *Journal of Computational Physics*, 49:357–393, 1983.
- [2] B. Van Leer. Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme II: Monotonicity and conservation combined in a second order scheme. *Journal of Computational Physics*, 14:361–370, 1974.
- [3] P. K. Sweby. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM Numer. Anal.*, 21(5):995–1011, 1984.
- [4] S. P. Spekreijse. *Multigrid Solution of the Steady Euler Equations*. PhD thesis, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam, Nov. 1987.
- [5] R.F. Warming and F. Hyett. The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods. *Journal of Computational Physics*, 14(2):159–179, 1974.
- [6] R. J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Lectures in Mathematics. Birkh'auser Verlag, ETH Zurich, 1990.
- [7] A. Harten, J. M. Hyman, and P. D. Lax. On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks. *Comm. Pure Appl. Math.*, 2(29):297–322, 1976.
- [8] B. Larrouturou. *Modélisation mathématique et numérique pour les sciences de l'ingénieur*. Ecole Polytechnique, 1995.
- [9] S. Depeyre, B. Larrouturou, and R. Carpentier. Méthodes numériques décentrées d'ordre élevé en deux dimensions d'espace. *Rapport de Recherche CERMICS*, 95-41, 1995.
- [10] B. Van Leer. On the Relation between the upwind-differencing schemes of Godunov, Engquist-Osher and Roe. *ICASE report*, 11, March 1981.
- [11] S. Lanteri. *Simulation d'Écoulements Aérodynamiques Instationnaires sur une Architecture S.I.M.D. Massivement Parallèle*. Thèse de doctorat en sciences de l'ingénieur, Université de Nice-Sophia-Antipolis, France, 1991.
- [12] P. Rostand and B. Stoufflet. Finite Volume Galerkin Methods for Viscous Gas Dynamics. INRIA RR-863, INRIA, 1988.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Généralités sur les schémas numériques	1
2.1	Equations hyperboliques linéaires ou non linéaires	1
2.2	Formulation en volumes finis	2
2.3	Schémas conservatifs	3
2.4	Précision des schémas numériques	3
2.5	Stabilité, principe du maximum, monotonie	3
3	Schéma décentré du premier ordre	6
3.1	Equation d'advection	6
3.2	Equation de Burgers	7
4	Schémas décentrés TVD d'ordre supérieur	9
4.1	Equation d'advection	11
4.2	Equation de Burgers	17
5	Nouveaux schémas avec limiteurs	17
5.1	Un schéma décentré d'ordre 3	17
5.2	Un schéma centré d'ordre 4	23
6	Discussion	28
7	Extensions aux systèmes en plusieurs dimensions	32

Liste des derniers rapports de recherche du CERMICS

List of previous CERMICS research reports

- 94-30 F. Berreux,
L. Sainsaulieu *A Roe-type Riemann solver for hyperbolic systems with relaxation, based on time-dependent wave decomposition*, 48 pages, novembre 1994, Noisy-le-Grand
- 94-31 L. Sainsaulieu *Traveling waves solution of convection-diffusion systems whose convection terms are weakly non conservative. Application to the modeling of two phase fluid flows*, 31 pages, novembre 1994, Noisy-le-Grand
- 94-32 M. Bouzoubaa *Houria: un résolveur de système de contraintes fonctionnelles hiérarchique*, 18 pages, novembre 1994, Sophia-Antipolis
- 94-33 S. Piperno *Méthodes d'intégration temporelle décalée pour un problème aéroélastique mono-dimensionnel non linéaire*, 42 pages, décembre 1994, Sophia-Antipolis
- 94-34 M. Defranceschi,
C. Le Bris *Computing a molecule: a mathematical viewpoint*, 39 pages, décembre 1994, Noisy-le-Grand
- 95-35 A. de la Bourdonnaye *A substructuring method for a harmonic wave propagation problem: Analysis of the conditioning number of the problem on the interfaces*, 15 pages, janvier 1995, Sophia-Antipolis
- 95-36 A. de la Bourdonnaye,
M. Tolentino *Numerical simulation of scattering problems with Fourier Integral operators*, 18 pages, février 1995, Sophia-Antipolis
- 95-37 G. Gimonet,
J.P. Cioni, L. Fezoui,
F. Poupaud *Approximation numérique des équations de Maxwell en milieu hétérogène monodimensionnel par un solveur de Riemann exact*, 35 pages, avril 1995, Sophia-Antipolis
- 95-38 A. Ern,
V. Giovangigli,
M. D. Smooke, *Numerical Study of a Three-Dimensional Chemical Vapor Deposition Reactor with Detailed chemistry*, 45 pages, mai 1995, Noisy-Le-Grand
- 95-39 S. Depeyre,
D. Issautier *Application aux schémas finis d'une méthode de pénalisation des contraintes pour le système de Maxwell*, 34 pages, juin 1995, Sophia-Antipolis

- 95-40 S. Depeyre, *Stability analysis for finite volume schemes on rectangular and triangular meshes applied to the two-dimensional Maxwell system*, 19 pages, juin 1995, Sophia-Antipolis
- 95-41 S. Depeyre, B. Larroutou, R. Carpentier *Méthodes numériques décentrées d'ordre élevé en deux dimensions d'espace*, 38 pages, aout 1995, Sophia-Antipolis
- 95-42 A. De La Bourdonnaye, *Géométrie différentielle et éléments finis: L'exemple de l'électromagnétisme*, 18 pages, aout 1995, Sophia-Antipolis
- 95-43 S. Cohen, *Stochastic parallel transport along levy flows of diffeomorphisms*, 12 pages, novembre 1995, Noisy-Le-Grand
- 95-44 N. Prkovic, *Un algorithme distribué pour la résolution des problèmes de contraintes en domaines finis*, 24 pages, novembre 1995, Sophia-Antipolis
- 95-45 R. Keriven, O. Faugeras, *On the projective evolution of 2D curves*, 11 pages, décembre 1995, Noisy-Le-Grand
- 95-46 M.C. Riffe-Rojas, *Improving fitness functions for CSP in an evolutionary algorithms*, 15 pages, novembre 1995, Sophia-Antipolis
- 95-47 J.F. Delmas, *Super mouvement brownien avec catalyse*, 46 pages, décembre 1995, Noisy-Le-Grand
- 95-48 J.P. Lebacque, *The Godunov scheme and what it means for first order traffic flow models*, 37 pages, novembre 1995, Noisy-Le-Grand
- 95-49 S. Piperno, *Schéma TVD d'ordres élevés pour la résolution de l'équation de Burgers*, 34 pages, janvier 1996, Sophia-Antipolis

Ces rapports peuvent être obtenus en s'adressant au secrétariat du CERMICS :

The reports can be asked from:

Imane HAMADE
 ENPC-CERMICS
 F-93167 Noisy-le-Grand CEDEX
 Tél : (33) 1 - 49-14-35-83
 email: hamade@cerma.enpc.fr