# Formalisme Multifractal et Chirps Logarithmiques pour les Fonctions d'Echelles

Ben Slimane Mourad*

**R**ésumé. On montre que le formalisme multifractal s'applique aussi pour une large classe de fonctions d'échelle. Celles ci sont autosimilaires mais avec des contractions ne vérifiant pas la condition de séparation. On montrera le caractère oscillant pour ces fonctions. Enfin, on donnera une méthode différente de celle de Meyer pour le calcul de la régularité ponctuelle et le spectre des singularités pour la fonction d'échelle de de Rham qui est en plus autosimilaire mais avec une fonction d'erreur discontinue. On montre également la validité du formalisme multifractal.

## 1 Introduction

Les physiciens qui étudient la turbulence pleinement développée ont montré que l'énergie d'un écoulement turbulent associée aux petites échelles n'est pas répartie de façon dense dans l'espace. Cette observation d'une intermittence spatiale du support des transferts d'énergie a conduit plusieurs auteurs à supposer que ce support est fractal (cf [Ma]), ou multifractal (cf [FP]) : la vitesse $\vartheta$ de l'écoulement est assez régulière sur de grandes régions et a un comportement singulier sur des petits ensembles.

Le caractère singulier de la vitesse en un point $x_0$ est décrit par un exposant de singularité $\alpha(x_0)$, qui correspond au fait que $\vartheta$ est approximativement $\alpha(x_0)$-Hölderienne

$$\mid \vartheta(x+\varepsilon,t)-\vartheta(x,t)\mid \sim \varepsilon^{\alpha(x_0)} \quad \text{quand} \quad \varepsilon \mapsto 0\ .$$

Des recherches actives ont été menées pour calculer les singularités et mesurer pour chaque $\alpha$, la taille $d(\alpha)$ (la dimension fractale ou de Hausdorff) de l'ensemble $E^\alpha$ des points où le signal a la même singularité $\alpha$. Il s'agit alors de l'étude de la fractalité ou multifractalité du signal, qui à son tour sera dit fractal ou multifractal.

L'objet mathématique que l'on cherche à déterminer alors, est le spectre des singularités $d(\alpha)$ de $\vartheta$. Comme il est à peu prés impossible de le déterminer directement à partir de la définition, qui conduit à des calculs énormes et numériquement instables, les physiciens ont alors essayer de le relier à des quantités calculables.

Des arguments heuristiques ont permis à Frisch et Parisi d'établir, en dimension 1 (cf [FP]), une formule qui relie le spectre $d(\alpha)$ à l'exposant $\zeta(p)$, qui est défini par le comportement en loi de puissance en $\varepsilon^{\zeta(p)}$ de la valeur moyenne de la puissance $p$-ième de l'accroissement de la vitesse

$$\int \mid \vartheta(x+\varepsilon,t)-\vartheta(x,t)\mid^p \ dx \sim \varepsilon^{\zeta(p)} \quad \text{quand} \quad \varepsilon \mapsto 0\ .$$

*CERMICS, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, La Courtine, 93167 Noisy-le-Grand, France.

La conjecture de Frisch et Parisi fournit le spectre à partir d'une transformée de Legendre de $\zeta(p) - 1$
$$d(\alpha) = inf(\alpha p - \zeta(p) + 1) \ .$$
Cette conjecture est dite le Formalisme Multifractal.

La plupart des signaux (multi)fractals sont grossièrement des fonctions dont le graphe est localement une contraction du graphe global "modulo une fonction d'erreur"; c'est à dire satisfaisant des équations fonctionnelles de type

$$F(x) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i F(S_i^{-1}(x)) + g(x)$$

avec $|\lambda_i| < 1$ et $S_i$ des contractions sur un domaine borné $\Omega$ de $\mathrm{R}^m$. On parle alors de fonctions autosimilaires.

Nous nous intéressons à deux problèmes principaux : l'étude de la (multi)fractalité des fonctions autosimilaires et la validité du formalisme multifractal.
Noter que des cas particuliers ont été déjà étudiés : Arneodo, Bacry et muzy (cf [ABM1] et [ABM2]) pour les primitives des mesures invariantes; Daubechies et Lagarias (cf [DL3]) pour une famille de fonctions d'échelles $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n \varphi(kx - n)$ avec $N = 3$, $k = 2$, $c_0 = \beta$, $c_1 = \frac{1}{2} + \beta$, $c_2 = 1 - \beta$ et $c_3 = \frac{1}{2} - \beta$, donc vérifient certaines règles de somme à savoir $\sum_{n=0}^{N} c_n (-1)^n n^l = 0$ pour $l = 0, \ldots, L$ avec $L = N - 2$ ; et Jaffard (cf [Ja2]) quand les $S_i$ sont linéaires et vérifient des conditions de séparation ($S_i(\Omega) \cap S_j(\Omega) = \emptyset$ pour $i \neq j$) et $g$ est assez régulière.

Dans [Be1], grâce à une analyse par ondelettes, nous avons généralisé les résultats de Jaffard dans le cas où les $S_i$ sont des contractions monodimensionnelles non linéaires, ou des fonctions analytiques de $z = x + iy$. Dans [Be2], nous avons montré que pour des contractions non homogènes les fonctions autosimilaires associées sont multifractales mais ne vérifient pas le formalisme multifractal. Nous avons proposé une autre formule pour le formalisme multifractal qui s'adapte bien à ce genre de situations et qui sera en même temps compatible avec le cadre des contractions homogènes.

Dans ce papier, on se propose d'étendre la validité du formalisme multifractal pour des fonctions d'échelles satisfaisant moins de règles de somme et qui sont en même temps autosimilaires avec des $S_j(\Omega)$ ne vérifiant pas la condition de séparation

$$S_j(\Omega) \cap S_{j'}(\Omega) = \emptyset \ .$$

On s'intéresse dans un premier temps à des fonctions $F_\rho$, $0 < \rho < 1$, $\rho \neq 1/2$, de $L^1(\mathrm{R})$, satisfaisant l'équation fonctionnelle :

$$F_\rho(x) = \rho F_\rho(2x) + \rho F_\rho(2x-1) + (1-\rho) F_\rho(2x-2) + (1-\rho) F_\rho(2x-3) \qquad (1)$$

et la condition de normalisation

$$\int F_\rho(x)\, dx = 1 \ . \qquad (2)$$

Ces fonctions font partie d'une large classe de fonctions, solutions dans $L^1(\mathrm{R})$ des équations d'échelles

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n \varphi(kx - n) \tag{3}$$

avec

$$\int \varphi(x)\, dx = 1 \ . \tag{4}$$

Dans [DL1] et [DL2], Daubechies et Lagarias ont étudié l'existence, le support, la régularité globale et ont donné des propriétés qui permettent de minorer la régularité ponctuelle en certains points. Signalons que si l'on omet la condition $\varphi \in L^1(\mathrm{R})$, alors l'espace des solutions de l'équation d'échelle (3) aura une dimension infinie. La condition $\varphi \in L^1(\mathrm{R})$ nous permet de prouver que la dimension d'un tel espace, est au plus égale à 1 et, lorsque cela est le cas, $\varphi$ sera définie de façon unique par la condition de normalisation (4).
Des conditions suffisantes sur les $c_n$ permettent de prouver l'existence, dans ce cas la propriété (4) implique que $\sum_{n=0}^{N} c_N = k$, ceci permet de montrer que $\varphi$ est supportée par l'intervalle $[0, \frac{N}{k-1}]$.
La solution $\varphi(x)$ sera représentée en termes d'un produit infini de matrices ( $k$ matrices $T_0, \ldots, T_{k-1}$ ) dont les coefficients sont les $c_n$. La représentation dépend du développement dyadique de $x$ (pour $x \in [0,1]$). Pour le cas qui nous intéresse, $k = 2$ et $N = 3$ et on a alors

$$T_0 = \begin{pmatrix} c_0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_0 \\ 0 & c_3 & c_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_1 = \begin{pmatrix} c_1 & c_0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} .$$

