

Multifractalité et Formalisme Multifractal pour les Fonctions Autosimilaires avec g Peu Régulière

Ben Slimane Mourad *

19 Janvier 96

Résumé. Le formalisme multifractal a été prouvé pour les fonctions autosimilaires pour les exposants de Hölder inférieurs à la régularité globale de la fonction d'erreur g . On se propose d'étudier le problème pour les exposants de Hölder supérieurs. On montre qu'il y a plusieurs changements au niveau de la nature fractale et la validité du formalisme multifractal: les singularités de g perturbent le spectre des singularités de F , et le formalisme multifractal est faux dans certains cas.

1 Introduction

Le formalisme multifractal est une conjecture qui dit que pour une fonction F et un $\alpha > 0$, la dimension de Hausdorff $d(\alpha)$ de l'ensemble E^α des points x où F a la même singularité α (i.e $\alpha_F(x) := \sup\{\beta : F \in C^\beta(x)\} = \alpha$), est égale à la transformée de Legendre de $\eta(p) - 1$

$$d(\alpha) = \inf(\alpha p - \eta(p) + 1)$$

avec

$$\eta(p) = \sup\{s : F \in B_p^{s/p, \infty}\};$$

$B_p^{s, \infty}$ étant l'espace de Besov défini par ([12])

$$\int |C_{a,b}(F)|^p db \leq C a^{sp}$$

où $C_{a,b}(F)$ est la transformée en ondelettes de F .

Ce formalisme s'écrit encore lorsque $\eta(p) < p$ sous la forme

$$d(\alpha) = \inf(\alpha p - \zeta(p) + 1)$$

avec

$$\zeta(p) = \liminf_{|h| \rightarrow 0} \frac{\log \int |F(x+h) - F(x)|^p dx}{\log |h|}.$$

La validité de ce principe a fait l'objet de plusieurs recherches ([1], [2], [6], [8] et [9]). Ces auteurs se sont intéressés à des fonctions satisfaisant des équations fonctionnelles de type

$$F(x) = \sum_{i=1}^d \lambda_i F(S_i^{-1}(x)) + g(x) \quad (1)$$

*CERMICS, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, La Courtine, 93167 Noisy-le-Grand, France.

avec $|\lambda_i| < 1$, S_i des contractions sur un domaine borné Ω de \mathbf{R}^m et g une fonction assez régulière. Ces fonctions sont dites autosimilaires et vérifient le formalisme multifractal ([1], [2], [6] et [9]) pour α inférieur à la régularité globale de g .

On se propose d'étudier le cas où la fonction d'erreur g est peu régulière. On s'intéresse évidemment au cas "non trivial", c'est à dire au calcul du spectre des singularités et à la vérification du formalisme multifractal pour α supérieur à la régularité globale de g .

Dans , on s'est restreint à l'analyse multifractale et la validité du formalisme multifractal pour les fonctions autosimilaires pour les exposants de Hölder inférieurs à la régularité globale de la fonction d'erreur g . Cette restriction vient du fait que pour la détermination de l'exposant de Hölder ponctuel, on a utilisé le critère qui relie la régularité ponctuelle et la transformée en ondelettes (continue ou discrète) via la notion des espaces 2-microlocaux, qui n'est pratique que lorsque l'exposant de Hölder cherché est plus petit que la régularité de l'ondelette choisie pour l'analyse.

Mais on peut rencontrer des décompositions sur des bases d'ondelettes peu régulières, voir même discontinues comme le cas du système de Haar; Malheureusement, dans ce cas la version discrète du critère précédent ne suffit pas, et il sera fort intéressant de déduire des renseignements de régularité correspondants à des exposants de Hölder supérieurs à la régularité de la base. Un premier moyen pour faire ça est de réécrire cette décomposition sur une base d'ondelettes plus régulières, en effet, il existe des formules de reconstruction plus générales que celle qui fait intervenir uniquement l'ondelette d'analyse (on prend $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$)

$$F(x) = C_\psi \int_{a>0} \int_{b \in \mathbf{R}} C_\psi(a, b)(F) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) db \frac{da}{a^2} \quad (2)$$

dans lesquelles interviennent deux ondelettes, l'une pour l'analyse, l'autre pour la synthèse. On peut montrer que si Ψ est telle que

$$C_\psi \int_{a>0} \hat{\psi}(a) \hat{\Psi}(-a) \frac{da}{a} = C_\psi \int_{a>0} \hat{\psi}(-a) \hat{\Psi}(a) \frac{da}{a} = 1,$$

alors F peut être reconstruite en remplaçant ψ dans (2) par la fonction Ψ ; on obtient ainsi

$$F(x) = C_\psi \int_{a>0} \int_{b \in \mathbf{R}} C_\psi(a, b)(F) \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right) db \frac{da}{a^2}. \quad (3)$$