La régularité globale de $\varphi$ résulte de certaines estimations sur la norme de tout produit fini de telles matrices.
L'inconvénient de la majorité de ces équations c'est qu'en effet, leur solution ne possède pas une forme analytique explicite. Ce problème vient du fait que le produit infini de matrices n'est pas en général explicite.
Dans [DL3], Daubechies et Lagarias ont choisit des $c_n$ de telle façon que dans une certaine base de $\mathrm{R}^3$, $T_0^t$ est diagonale et $T_1^t$ est triangulaire, ($T_i^t$ désignant la matrice transposée de $T_i$). L'avantage de ce choix, c'est qu'il permet de calculer tout produit des matrices $T_0$ et $T_1$, et de contrôler ainsi l'accroissement de la fonction d'échelle associée à fin de déterminer la régularité ponctuelle.
Signalons aussi que Daubechies et Lagarias imposent "suffisamment" de règles de somme ($\sum_{n=0}^{N} c_n(-1)^n n^l = 0$ pour $l = 0, \ldots, L$ avec $L = N - 2$) pour avoir des relations entre le graphe de $\varphi_\beta$ sur $[1,2]$, $[2,3]$ et son graphe sur $[0,1]$. Ainsi, Daubechies et Lagarias ont pu accéder au formalisme multifractal et le vérifier (cf [DL3]) pour des fonctions $\varphi_\beta$ ($1/2 < \beta < 3/4$) satisfaisant (3) et (4) avec $N = 3$, $c_0 = \beta$, $c_1 = \frac{1}{2} + \beta$, $c_2 = 1 - \beta$ et $c_3 = \frac{1}{2} - \beta$ . Telles règles sont d'une importance capitale, elles permettent en fait, comme Daubechies nous l'avait signalé dans [Dau] de transformer la fonction d'échelle en une fonction autosimilaire dans le sens de Jaffard et de retrouver le formalisme multifractal.

$F_\rho$ n'a pas suffisamment de règles de somme, toutefois on vérifie que telles relations sont aussi possibles pour les fonctions $F_\rho$.

Signalons que pour $\rho = 1/2$, (1) et (2) admettent une solution unique donnée par la fonction

$$F_{\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 1/2 & \text{si} \quad x \in [1,2] \\ (3-x)/2 & \text{si} \quad x \in [2,3] \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$F_{\frac{1}{2}}$ étant uniformément Lipschitzienne donc le formalisme multifractal n'est pas intéressant dans ce cas.

Dans la prochaine section, on prouvera l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (1) pour $\rho \neq 1/2$, sous la condition de normalisation (2) et on donnera sa régularité globale et son support. La solution $F_\rho$ sera supportée par l'intervalle $[0,3]$; ainsi en posant $\Omega = ]0,3[$ et $S_j(x) = \frac{1}{2}x + \frac{j}{2}$, pour $j = 0,1,2$ et 3, $F_\rho$ sera, dans un sens faible, autosimilaire avec des $S_j(\Omega)$ ne vérifiant pas la condition de séparation $S_j(\Omega) \cap S_{j'}(\Omega) = \emptyset$. Puis, on donnera explicitement cette solution et on montrera le lien entre son graphe sur $[1,2]$, $[2,3]$ et $[0,1]$.

Dans la troisième section, on calculera sa régularité ponctuelle et son spectre des singularités et on prouvera le formalisme multifractal.

Dans la quatrième section, on montrera le passage à une fonction autosimilaire, et qu'aux points $x$ codés par des rationnels, ainsi que leurs translatés de 1 et 2, la solution admet des chirps logarithmiques après avoir présenté ces notions et donner leurs caractérisation par ondelettes. On signalera aussi le rôle important des règles de somme dans l'autosimilarité des fonctions d'échelle et la vérification du formalisme multifractal.

Dans la cinquième section, on vérifie que la fonction d'échelle de de Rham n'ait pas suffisamment de règles de somme. On montre qu'elle est autosimilaire avec une fonction d'erreur $g$ discontinue et on prouve que le formalisme multifractal s'applique pour elle.

## 2 Existence, unicité, support, régularité globale et calcul explicite de la solution

Pour $\rho \neq 1/2$, les matrices $T_0$ et $T_1$ associées à l'équation d'échelle (1) s'écrivent

$$T_0 = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 \\ (1-\rho) & \rho & \rho \\ 0 & (1-\rho) & (1-\rho) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_1 = \begin{pmatrix} \rho & \rho & 0 \\ (1-\rho) & (1-\rho) & \rho \\ 0 & 0 & (1-\rho) \end{pmatrix}.$$

On considère les vecteurs $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = ((\rho-1)^2, \rho(\rho-1), \rho^2)$ et $e_3 = (1,0,0)$, et on note $P$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathrm{R}^3$ dans la base $(e_1, e_2, e_3)$.

Il est facile de vérifier que la matrice de l'endomorphisme associé à $T_0^t$ est diagonale dans la base $(e_1, e_2, e_3)$, et est donnée par

$$P^{-1} T_0^t P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{pmatrix}$$

et que celle de l'endomorphisme associé à $T_1^t$ est triangulaire supérieure, et est égale à

$$P^{-1}T_1^tP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \rho^2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\rho \end{pmatrix} .$$

Un calcul facile nous fournit

$$P^{-1}\left(T_{i_1}\dots T_{i_n}\right)^t P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \rho^2 \sum_{k=1}^n i_k \prod_{l=1}^{k-1} \lambda_{i_l} \\ 0 & 0 & -i_n \prod_{k=1}^{n-1} \lambda_{i_k} \\ 0 & 0 & \prod_{k=1}^n \lambda_{i_k} \end{pmatrix} .$$

avec $\lambda_0 = \rho$ et $\lambda_1 = 1-\rho$.

D'aprés la remarque de [DL2] page 1048, en posant $E_1$ le sous espace vectoriel de $\mathrm{R}^3$ orthogonal à $e_1$, la restriction de la matrice $P^tT_j(P^t)^{-1}$ ($j = 0$ ou $1$) au sous espace $P^tE_1$, que l'on notera $P^tT_j(P^t)^{-1}/P^tE_1$ est obtenue en éliminant la première ligne et la première colonne de $P^tT_j(P^t)^{-1}$ (donc en éliminant la première ligne et la première colonne de $P^{-1}T_j^tP$ puis en transposant). Ce qui donne

$$P^tT_0(P^t)^{-1}/P^tE_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \text{ et } P^tT_1(P^t)^{-1}/P^tE_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1-\rho \end{pmatrix} .$$

De la même manière, on obtient

$$P^tT_{i_1}\dots T_{i_n}(P^t)^{-1}/P^tE_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -i_n \prod_{k=1}^{n-1} \lambda_{i_k} & \prod_{k=1}^n \lambda_{i_k} \end{pmatrix} .$$

Donc la norme de la matrice $P^tT_{i_1}\dots T_{i_n}(P^t)^{-1}/P^tE_1$ est $\sim \prod_{k=1}^n \lambda_{i_k}$.

On va utiliser les résultats suivants (voir [DL1] page 1395 et [DL2] pages 1037-1038, 1043 et 1053)

**Théorème 1** *Supposons que les coefficients $c_n$, $n = 0, \dots, N$ satisfaient $\sum_{n=0}^N c_n = 2$ et $\sum_{n=0}^N (-1)^n n^l c_n = 0$ pour $l = 0, 1 \dots, L$.*
*Pour chaque $m = 1, \dots, L+1$, on pose $E_m$ le sous espace vectoriel de $\mathrm{R}^N$ orthogonal à $Vect\{u_1, \dots, u_m\}$ où $u_j = (1, 2^{j-1}, \dots, N^{j-1})$. Supposons qu'il existe $\frac{1}{2} \leq \lambda < 1$, $0 \leq l \leq L$ ($l \in \mathrm{N}$) et $C > 0$ tels que, pour toute suite binaire $(i_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$, et tout $m \in \mathrm{N}^*$,*

$$\| T_{i_1}\dots T_{i_m}/E_{l+1} \| \leq C\lambda^m 2^{-ml}. \tag{5}$$

*Alors*

- *Il existe une solution $f$ continue non triviale et appartenant à $L^1$, pour l'équation d'échelle associée aux $c_n$;*
- *$f$ est à support compact dans $[0, \frac{N}{k-1}]$, $f(x) + f(x+1) + \dots + f(x+N-1) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$, et $f$ est $l$ fois continûment dérivable:*
- *Si $\lambda > \frac{1}{2}$, alors la dérivée d'ordre $l$, $f^{(l)}$ appartient à $C^{-\frac{\log\lambda}{\log 2}}(\mathrm{R})$;*
  *Si $\lambda = \frac{1}{2}$, alors $f^{(l)}$ satisfait*

$$|f^{(l)}(x+t) - f^{(l)}(x)| \leq C|t||\log t|.$$

**Proposition 1** *L'estimation (5) est équivalente à la propriété suivante: il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et une matrice $N \times N$, $B$ de déterminant non nul, tels que*

$$\max_{\substack{i_j=0 \text{ ou } 1\\ j=1,\dots,m}} \| \bar{T}_{i_1} \dots \bar{T}_{i_m} / BE_{L+1} \| \leq 2^{-ml},$$