Un second moyen est de caractériser les espaces 2-microlocaux par des "ondelettes" singulières. Comme la définition de ces espaces qui utilise la transformée en ondelettes continue ne dépend pas de l'ondelette choisie (et plus généralement de la décomposition de Littlewood-Paley choisie), alors en prenant "l'ondelette du pauvre" $\psi = \delta_1 - \delta_0$ (les masses de Dirac concentrées aux points 1 et 0) qui est singulière, on aura alors

$$C(a, b)(F) = \left(\frac{1}{a} \psi\left(\frac{\cdot}{a}\right) * F \right)(b) = F(b-a) - F(b);$$

ce qui permet de caractériser les espaces 2-microlocaux $C^{\alpha, \alpha'}(x_0)$, $0 < \alpha < 1$ et $-\alpha < \alpha' < 1 - \alpha$ par la relation (cf [11])

$$|F(b-a) - F(b)| \leq C a^\alpha \left(1 + \frac{|b-x_0|}{a} \right)^{-\alpha'} \quad \text{si } 0 < a + |b-x_0| \leq 1 \text{ et } a > 0. \quad (4)$$

Cette caractérisation est “très voisine” de la définition de la régularité Hölderienne ponctuelle “au point x_0 ”, ceci confirme le rapport qui existe entre les espaces 2-microlocaux et la régularité ponctuelle, mais elle est nettement plus difficile à vérifier.

On peut aussi donner des critères pour la régularité ponctuelle entre 1 et 2 par “l’ondelette” $(\delta_1 - \delta_0) * (\delta_1 - \delta_0) = \delta_2 - 2\delta_1 + \delta_0$ qui a deux moments nuls, on a en fait l’équivalence entre $F \in C^{\alpha, \alpha'}(x_0)$, $1 < \alpha < 2$ et $-\alpha < \alpha' < 2 - \alpha$ et

$$|F(b + 2a) - 2F(b + a) + F(b)| \leq Ca^\alpha \left(1 + \frac{|b - x_0|}{a}\right)^{-\alpha'} \quad \text{si } 0 < a + |b - x_0| \leq 1. \quad (5)$$

La version discrète (pour $a = 2^{-j-1}$ et $b = k2^{-j}$) de cette relation est

$$|F(k2^{-j} + 2^{-j}) - 2F(k2^{-j} + 2^{-j-1}) + F(k2^{-j})| \leq C2^{-\alpha j} \left(1 + \frac{|k2^{-j} - x_0|}{2^{-j}}\right)^{-\alpha'} \quad (6)$$

$$\text{si } 0 < 2^{-j} + |k2^{-j} - x_0| \leq 1.$$

Or pour F définie sur $[0, 1]$, continue et s’annulant aux points 0 et 1, le terme $F(k2^{-j} + 2^{-j}) - 2F(k2^{-j} + 2^{-j-1}) + F(k2^{-j})$ correspond bien au coefficient $C_{j,k}$ du développement de F sur la base de Schauder $\Lambda_{j,k}(x) = \Lambda(2^j x - k)$ pour $j \in \mathbb{N}$ et $k = 0, \dots, 2^j - 1$, où rappelons $\Lambda(x) = \inf(x, 1 - x)$ si $x \in [0, 1]$; 0 sinon, qui est uniformément Lipschitzienne. La relation (6) ne suffit pas pour caractériser les espaces 2-microlocaux $C^{\alpha, \alpha'}(x_0)$ pour $\alpha > 1$ pour la raison suivante : si elle l’était alors elle caractériserait aussi la régularité ponctuelle; or, les fonctions $F_1(x) = \Lambda(x)$ et $F_2(x) = \Lambda(x) + \frac{1}{2}\Lambda(2x) + \frac{1}{2}\Lambda(2x - 1)$ ont les mêmes coefficients sur la base de Schauder pour $j \geq 2$ et pourtant F_1 n’est pas dérivable au point $1/2$ alors que F_2 y est C^∞ . Voici un autre problème : la fonction x^2 est C^∞ alors que ses coefficients $C_{j,k} = 2^{-2j}$ ne décroissent pas rapidement, en effet le système biorthogonal de la base de Schauder a seulement 2 moments nuls.