*avec $\bar{T}_i = BT_iB^{-1}$.*

Comme $\| P^tT_{i_1} \dots T_{i_n}(P^t)^{-1}/P^tE_1 \| \sim \prod_{k=1}^{n} \lambda_{i_k}$, alors, d'aprés la Proposition 1 et le Théorème 1, il existe une unique fonction continue $F = F_\rho$ et appartenant à $L^1(\mathrm{R})$, satisfaisant (1) et (2). De plus $F$ est Hölderienne d'exposant de Hölder $\alpha_{min} = min\{\frac{|\log \rho|}{\log 2}, \frac{|\log(1-\rho)|}{\log 2}\}$. Par conséquent, en prenant $\Omega = [0,3]$, on peut dire que $F$ est autosimilaire avec des $S_j(\Omega)$ ne vérifiant pas la condition de séparation $S_j(\Omega) \cap S_{j'}(\Omega) = \emptyset$.
Par ailleurs, pour tout $x \in [0,1]$

$$F(x) + F(x+1) + F(x+2) = 1 \; . \tag{6}$$

Pour $x \in [0,1]$, on considère la décomposition dyadique

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} i_k(x) 2^{-k}$$

et on définit l'opérateur de shift $\tau$ par

$$\tau x = \sum_{k=2}^{\infty} i_k(x) 2^{-k+1} \; .$$

Observons que

$$\tau x = S_{i_1(x)}^{-1}(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1/2] \\ 2x-1 & \text{si } x \in [1/2,1]. \end{cases}$$

On pose

$$V(x) = (F(x), F(x+1), F(x+2)) \; .$$

Il vient alors

$$V(x) = T_{i_1(x)} \, V(\tau x)$$

donc il en résulte par itération que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$V(x) = T_{i_1(x)} \dots T_{i_n(x)} \, V(\tau^n x) \; .$$

D'autre part, en notant $< X, Y >$ le produit scalaire de deux vecteurs $X$ et $Y$ de $\mathrm{R}^3$, on aura

$$\begin{aligned} F(x) &= \; < e_3, V(x) > \\ &= \; < e_3, \lim_n T_{i_1(x)} \dots T_{i_n(x)} \, V(0) > \\ &= \lim_n < (T_{i_1(x)} \dots T_{i_n(x)})^t \, e_3, V(0) > \\ &= \lim_n < \rho^2 \sum_{k=1}^{n} i_k \prod_{l=1}^{k-1} \lambda_{i_l} \, e_1 - i_n \prod_{k=1}^{n-1} \lambda_{i_k} \, e_2 + \prod_{k=1}^{n} \lambda_{i_k} \, e_3, V(0) > \; . \end{aligned}$$

Grâce au fait que $\lambda_0$ et $\lambda_1$ sont compris entre 0 et 1 et à la propriété (6), on obtient

$$\forall x \in [0,1], \quad F(x) = \rho^2 \sum_{k=1}^{\infty} i_k(x) \prod_{l=1}^{k-1} \lambda_{i_l}(x) \ . \tag{7}$$

On vient donc de trouver une forme analytique explicite pour $F$ sur $[0,1]$.

Regardons maintenant le lien entre le graphe de $F$ sur $[1,2]$, $[2,3]$ et son graphe sur $[0,1]$. Pour $y \in [1,2]$, on pose $x = \frac{1}{2}y$, comme $F$ est supportée par $[0,3]$, l'équation (1) donne

$$\begin{aligned} F(x) &= \rho F(2x) + \rho F(2x-1) \\ &= \rho F(y) + \rho F(\tau x) \end{aligned}$$

donc

$$F(y) = \frac{1}{\rho} F(x) - F(\tau x) \ .$$

Or d'apés (7)

$$\begin{aligned} F(\tau x) &= \rho^2 \sum_{k=1}^{\infty} i_k(\tau x) \left( \prod_{l=1}^{k-1} \lambda_{i_l}(\tau x) \right) \\ &= \rho^2 \sum_{k=2}^{\infty} i_k(\tau x) \left( \prod_{l=2}^{k-1} \lambda_{i_l}(\tau x) \right) \\ &= \frac{1}{1-\rho} F(x) - \frac{\rho^2}{1-\rho} \ , \end{aligned}$$

par conséquent

$$F(y) = \frac{1-2\rho}{\rho(1-\rho)} F(\frac{1}{2}y) + \frac{\rho^2}{1-\rho} \ . \tag{8}$$

Enfin, grâce à (6), on a pour $x \in [2,3]$

$$F(x) = 1 - \frac{\rho^2}{1-\rho} - \frac{1-2\rho}{\rho(1-\rho)} F(\frac{x-1}{2}) - F(x-2) \ . \tag{9}$$

Pour $x \in [0,1]$, $\frac{1}{\rho}F(x)$ est la primitive de la mesure de probabilité binomiale $\mu$ construite sur $[0,1]$ par le procédé itératif suivant : à l'étape $n=0$, on affecte à l'intervalle $[0,1]$ le poids 1. A l'étape $n=1$, on attribue un poids $\lambda_0 = \rho$ à l'intervalle $[0,1/2]$ et le poids $\lambda_1 = 1-\rho$ à l'intervalle $[1/2,1]$. A l'étape $n$, on divise $[0,1]$ en $2^n$ intervalles égaux en longueur, on repère chacun de ces $2^n$ intervalles par une séquence symbolique $(i_1, \ldots, i_n)$ où $i_k = 0$ ou 1 selon que l'intervalle considéré soit l'un des $2^{k-1}$ intervalles à gauche ($i_k = 0$) ou l'un des $2^{k-1}$ intervalles à droite ($i_k = 1$) de la décomposition des $2^k$ intervalles obtenus à l'étape $k$, on attribue alors un poids $\lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_n}$ à l'intervalle $I_{i_1,\ldots,i_n} = [\sum_{k=1}^n i_k 2^{-k}, \sum_{k=1}^n i_k 2^{-k} + 2^{-n}]$.

## 3 Régularité ponctuelle, spectre des singularités et formalisme multifractal

Dans cette section, on fournit la valeur de la régularité ponctuelle, le spectre des singularités et la preuve du formalisme multifractal. Il y a plusieurs façons de faire ceci : on peut se ramener au cas des fonctions autosimilaires et déduire directement le résultat mais comme $\frac{1}{\rho}F(x)$ est la primitive d'une mesure de probabilité binomiale, nous préférons faire appel au formalisme multifractal pour les mesures et appliquer les résultats de certains auteurs à notre cas, et de toute manière, l'autosimilarité de $F$ fera l'objet de la troisième section, à fin de détécter les chirps logarithmiques.

**Théorème 2** *Soit $0 < \rho < 1$, $\rho \neq \frac{1}{2}$ et $F$ la solution de l'équation (1) sous la condition de normalisation (2). Alors pour $x \in [0,1]$ tel que*
$a(x) := \liminf_n \left( \frac{\sum_{l=1}^n i_l(x)}{n} \frac{|\log(1-\rho)|}{\log 2} + (1 - \frac{\sum_{l=1}^n i_l(x)}{n}) \frac{|\log \rho|}{\log 2} \right) \leq 1$, *on a*

$$\alpha(x+2) \;=\; \alpha(x+1) \;=\; \alpha(x) \;=\; a(x)\ .$$

*En plus, pour $\alpha \in [\alpha_{min}, 1]$*

$$d(\alpha) = \inf_q (\alpha q - \sigma(q))$$

*avec $\sigma(q) = -\frac{\log(\rho^q + (1-\rho)^q)}{\log 2}$.*
*Et pour $\alpha \in ]\alpha_{min}, 1]$,*

$$d(\alpha) = \inf_{q>1} (\alpha q - \zeta(q) + 1)$$

*et le formalisme multifractal s'applique.*

Preuve :
On va d'abord rappeler le formalisme multifractal pour les mesures et montrer le lien avec le formalisme multifractal des fonctions.
Pour $x \in [0,1]$, on note $I_n(x)$ l'unique intervalle dyadique de longueur $2^{-n}$ contenant $x$, c'est à dire l'intervalle $[\sum_{l=1}^n i_l(x) 2^{-l}, \sum_{l=1}^n i_l(x) 2^{-l} + 2^{-n}[$ et on définit la régularité ponctuelle de la mesure $\mu$ en $x$ par :

$$\alpha_\mu(x) = \liminf_n \frac{\log \mu(I_n(x))}{\log |I_n(x)|}\ .$$

Posons

$$E_\mu(\alpha) = \{x \in [0,1] \;/\; \alpha_\mu(x) = \alpha\}$$

et

$$\sigma(q) = \lim_n \frac{\log \sum_k \left(\mu([k2^{-n}, (k+1)2^{-n}])\right)^q}{\log 2^{-n}}\ .$$