Le même problème se pose pour les fonctions exprimées dans le système de Haar $h_{j,k}(x) = 2^{j/2}h(2^j x - k)$ pour $j \in \mathbb{N}$ et $k = 0, \dots, 2^j - 1$; les points dyadiques sont des points de discontinuités pour ces fonctions. Pour les points “suffisamment loin” des dyadiques, ces fonctions sont C^∞ et le critère de la régularité ponctuelle marche; pour les points “bien approximés” par les dyadiques, ce critère ne s’applique pas. Dans [10], Jaffard a montré comment l’exposant de Hölder ponctuel dépend aussi de la qualité de l’approximation par les points dyadiques. Nous évoquerons l’un de ses résultats dans ce chapitre. La version discrète ne suffit pas pour la caractérisation des espaces 2-microlocaux par les ondelettes peu régulières. Les résultats de Jaffard concernant le critère de régularité ponctuelle et les relations entre ces espaces et la régularité ponctuelle donnent une réponse élémentaire à ce problème.

Signalons enfin que les espaces de Besov (et donc $\eta(p)$) peuvent être caractérisés par des critères sur les coefficients d’ondelettes singulières telle que le système de Haar. C’est avec ces “outils” qu’on part maintenant vers l’étude multifractale et du formalisme multifractale pour les fonctions autosimilaires pour les exposants de Hölder supérieurs à la régularité globale de g .

On va prendre comme fonction d’erreur g la fonction de Schauder $\Lambda(x)$ qui est C^1 selon notre définition pour la régularité Hölderienne uniforme; on définit sur $[0, 1]$ deux contractions S_0 et S_1 par $S_0(x) = \frac{1}{2}x$ et $S_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Les fonctions autosimilaires

qui en découlent vont révéler plusieurs changements au niveau de la nature fractale et la validité du formalisme multifractal.

En itérant l'équation (1), on obtient le développement explicite de F sur la base de Schauder

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{i_1(x)} \dots \lambda_{i_j(x)} \Lambda \left((S_{i_1(x)} \circ \dots \circ S_{i_j(x)})^{-1}(x) \right) ; \quad (7)$$

$(i_1(x), \dots, i_j(x), \dots)$ étant le code binaire de $x \in [0, 1] : x = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{i_l}{2^l}$ (il n'est pas nécessaire d'interdire ici $i_l = 1$ à partir d'un certain rang).

Notons

$$i(j, x) = (i_1, \dots, i_j) , \quad \lambda_{i(j, x)} = \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_j} ,$$

$$S_{i(j, x)} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_j} ;$$

et définissons l'opérateur de shift τ par

$$\tau x = \sum_{k=2}^{\infty} i_k(x) 2^{-k+1} .$$

Observons que

$$\tau x = S_{i_1(x)}^{-1}(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ 2x - 1 & \text{si } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

On a alors

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{i(j, x)} \Lambda \left(S_{i(j, x)}^{-1}(x) \right) ;$$

ou encore

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{i(j, x)} \Lambda (\tau^j x) ;$$

On pose

$$|\lambda|_{max} = \max\{|\lambda_0|, |\lambda_1|\} \text{ et } |\lambda|_{min} = \min\{|\lambda_0|, |\lambda_1|\} ;$$

Considérons

$$v = -\frac{\log |\lambda|_{max}}{\log 2} \quad \text{et} \quad \omega = -\frac{\log |\lambda|_{min}}{\log 2}$$

Dans la prochaine section, on montre que dans certains cas, les singularités des fonctions de la base de Schauder aux points dyadiques perturbent la nature fractale de F : la régularité ponctuelle de F en un point x dépend de la "qualité" de son approximation par les points dyadiques. Dans d'autres cas, on trouve des résultats semblables à ceux de l'analyse multifractale des fonctions autosimilaires avec une fonction d'erreur g assez régulière.

Dans la troisième section, on donnera la valeur exacte du spectre des singularités.