Alors le formalisme multifractal pour les mesures dit que :

$$dim E_\mu(\alpha) = \inf_q (\alpha q - \sigma(q))\ .$$

Arneodo et ses collaborateurs (cf [ABM1]), Brown, Michon et Peyrière (cf [BMP]) et Collet, Lebowitz et Porzio (cf [CLP]) ont montré la validité de ce formalime pour des mesures multinomiales. Par ailleurs, si $f$ désigne la primitive de la mesure $\mu$, c'est à dire

$$f(x) = \int_0^x d\mu = \mu([0,x]),$$

alors pour $\alpha \leq 1$

$$x \in E_\mu(\alpha) \Longleftrightarrow \liminf \frac{\log|f(x+h) - f(x)|}{\log|h|} = \alpha \ ;$$

soit donc

$$x \in E_\mu(\alpha) \Longleftrightarrow \alpha(x) = \alpha \ .$$

Si $d(\alpha)$ désigne le spectre des singularités de $f$, il s'ensuit alors que pour $\alpha \leq 1$

$$d(\alpha) = \inf_q(\alpha q - \sigma(q)) \ . \tag{10}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \sum_k \left(\mu([k2^{-n},(k+1)2^{-n}])\right)^q &= \sum_k |f(k2^{-n}) - f((k+1)2^{-n})|^q \\ &\sim 2^n \int |f(x+2^{-n}) - f(x)|^q \, dx \ , \end{aligned}$$

Par conséquent, si $1 + \sigma(q) < q$ alors

$$\zeta(q) = 1 + \sigma(q) \ .$$

Pour notre mesure, on a

$$\alpha_\mu(x) = \liminf_n \left( \frac{\sum_{l=1}^n i_l(x)}{n} \frac{|\log(1-\rho)|}{\log 2} + (1 - \frac{\sum_{l=1}^n i_l(x)}{n}) \frac{|\log \rho|}{\log 2} \right) = a(x)$$

et

$$\sigma(q) = \lim_n \frac{\log \sum_{|i|=n} |\lambda_i|^q}{\log 2^{-n}} = \lim_n \frac{\log(\rho^q + (1-\rho)^q)^n}{\log 2^{-n}} = -\frac{\log(\rho^q + (1-\rho)^q)}{\log 2}.$$

Par conséquent, $1 + \sigma(q) < q \Longleftrightarrow q > 1$ et donc

$$\zeta(q) = 1 - \frac{\log(\rho^q + (1-\rho)^q)}{\log 2} \ \ \forall q > 1. \tag{11}$$

Finalement, le Théorème 2 découle du fait que pour $\alpha_{min} < \alpha \leq 1$, $\inf_q(\alpha q + \frac{\log(\rho^q+(1-\rho)^q)}{\log 2})$ est atteint en $\left[\log\left(\frac{-\log(2^\alpha(1-\rho))}{\log(2^\alpha \rho)}\right)\right] / \left[\log \frac{\rho}{1-\rho}\right]$ qui est supérieur à 1.

**Remarque :** Contrairement aux résultats de [DL3], on n'a pas le phénomène de transition de phase : il y avait une singularité en $\alpha = 1$ dans le spectre de [DL3], ce qui est ne pas le cas pour le notre.

## 4 Autosimilarité, chirps logarithmiques et ondelettes

Rappelons qu'une fonction $f(x)$ d'une variable réelle est Höldérienne d'exposant $\alpha$ en $x_0$ s'il existe un polynôme $P$ de degré au plus $\alpha$ tel qu'on ait au voisinage de $x_0$

$$| f(x_0+h) - P(h) | \leq C \mid h \mid^{\alpha} \ .$$

Cette majoration, ne permet pas de décrire les oscillations de $| f(x_0+h) - P(h) |$.
Des comportements très oscillatoires ont été étudiés dans [JM] et [Me1], lorsque par exemple

$$f(x_0+h) - P(h) \sim h^{\alpha} \sin \frac{1}{h^{\beta}} \ ;$$

l'indice $\alpha$ étant l'exposant de Hölder en $x_0$ tandis $\beta$ mesure la rapidité des oscillations qui vont s'accélérer quand $h$ tend vers 0.
Une situation moins oscillante apparait lorsque $f$ est "approximativement autosimilaire" au voisinage de $x_0$, plus précisément lorsque (si $\alpha < 1$)

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \lambda^{-\alpha}(f(x_0+\lambda h) - f(x_0)) + O(|h|^{\alpha})$$

avec $\lambda < 1$. Cette égalité implique bien sûr que

$$f(x_0+h) - f(x_0) = |h|^{\alpha} G_{\pm}(\log \pm h) + O(|h|^{\alpha})$$

où le $\pm$ désigne le signe de $h$ et $G$ est une fonction $\log \lambda$ périodique.
Introduisons donc la définition suivante

**Définition 1** *On dit qu'une fonction $f$ a un chirp logarithmique d'ordre $\alpha$ en $x_0$ , de périodicité* $\log \lambda$ *et de régularité $r \geq 0$, s'il existe un polynôme $P$ de degré au plus $\alpha$ et deux fonctions $G_+$ et $G_-$ appartenant à l'espace de Hölder $C^r$, périodiques de période* $\log \lambda$ *et bornées telles que*

$$f(x_0+h) - P(h) = |h|^{\alpha} G_{\pm}(\log \pm h) + O(|h|^{\alpha})$$

*ou de façon équivalente, si*

$$f(x_0+h) - P(h) = \lambda^{-\alpha}(f(x_0+\lambda h) - P(\lambda h)) + O(|h|^{\alpha}) \ .$$

Dans [Ja3], Jaffard a établi des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de chirps logarithmiques, portant sur la transformée en ondelettes de la fonction. En plus il a trouvé une formule qui fournit explicitement les coefficients de Fourier des fonctions $G_+$ et $G_-$ aux points où les fonctions autosimilaires (définies dans [Ja1] et [Ja2] ) ont des chirps.
Soit $\alpha > 0$, considérons une ondelette $\psi \in C^{[\alpha]+1}(\mathrm{R})$ telle que pour tout $0 \leq l \leq [\alpha]+1$, $|\psi^{(l)}(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{[\alpha]+2}}$ et $\int x^l \psi(x)\, dx = 0$ et de plus (par exemple) $\psi$ paire, ou impaire, ou $\hat{\psi}(\xi) = 0$ pour $\xi \leq 0$ (et $\psi$ non identiquement nulle). Voici les énoncés des théorèmes de Jaffard [Ja3].

**Théorème 3** *Si $f$ a un chirp logarithmique d'ordre $\alpha$ en $x_0$ , de périodicité $\log\lambda$ et de régularité $r$, alors la transformée en ondelettes de $F$ vérifie*

$$C_{a,b}(f) = a^\alpha H(\log a, \frac{b-x_0}{a}) + O(a^\alpha + |b-x_0|^\alpha) \tag{12}$$

*avec $H(x,y)$ $\log\lambda$ périodique en la première variable,*

$$|H(x,y)| \le C(1+|y|)^{\alpha-r} \tag{13}$$

*et*

$$|H(x,y) - H(x',y)| \le C|x-x'|^r(1+|y|)^\alpha \ . \tag{14}$$

*Réciproquement, supposons qu'il existe $\beta<\alpha$ tel que*

$$C_{a,b}(f) = a^\alpha H(\log a, \frac{b-x_0}{a}) + O(a^\alpha(1+\frac{|b-x_0|}{a})^\beta) \tag{15}$$

*avec $H(x,y)$ satisfaisant (13) et (14). Alors $f$ a un chirp logarithmique d'ordre $\alpha$ en $x_0$, de périodicité $\log\lambda$ et de régularité $r-\varepsilon$, $\forall\varepsilon>0$.*

Soit maintenant $f$ une fonction $k$-autosimilaire sur $[0,1]$, i.e vérifiant

$$f(x) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i f(S_i^{-1}(x)) \ + \ g(x) \ , \tag{16}$$

avec $|\lambda_i|<1$ pour $i=1,\ldots,d$, $S_i$ des applications affines de $[0,1]$ dans $[0,1]$ de rapports de contraction $\mu_i$, telles que

$$S_i(]0,1[) \cap S_j(]0,1[) = \quad \text{si} \quad i \ne j$$

et $g$ est $C^k$ à décroissance rapide ainsi que ses dérivées d'ordre inférieur à $k$. On suppose en plus que $f$ n'est pas $C^k$ en un point $x_0$.
Alors les points où $f$ n'est pas $C^k$ appartiennent au compact $K$ invariant par les $S_i$ ($K=\bigcup S_i(K)$).
Chaque point de ce compact peut s'écrire

$$x = \lim_{n\mapsto\infty} S_{i_1}\circ\ldots\circ S_{i_n}(t)$$

où $t$ est un point quelconque de $[0,1]$. On peut donc coder $x$ par la suite $(i_1,\ldots,i_n,\ldots)$, ou encore par le nombre

$$X = X(x) = \sum_n i_n d^{-n}$$

dont le développement $d$-adique est précisément la suite $i_n$.

**Théorème 4** *Soit $f$ une fonction $k$-autosimilaire et $x$ un point codé par un rationnel; Notons*

$$\lambda(x) = \lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_{p(x)}}$$

*où $i_1\ldots i_{p(x)}$ est la suite périodique apparaissante dans le codage de $x$, et*

$$\mu(x) = \mu_{i_1}\ldots\mu_{i_{p(x)}} \ .$$

*Alors $f$ a un chirp logarithmique d'ordre $\alpha=\frac{\log\lambda(x)}{\log\mu(x)}$ en $x$, de périodicité $\log\mu(x)$ et de régularité $k$.*

Notons que la détection des chirps découle directement de l'équation fonctionnelle (16).

Dans ce qui suit, nous appliquerons les résultats de Jaffard pour la solution $F = F_\rho$ de l'équation (1) (sous la condition de normalisation (2)) à fin de détécter ses chirps logarithmiques. Pour cela on va d'abord la transformer en une fonction 1-autosimilaire. La méthode nous a été communiquée par Daubechies [Dau], pour nous signaler que la famille d'exemples de son article avec Lagarias, tombe bien dans le cadre des fonctions autosimilaires, traité par Jaffard dans [Ja2].

Pour $x \in [0, 1/2]$, l'équation (1) s'écrit

$$F(x) = \rho F(2x) \ . \tag{17}$$

Pour $x \in [1/2, 1]$, on a

$$F(x) = \rho F(2x) + \rho F(2x-1)$$

qui grâce à (8), devient

$$\frac{1-2\rho}{1-\rho} F(x) + \frac{\rho^3}{1-\rho} + \rho F(2x-1).$$

Il vient

$$F(x) = (1-\rho) F(2x-1) + \rho^2 \ . \tag{18}$$

On a $F(0) = 0$ et $F(1) = \rho$, on définit alors une fonction continue $\tilde{F}$ qui s'annule aux bords par $\tilde{F}(x) = F(x) - \rho x$ pour $x \in [0, 1]$ et 0 ailleurs.
En réécrivant (17) et (18) pour $\tilde{F}$, on aura

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} \rho \tilde{F}(2x) + (2\rho^2 - \rho) x & \text{si} \quad x \in [0, 1/2] \\ (1-\rho) \tilde{F}(2x-1) - (2\rho^2 - \rho) x + 2\rho^2 - \rho & \text{si} \quad x \in [1/2, 1] \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

En posant

$$\lambda_0 = \rho \ \text{ et } \ \lambda_1 = 1 - \rho \ ;$$

$$\Omega = ]0, 1[ \ ;$$

$$S_j(x) = \frac{1}{2} x + \frac{j}{2} \ \text{ pour } \ j = 0, 1 \ ;$$

et

$$g(x) = \begin{cases} (2\rho^2 - \rho) x & \text{si} \quad x \in [0, 1/2] \\ -(2\rho^2 - \rho) x + 2\rho^2 - \rho & \text{si} \quad x \in [1/2, 1] \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On aura alors

$$\tilde{F}(x) = \sum_{j=0}^{1} \lambda_j \tilde{F}(S_j^{-1}(x)) \ + \ g(x) \ ,$$

avec

$$\lambda_0 = \rho \ \text{ et } \ \lambda_1 = 1 - \rho \ ;$$

$$S_i(\Omega) \subset \Omega \ \text{ pour } \ j = 0, 1 \ ;$$

$$S_0(\Omega) \cap S_1(\Omega) = \emptyset \ ,$$

et $g$ est une fonction uniformément Lipschitzienne et localisée.

$\tilde{F}$ est donc une fonction 1-autosimilaire. Par conséquent, en tout point $x$ codé par un rationnel, $\tilde{F}$ a un chirp logarithmique d'ordre $\alpha = \frac{-\log \lambda(x)}{p(x) \log 2}$ en $x$, de périodicité $-p(x) \log 2$ et de régularité 1.

Vu que $\tilde{F}$ est égale à $F$ modulo un monôme, il en résulte de la définition 1 et des relations (8) et (9) qu'en tout point $x$ codé par un rationnel (et ses translatés $x+1$ et $x+2$), tel que $a(x) \leq 1$, $F$ a un chirp logarithmique d'ordre $\alpha = \frac{-\log \lambda(x)}{p(x) \log 2}$ , de périodicité $-p(x) \log 2$ et de régularité 1. C'est à dire qu'on a pour $|h|$ assez petit

$$F(x+h) - F(x) = \lambda(x)[F(x + 2^{-p(x)}h) - F(x)] + O\left(|h|^{-\frac{\log \lambda(x)}{\log 2^{p(x)}}}\right);$$

$$F(x+1+h) - F(x+1) = \lambda(x)[F(x+1+2^{-p(x)}h) - F(x+1)] + O\left(|h|^{-\frac{\log \lambda(x)}{\log 2^{p(x)}}}\right)$$

$$\text{et} \quad F(x+2+h) - F(x+2) = \lambda(x)[F(x+2+2^{-p(x)}h) - F(x+2)] + O\left(|h|^{-\frac{\log \lambda(x)}{\log 2^{p(x)}}}\right).$$

**Autosimilarité des fonctions d'échelle et formalisme multifractal:**
On vient de voir que modulo un monôme, la fonction d'échelle $F_\rho$ est 1-autosimilaire. Ainsi elle vérifie le formalisme multifractal sur une partie de l'intervalle $[0,1]$.

Dans [Dau], Daubechies nous a signalé que toute fonction d'échelle, dont les coefficients $c_n$ vérifient les $L+1$ règles de somme

$$\sum_{n=0}^{N} c_n (-1)^n n^l = 0 \ \text{ pour } \ l = 0, \ldots, L \ ,$$

peut se transformer en une fonction autosimilaire $N-L-1$ dimensionnelle: les $\lambda_j$ seront des matrices $N-L-1 \times N-L-1$ et la fonction d'erreur devient une fonction vectorielle de $\mathrm{R}^{N-L-1}$. Ainsi, si on impose $N-1$ règles de somme, i.e si $L = N-2$, alors, modulo un polynôme de degré $N-2$, la fonction d'échelle devient $(N-2)$-autosimilaire dans le sens classique, et le formalisme multifractal pour $\alpha < N-2$ en résulte.
Toutefois, remarquer que la famille d'exemples $F_\rho$ fait partie du cas $L < N-2$, en effet $L = 0$ et $N = 3$, alors qu'on n'a eu aucune difficulté pour transformer $F_\rho$ en une fonction autosimilaire et de vérifier le formalisme multifractal.

Nous allons maintenant prouver que ceci est presque aussi le cas pour la fonction de de Rham

$$F(x) = F(3x) + \frac{1}{3}[F(3x-1) + F(3x+1)] + \frac{2}{3}[F(3x-2) + F(3x+2)] \ , \tag{19}$$

avec toujours $F \in L^1$ et $\int F(x)\, dx = 1$. On montre en fait que cette fonction est autosimilaire, mais avec une fonction d'erreur discontinue.

## 5 Formalisme multifractal pour la fonction de de Rham

La fonction de de Rham a été introduite par G.de Rham dans le but de construire des fonctions continues nulle part dérivables.
On se propose de montrer que cette fonction est multifractale et de vérifier le formalisme multifractal.

Pour cela, on va tout d'abord en posant $f(x) = F(x-1)$, se rendre à l'équation d'échelle classique. $f$ satisfait alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{4} c_n f(3x-n) \tag{20}$$

avec $c_0 = c_4 = \frac{2}{3}$, $c_1 = c_3 = \frac{1}{3}$ et $c_2 = 1$.