Dans la quatrième section, on déterminera les fonctions $\eta(p)$ et $\zeta(p)$ et on étudiera la validité du formalisme multifractal.

2 Régularité ponctuelle

Le critère qui relie la régularité ponctuelle et les coefficients d'ondelettes via la notion des espaces 2-microlocaux, n'est valable que pour les exposants de Hölder inférieurs à la régularité de la base, donc pour les exposants de Hölder inférieurs à 1 pour le cas de la base de Schauder. Ce critère ne permet pas d'estimer les exposants de Hölder supérieurs aux points dyadiques et ceux qui sont "bien approximés par les dyadiques". Dans [10], Jaffard a trouvé des renseignements pour ce problème; en particulier, il a prouvé que la régularité aux points dyadiques est assurée si on adjoint à la condition 2-microlocale classique une condition "algébrique" sur les coefficients qui exprime le fait que le graphe de F n'est pas "anguleux" au point dyadique considéré.

On définit le "taux d'approximation de x par les points dyadiques" par

$$r(x) = \limsup_l \frac{\log \text{dist}(x, 2^{-l}\mathbf{N})}{\log 2^{-l}};$$

Remarquons que $r(x) \geq 1$ pour tout x .

Théorème 1 *Soit $f(x) = \sum C_{j,k} \Lambda(2^j x - k)$. Si $f \in C^\alpha(x)$ pour $\alpha < 3$, alors il existe une constante $A \in \mathbf{R}$ telle que*

$$|C_{j,k} - A2^{-2j}| \leq C2^{-\alpha j}(1 + |2^j x - k|)^\alpha. \quad (8)$$

Inversement, supposons que les coefficients $C_{j,k}$ vérifient pour une constante A appartenant à \mathbf{R} , la condition 2-microlocale

$$|C_{j,k} - A2^{-2j}| \leq C2^{-\alpha j}(1 + |2^j x - k|)^\beta \quad (9)$$

avec $\beta < \alpha$ et $1 < \alpha < 3$.

Alors

- *Si x est non dyadique, alors*

$$\alpha(x) \geq 1 + \frac{\alpha - 1}{r(x)}; \quad (10)$$

(en particulier, si $r(x) = 1$ alors $\alpha(x) \geq \alpha$).

On a en fait un résultat plus précis pour $r(x) > 1$; Pour chaque j , on définit $k_j = k_j(x)$ par

$$|k_j 2^{-j} - x| = \inf_{k \in \mathbf{Z}} |k 2^{-j} - x|$$

et $S \subset \mathbf{N}^$ par*

$$j \in S \quad \text{si} \quad k_j 2^{-j} \neq k_{j-1} 2^{-(j-1)} \quad \text{et} \quad k_j 2^{-j} = k_{j+1} 2^{-(j+1)}.$$

Soit $J \in S$ et J' le premier indice tel que $|k_J 2^{-J} - x| \geq 2^{-J'}/4$.

On pose

$$E_J(x) = C_{J-1, (k_{J-1})/2} - \sum_{j=J}^{J'} 2^{j-J} (C_{j, 2^{j-J} k_{J-1}} + C_{j, 2^{j-J} k_J}).$$

On pose aussi

$$r_J(x) = \frac{\log |k_J 2^{-J} - x|}{\log 2^{-J}} \quad \text{et} \quad \alpha_J(x) = \frac{\log |E_J(x)|}{\log 2^{-J}}.$$

Si $\alpha > \liminf_{J \in S} \left(1 + \frac{\alpha_J(x) - 1}{r_J(x)}\right)$, l'exposant de Hölder de f en x est

$$\alpha(x) = \liminf_{J \in S} \left(1 + \frac{\alpha_J(x) - 1}{r_J(x)}\right); \quad (11)$$

sinon

$$\alpha(x) \geq \alpha. \quad (12)$$

- Si x est dyadique (donc $J' = \infty$), alors si

$$E_J(x) = 0 \quad (13)$$

alors $f \in C^\alpha(x)$ (donc $\alpha(x) \geq \alpha$); sinon f n'est pas dérivable en x (donc $\alpha(x) \leq 1$).