On a une seule règle de somme qui s'écrit sous la forme $c_0 + c_3 = c_1 + c_4 = c_2 = 1$.

Considérons les trois matrices

$$T_0 = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix},\ T_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Considérons aussi les vecteurs $e_1 = (1,1)$ et $e_2 = (1,0)$ et notons $P$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathrm{R}^2$ dans la base $(e_1, e_2)$.

On a

$$P^{-1}T_0^t P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix},\ P^{-1}T_1^t P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}T_2^t P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Un raisonnement par récurrence nous permet d'établir que pour tout $(i_1, \ldots, i_n) \in \{0,1,2\}^n$

$$P^{-1}\left(T_{i_1} \ldots T_{i_n}\right)^t P e_1 = e_1$$

et

$$\begin{aligned} P^{-1}\left(T_{i_1} \ldots T_{i_n}\right)^t P e_2 &= -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \prod_{l=1}^{k} \lambda_{i_l} \right) \bar{i}_{k+1} e_1 \\ &\quad + \left( \prod_{k=1}^{n-1} \lambda_{i_k} \right) e_2 , \end{aligned}$$

avec $\lambda_0 = \lambda_2 = \frac{2}{3}$ et $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$; $\bar{0} = 0$, $\bar{1} = -2$ et $\bar{2} = -1$.
Ce qui donne

$$\begin{aligned} P^{-1}\left(T_{i_1} \ldots T_{i_n}\right)^t P e_2 &= -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n-1} 3^{-k} 2^{N_k(0)+N_k(2)} (-1)^{N_k(1)} \bar{i}_{k+1} e_1 \\ &\quad + 3^{-n} 2^{N_n(0)+N_n(2)} (-1)^{N_n(1)} e_2 , \end{aligned}$$

avec $N_k(i)$ $(i = 0,1,2)$ le nombre des indices valant $i$, dans le $n$-uplet $(i_1, \ldots, i_n)$.

En utilisant alors la Proposition 1 et le Théorème 1, il est facile de prouver que $f$ est à support dans $[0,2]$ et qu'elle est Hölderienne d'exposant de Hölder $\alpha_{min} = \log(3/2)/\log 3 = 1 - \frac{\log 2}{\log 3} \simeq 0,36907...$, et que $f(x) + f(x+1) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$.

Il en résulte que la fonction de de Rham $F \in C^{\log\frac{3}{2}/\log 3}(\mathrm{R})$ et est à support compact dans $[-1.1]$ et que $F(x) + F(x-1) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$. Ainsi, on peut remplacer $F$ par sa restriction à $[0,1]$ pour la vérification du formalisme multifractal.

Ces résultats sur le support ainsi que l'équation fonctionnelle satisfaite par $f$ nous permettent aussi d'écrire

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}f(3x) & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{3}] \\ -\frac{1}{3}f(3x-1) + \frac{2}{3} & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \frac{2}{3}f(3x-2) + \frac{1}{3} & \text{si} \quad x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme

$$f(x) = \sum_{j=0}^{2} \lambda_j f(S_j^{-1}(x)) \ + \ g(x) \ , \tag{21}$$

avec

$$S_j(x) = \frac{1}{3}x + \frac{j}{3} \ \text{ pour } \ j = 0,1,2 \ ;$$

et

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \qquad x \in [0,1/3] \\ \frac{2}{3} & \text{si} \qquad x \in [1/3,2/3] \\ \frac{1}{3} & \text{si} \qquad x \in [2/3,1] \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$f$ est alors du type autosimilaire, respectant la condition de séparation, **mais** la fonction d'erreur $g$ n'est même pas continue.
On essaye alors l'argument utilisé pour les fonctions $F_\rho$ : on a $f(0) = 0$ mais $f(1) = -\frac{2}{3}f(2) + 1 = 1 \neq 0$, on définit alors une fonction $\tilde{f}(x)$ qui s'annule en 1 aussi, par $\tilde{f}(x) = f(x) - x$.
Il vient donc

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}\tilde{f}(3x) + x & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{3}] \\ -\frac{1}{3}\tilde{f}(3x-1) - x + 1 & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \frac{2}{3}\tilde{f}(3x-2) + 2x - 1 & \text{si} \quad x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

$\tilde{f}$ est aussi du type autosimilaire, avec toujours une fonction d'erreur discontinue.

On vient donc de prouver que malgré le "manque" de règles de somme, on peut transformer la fonction d'échelle de de Rham en une fonction de type autosimilaire satisfaisant la condition de séparation, mais avec une fonction d'erreur discontinue.

Signalons que la fonction de de Rham a une forme analytique explicite, en effet, pour $x \in [0,1]$, on considère la décomposition triadique

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} i_k(x) 3^{-k}$$

et on définit l'opérateur de shift $\tau$ par

$$\tau x = \sum_{k=2}^{\infty} i_k(x) 3^{-k+1} \ .$$

Observons que

$$\tau x = S_{i_1(x)}^{-1}(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \in [0,1/3] \\ 3x-1 & \text{si } x \in [1/3,2/3] \\ 3x-2 & \text{si } x \in [2/3,1]. \end{cases}$$

On pose

$$V(x) = (f(x), f(x+1)) \ .$$

Il vient alors

$$V(x) = T_{i_1(x)} \, V(\tau x)$$

donc il en résulte par itération que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$V(x) = T_{i_1(x)} \dots T_{i_n(x)} \, V(\tau^n x) \ .$$

Ainsi pour $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} F(x-1) &= f(x) = < e_2, V(x) > \\ &= < e_3, \lim_n T_{i_1(x)} \dots T_{i_n(x)} \, V(0) > \\ &= \lim_n < (T_{i_1(x)} \dots T_{i_n(x)})^t \, e_2, V(0) > \\ &= -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \prod_{l=1}^{k} \lambda_{i_l(x)} \right) \bar{i}_{k+1}(x) \qquad (22) \\ &= -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} 2^{N_{k,x}(0)+N_{k,x}(2)} (-1)^{N_{k,x}(1)} \bar{i}_{k+1}(x) \ ; \qquad (23) \end{aligned}$$

où $N_{k,x}(i)$ désigne le nombre d'indices valant $i$ dans les $k$ premiers termes du code de $x$.

On voit clairement que pour $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} F(x-1) = f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \prod_{l=1}^{k} \lambda_{i_l(x)} \right) g((S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k})^{-1}(x)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \prod_{l=1}^{k} \lambda_{i_l(x)} \right) g(\tau^k x) \ . \qquad (24) \end{aligned}$$

Ce résultat était prévisible, car il s'agit en fait de l'expression de toute fonction autosimilaire. D'autre part, en utilisant soit la propriété (22) ou de nouveau (24) , on peut vérifier que lorsque $x$ et $x+t$ ont les mêmes $n$ premiers termes du code, alors

$$\begin{aligned} F(x+t) - F(x) &= -[F(x+t-1) - F(x-1)] \\ &= -\lambda_{i(n,x)} [F(\tau^n(x+t)-1) - F(\tau^n x - 1)] \ . \qquad (25) \end{aligned}$$

En estimant cette expression, on montre (voir [DL2] p:1069) que pour $x \in [0,1]$ tel que $r_x(1) := \lim_{n \mapsto \infty} \frac{N_{n,x}(1)}{n}$ existe, on a

$$|F(x+t) - F(x)| = |F(x+t-1) - F(x-1)| \leq C|t|^{b(x)-\varepsilon} ,$$

avec

$$b(x) = \alpha_{min} + r_x(1)\frac{\log 2}{\log 3} = 1 - \frac{\log 2}{\log 3}(1 - r_x(1)) . \tag{26}$$

Cela veut dire que pour un tel $x$,

$$\alpha(x) \geq b(x) .$$

D'autre part, en posant pour $J \in \mathbb{N}$, $l_J^1(x)$ (respectivement $l_J^{0,2}(x)$) la longueur de la chaine (non interrompue) de 1 (respectivement de 0 ou 2) précédant (et incluant) $i_J(x)$. On prend $x$ tel que $\lim_j \frac{l_j^{0,2}(x)}{j} = 0 = \lim_j \frac{l_j^1(x)}{j}$ et on fixe $\delta > 0$, il existe $j'$ tel que pour $j \geq j'$

$$\frac{l_j^{0,2}(x)}{j} \leq \delta \quad \text{et} \quad \frac{l_j^1(x)}{j} \leq \delta .$$

Par ailleurs, pour tout $j$, il existe $j'' \geq j$ tel que

$$a_{j''}(x) < a(x) + \delta,$$

donc

$$|\lambda_{i(j'',x)}| > 3^{-j''(a(x)+\delta)} .$$

On pose $\tilde{j} = \bar{j} - l_{\bar{j}}^{0,2}(x)$ avec $\bar{j} = j'' - l_{j''}^1(x)$; on aura $i_{\tilde{j}}(x) = 1$ et $i_{\tilde{j}+1}(x) = 0$ ou 2. De plus si on se restreind à $j \geq j_1 = (1-\delta)^{-1}j'$, alors $j'' \geq j \geq j_1 \geq j'$ et $\bar{j} = j'' - l_{j''}^1(x) \geq j''(1-\delta) \geq j'$, et donc $l_{\bar{j}}^{0,2}(x) \leq \delta\bar{j}$. Il en résulte que

$$\tilde{j} \geq j'' - \delta j'' - \delta\bar{j} \geq (1-2\delta)j'' ;$$

Par conséquent

$$|\lambda_{i(\tilde{j},x)}| \geq |\lambda_{i(j'',x)}| > 3^{-j''(a(x)+\delta)} \geq 3^{-(a(x)+\delta)(1-2\delta)^{-1}\tilde{j}} .$$

Si $i_{\tilde{j}+1}(x) = 0$, on prend $h_j = \frac{2}{3}3^{-\tilde{j}}$, on a alors $i(\tilde{j}, x+h_j) = i(\tilde{j}, x)$ et par conséquent

$$\begin{aligned} |F(x+h_j) - F(x)| &= |F(x+h_j-1) - F(x-1)| \\ &= |\lambda_{i(\tilde{j},x)}| \; |F(y_{\tilde{j}} + \frac{2}{3} - 1) - F(y_{\tilde{j}} - 1)| \end{aligned}$$

avec $y_{\tilde{j}} = S_{i(\tilde{j},x)}^{-1}(x)$.

Mais $i_{\tilde{j}+1}(x) = 0$, donc $y_{\tilde{j}} = \frac{1}{3}y_{\tilde{j}+1}$. Donc

$$\begin{aligned} |F(x+h_j) - F(x)| &= |\lambda_{i(\tilde{j},x)}| \; |F(\frac{1}{3}y_{\tilde{j}+1} + \frac{2}{3} - 1) - F(\frac{1}{3}y_{\tilde{j}+1} - 1)| \\ &= |\lambda_{i(\tilde{j},x)}| \; |\frac{2}{3}F(y_{\tilde{j}+1} - 1) + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}F(y_{\tilde{j}+1} - 1)| \\ &= \frac{1}{3}|\lambda_{i(\tilde{j},x)}| \\ &\geq C|h_j|^{a(x)+\delta'} . \end{aligned}$$

On aura le même résultat en prenant $h_j = -\frac{2}{3}3^{-\tilde{j}}$, si $i_{\tilde{j}+1}(x) = 2$.
On vient donc de montrer le Théorème suivant

**Théorème 5** *Pour $x \in [0,1]$ tel que $r_x(1) := \lim_{n \mapsto \infty} \frac{N_{n,x}(1)}{n}$ existe, on a*

$$\alpha(x-1) = \alpha(x) = \alpha_{min} + r_x(1)\frac{\log 2}{\log 3} .$$

Remarquons aussi que lorsque $r_x(1) = 0$, on a $\alpha(x-1) = \alpha(x) = \alpha_{min}$; et que lorsque $r_x(1) = 1$ (par exemple les points de la forme $3^{-j}(l + \frac{1}{2})$), on a $\alpha(x-1) = \alpha(x) = 1$. Donc ce Théorème nous affirme que la fonction de de Rham est multifractale : il y a tout un intervalle ($[\alpha_{min}, 1]$) de singularités supérieures à la régularité globale $\alpha_{min}$.
Pour un point normal, c'est à dire tel que $r_x(0) = r_x(1) = r_x(2) = \frac{1}{3}$, $\alpha(x-1) = \alpha(x) = \alpha_{min} + \frac{1}{3}\frac{\log 2}{\log 3} \simeq 0,57938....$

Ce Théorème nous permet aussi de minorer le spectre des singularités de $F$. Pour cela, il faut calculer la dimension de Hausdorff de l'ensemble des points $x$ tels que $r_x(1)$ existe, et vaut une certaine valeur $r(1)$.
Il y a une réponse élémentaire à ceci dans un théorème établi par G.Eggleston [Egg] dont l'énoncé dans le cas triadique est le suivant

**Théorème 6** *Etant donnés trois nombres positifs $r(0)$, $r(1)$ et $r(2)$ tels que $r(0)+r(1)+r(2) = 1$; alors la dimension de Hausdorff de l'ensemble $E_{(r(0),r(1),r(2))}$ des points $x$ tels que $r_x(i)$ existe, et vaut $r(i)$, $i = 0,1,2$ est*

$$-\frac{1}{\log 3}\left(r(0)\log r(0) + r(1)\log r(1) + r(2)\log r(2)\right) .$$

En utilisant ce Théorème et celui d'avant, on aura en posant pour $\alpha \in [\alpha_{min}, 1]$, $r_\alpha(1) = \frac{\log 3}{\log 2}(\alpha - \alpha_{min})$

$$d(\alpha) \geq -\sup_{0 \leq a \leq 1 - r_\alpha(1)} \frac{a\log a + (1 - a - r_\alpha(1))\log(1 - a - r_\alpha(1)) + r_\alpha(1)\log r_\alpha(1)}{\log 3} .$$

Ce sup est atteint au point $a_\alpha := \frac{1 - r_\alpha(1)}{2}$ qui est bien dans $[0, 1 - r_\alpha(1)]$, il en résulte donc que

$$\begin{aligned} d(\alpha) \quad \geq \quad & -\frac{1}{\log 3}(\frac{\log 3}{\log 2} - \alpha\frac{\log 3}{\log 2})\log(\frac{\log 3}{2\log 2} - \alpha\frac{\log 3}{2\log 2}) \\ & -\frac{1}{\log 3}(\alpha\frac{\log 3}{\log 2} - \frac{\log 3}{\log 2} + 1)\log(\alpha\frac{\log 3}{\log 2} - \frac{\log 3}{\log 2} + 1) . \end{aligned} \tag{27}$$

Passons maintenant à la majoration du spectre des singularités. On va tout d'abord calculer $\zeta(q)$, puis on on applique un théorème de Jaffard suivant (cf [Ja1]) qui donne la majoration de $d(\alpha)$ par la transformée de Legendre de $\zeta(q) - 1$.

**Théorème 7** *Soit $q > 0$ et $s > \frac{m}{q}$. Si $f \in B_q^{s,\infty}(\mathrm{R}^m)$, alors $d(\alpha) \leq \alpha q - sq + m$.*
*Ainsi, si $m < \zeta(q) < q$, alors $d(\alpha) \leq \alpha q - \zeta(q) + m$.*

On prend $3^{-j} \leq h < 3.3^{-j}$, $A_j = [-1-3.3^{-j},-1] \cup [-3.3^{-j},0] \cup [1-3.3^{-j},1]$ et $B_j = [-1,-3^{-j}] \cup [0,1-3^{-j}]$.

$$\int |F(x+h)-F(x)|^q\,dx \leq \int_{A_j} |F(x+h)-F(x)|^q\,dx + \int_{B_j} |F(x+h)-F(x)|^q\,dx.$$

Dans un premier temps, on a grâce au fait que $F \in C^{\alpha_{min}}(\mathrm{R})$

$$\int_{A_j} |F(x+h)-F(x)|^q\,dx \leq C|h|^{1+\alpha_{min}q}\ , \tag{28}$$

et grâce au fait que $F(x)+F(x-1)=1$ pour $x \in [0,1]$

$$\int_{B_j} |F(x+h)-F(x)|^q\,dx = 2\int_0^{1-3^{-j}} |F(x+h-1)-F(x-1)|^q\,dx.$$

En remarquant que l'intervalle $[0,1-3^{-j}]$ est l'ensemble des points $x \in [0,1]$ tels que l'un des $i_k(x)$, $k=1,\ldots,j$ aumoins, est égal à 0 ou 1, on partitionne $[0,1-3^{-j}]$ sur les ensembles $B_{j,k}$, $k=1,\ldots,j$, avec $B_{j,k} = \{x \in [0,1]\ :\ i_k(x) = 0 \text{ ou } 1, \text{ et } i_{k+1}(x) = i_{k+2}(x) = \ldots = i_j(x) = 2\}$. Pour $x \in B_{j,k}$, $x+h$ et $x$ ont les mêmes $k-1$ premiers termes du code, donc

$$\begin{aligned}\int_{B_{j,k}} |F(x+h-1)-F(x-1)|^q\,dx &\leq (3^{k-1}\,|h|)^{q\alpha_{min}} \int_{B_{j,k}} |\lambda_{i(k-1,x)}|^q\,dx \\ &\leq (3^{k-1}\,|h|)^{q\alpha_{min}}\ 3^{-j+k-1}\,(\frac{1}{3}|\lambda_0|^q + \frac{1}{3}|\lambda_1|^q + \frac{1}{3}|\lambda_2|^q).\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\int_{B_j} |F(x+h)-F(x)|^q \leq C|h|^{1+q}2^{jq}(2+2^{-q})^j\ ,$$

ou encore

$$\int_{B_j} |F(x+h)-F(x)|^q \leq C|h|^{1+q-\frac{\log(2.2^q+1)}{\log 3}}\ . \tag{29}$$

Ainsi, comme $1+q\alpha_{min} > 1+q-\frac{\log(2.2^q+1)}{\log 3}$, (28) et (29) impliquent que

$$S_q(h) \leq C'|h|^{1+q-\frac{\log(2.2^q+1)}{\log 3}}\ . \tag{30}$$

En ce qui concerne la minoration de $S_q(h)$, on prend $h_j = 3^{-j-2}$, et on se restreind au domaine $B'_j = \{x \in [\frac{1}{3},\frac{2}{3}]\ :\ i_{j-1}(x) = i_{j+1}(x) = i_{j+2}(x) = i_{j+3}(x) = i_{j+4}(x) = i_{j+5}(x) = 0 \text{ et } i_j(x) = 2\}$. Pour $x \in B'_j$, $x+h_j$ et $x$ ont les mêmes $j+1$ premiers termes du code, donc

$$|F(x+h_j)-F(x)| = |\lambda_{i(j+1,x)}|\ |F(S^{-1}_{i(j+1,x)}(x+h_j)-1) - F(S^{-1}_{i(j+1,x)}(x)-1)|\ .$$

Or $S^{-1}_{i(j+1,x)}(x) \in [0,\frac{1}{3^4}]$ (car $i_{j+2}(x) = i_{j+3}(x) = i_{j+4}(x) = i_{j+5}(x) = 0$) et $S^{-1}_{i(j+1,x)}(x+h_j) = \frac{1}{3} + S^{-1}_{i(j+1,x)}(x) \in [\frac{1}{3},\frac{1}{3}+\frac{1}{3^4}]$, donc en posant $y = S^{-1}_{i(j+1,x)}(x)$, on aura

$$\begin{aligned}&|F(S^{-1}_{i(j+1,x)}(x+h_j)) - F(S^{-1}_{i(j+1,x)}(x))| \\ =\ &|F(S^{-1}_{i(j+1,x)}(x+h_j)-1) - F(S^{-1}_{i(j+1,x)}(x)-1)| \\ =\ &|\ \lambda_1\ F(S_1^{-1}(\frac{1}{3}+y)-1)\ +\ g(\frac{1}{3}+y)\ -\ \lambda_0\ F(S_0^{-1}(y)-1)\ -\ g(y)\ |\ ,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
|F(S^{-1}_{i(j+1,x)}(x+h_j)) - F(S^{-1}_{i(j+1,x)}(x))| &= |-\frac{1}{3}\,F(3y-1)\; + \frac{2}{3}\; - \frac{2}{3}\,F(3y-1)\,| \\
&= |\frac{2}{3} - F(3y-1)| \\
&\geq \frac{2}{3} - \frac{16}{27} > 0
\end{aligned}$$

et parsuite

$$S_q(h_j) \leq C'|h_j|^{1+q-\frac{\log(2.2^q+1)}{\log 3}}\;. \tag{31}$$

Ainsi comme $\forall q > 0,\ 1+q-\frac{\log(2.2^q+1)}{\log 3} < q$, on en déduit que $\forall q > 0,\ \zeta(q) = 1+q-\frac{\log(2.2^q+1)}{\log 3}$.

Donc grâce au théorème de Jaffard, le spectre des singularités est majoré par $\inf_{q>1}(\alpha q - \eta(q)+1)$.
Un calcul facile nous montre que cet inf est atteint en $q_\alpha = [\log((1-\alpha)\log 3) - \log(2\log 2 - 2(1-\alpha)\log 3)]/\log 2$, et que $q_\alpha > 1$ si et seulement si $\alpha \in [\alpha_{min}, 1-\frac{4}{5}\frac{\log 2}{\log 3} \simeq 0,6554587...]$ et que la valeur de $\alpha q - \zeta(q) + 1$ en $q_\alpha$ est

$$\begin{aligned}
-\frac{(1-\alpha)}{\log 2}\log((1-\alpha)\log 3) - [\frac{1}{\log 3} + \frac{(\alpha-1)}{\log 2}]\;\; \log(2\log 2 - 2(1-\alpha)\log 3) \\
+\frac{1}{\log 3}\log(2\log 2)
\end{aligned}$$

qui coïncide bien avec le minorant de $d(\alpha)$ dans (27).

On vient donc de vérifier le formalisme multifractal pour la fonction de de Rham pour tout $\alpha \in [\alpha_{min}, 1-\frac{4}{5}\frac{\log 2}{\log 3}]$.

Signalons que les résultats concernant la régularité ponctuelle et la détermination du spectre des singularités ont été établis par Meyer (cf [Me2]) avant que nous fassions ce travail, en effectuant un changement de temps de la forme $s = h(t)$ où $h$ est un homéomorphisme croissant de $[0,1]$ dans $[0,1]$ de sorte que, $F \circ h^{-1}$ soit une fonction $C^\sigma$ en tout point, $\sigma$ étant à la fois l'exposant de Hölder ponctuel et global.
Donc notre travail permet de retrouver les résultats de Meyer par une autre méthode pour et également d'achever l'étude de la validité du formalisme multifractal.

## References


[ABM1] A.Arneodo,E.Bacry and J.F.Muzy *Singularity spectrum of fractal signals from wavelet analysis: Exact results* Preprint (1991).

[ABM2] A.Arneodo, E.Bacry and J.F.Muzy *Wavelet analysis of fractal signals. Direct determination of the singularity spectrum of fully developped turbulence data* Preprint (1991).

[Be1] M.Ben Slimane *Multifractal formalism for selfsimilar functions under the action of nonlinear dynamical systems.* Preprint (1995).

[Be2] M.Ben Slimane *Multifractal formalism and anisotropic selfsimilar functions.*Preprint (1995).

[BMP] G.Brown, G.Michon and J.Peyrière *On the multifractal analysis of Measures* Jour. Stat. Phys. T.66 PP.775-790 (1992).

[CLP] Collet, Lebowitz and Porzio *The dimension spectrum of some dynamical systems* Jour. Stat. Phys. T.47 PP.609-644 (1987).

[Dau] I.Daubechies *Communication personnelle.*

[DL1] I.Daubechies and J.C.Lagarias *Two-scale difference equations. 1. Existence and global regularity of solutions* SIAM J Math anal, Vol 22.No 5,pp 1388-1410, September 1991.

[DL2] I.Daubechies and J.C.Lagarias *Two-scale difference equations. 2.Local regularity, infinite products of matrices and fractals* SIAM J Math anal , 24: 1031-1079, 1992.

[DL3] I.Daubechies and J.C.Lagarias *On the thermodynamic formalism for functions* Reviews in Mathematical Physics, Vol. 6, No. 5a 1033-1070 (1994).

[Egg] H.G.Eggleston *The Fractional dimension of a set defined by dicimal properties* Quart. J.Math.Oxford Ser, 20,pp31-36, 1949.

[Ja1] S.Jaffard *Multifractal formalism for functions. Part 1: Results valid for all functions* Preprint, (1994).

[Ja2] S.Jaffard *Multifractal formalism for functions. Part 2: Selfsimilar functions* Preprint, (1994).

[Ja3] S.Jaffard *Local behavior of Riemann's function* Contemporary Mathematics. AMS. Vol:189, pp: 287-307 (1995).

[JM] S.Jaffard and Y.Meyer *Pointwise behavior of functions* Preprint (1993).

[Me1] Y.Meyer *Analyse par ondelettes et analyse 2-microlocale des chirps généralisés* Cahiers de Mathématiques de la Décision n:9246. 27/11/92.

[Me2] Y.Meyer *Fonctions multifractales.* Cours de DEA à l'Université de Paris Dauphine (1995).