Il faut noter que pour $\alpha \geq 3$ le théorème précédent marche de la même façon en retranchant $B(x - k_0 2^{-j})^3$ ($k_0 = [2^j x]$) des coefficients $C_{j,k}$ pour $3 \leq \alpha < 4$; $C(x - k_0 2^{-j})^4$ pour $4 \leq \alpha < 5$...

Remarquons aussi qu'on n'a aucune perte de régularité par rapport aux résultats sur une base s'ondelettes arbitrairement régulière si $r(x) = 1$, ainsi par exemple en tout point x normal en base 2 (c'est à dire que la proportion des 0 dans son développement binaire est égale à celle des 1).

Passons maintenant à l'application de ce résultat. Pour cela, on va d'abord chercher la condition 2-microlocale. Pour $k2^{-j} = \sum_{l=1}^j i_l 2^{-l}$, on a $C_{j,k} = \prod_{l=1}^j \lambda_{i_l}$.

On pose

$$L_j(x) = \sup_{|k2^{-j} - x| \leq 2 \cdot 2^{-j}} |C_{j,k}|,$$

$$\beta_j(x) = \frac{\log L_j(x)}{\log 2^{-j}}$$

et

$$\beta(x) = \liminf \beta_j(x).$$

Considérons l'unique entier \tilde{j} tel que

$$2^{-\tilde{j}} \leq |k2^{-j} - x| < 2 \cdot 2^{-\tilde{j}}. \quad (14)$$

Si $\tilde{j} \geq j$ alors $|k2^{-j} - x| < 2 \cdot 2^{-\tilde{j}} \leq 2 \cdot 2^{-j}$, donc

$$\begin{aligned} |C_{j,k}| &\leq L_j(x) \\ &\leq C 2^{-(\beta(x) - \varepsilon)j} \\ &\leq C 2^{-(\beta(x) - \varepsilon)j} (1 + |2^j x - k|)^\gamma \end{aligned}$$

pour tout $\gamma > 0$.

Par ailleurs, si $\tilde{j} < j$ alors

$$\begin{aligned} |C_{j,k}| &\leq L_{\tilde{j}}(x) |\lambda|_{\max}^{j-\tilde{j}} \\ &\leq L_{\tilde{j}}(x) 2^{-v(j-\tilde{j})} \\ &\leq C 2^{-(\beta(x)-\varepsilon)j} |2^j x - k|^{\beta(x)-\varepsilon-v}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a la condition 2-microlocale

$$|C_{j,k}| \leq C 2^{-(\beta(x)-\varepsilon)j} (1 + |2^j x - k|)^{\beta(x)-\varepsilon-v}. \quad (15)$$

Passons maintenant à l'estimation de E_J .

De la définition de J' , il vient

$$\begin{aligned} E_J(x) &= \lambda_{i(J-1,x)} - \sum_{j=J}^{J'} 2^{j-J} [\lambda_{i(J-1,x)} \lambda_1^{j-J} \lambda_0 + \lambda_{i(J-1,x)} \lambda_1 \lambda_0^{j-J}] \\ &= \lambda_{i(J-1,x)} \left(1 - \frac{\lambda_0}{1-2\lambda_1} (1 - (2\lambda_1)^{J'-J+1}) - \frac{\lambda_1}{1-2\lambda_0} (1 - (2\lambda_0)^{J'-J+1}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \lambda_{i(J-1,x)} \left(2 - \frac{2\lambda_0}{1-2\lambda_1} (1 - (2\lambda_1)^{J'-J+1}) - \frac{2\lambda_1}{1-2\lambda_0} (1 - (2\lambda_0)^{J'-J+1}) \right). \end{aligned}$$

On pose

$$a_J(x) = \frac{\log |\lambda_{i(J,x)}|}{\log 2^{-J}};$$

On a alors le résultat suivant

Théorème 2 *Soit $0 < |\lambda_0| < 1$ et $0 < |\lambda_1| < 1$; Soit F la fonction donnée par la série*

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{i(j,x)} \Lambda(\tau^j x)$$

solution de l'équation autosimilaire

$$F(x) = \lambda_0 F(2x) + \lambda_1 F(2x-1) + \Lambda(x);$$

Alors pour $x \in [0, 1]$, on a

- 1. Si $\lambda_0 + \lambda_1 \neq 1/2$, alors
 - (a) si $|\lambda|_{\max} < 1/2$ (donc $v > 1$), alors $\beta(x) > 1$ pour tout x , et
 - * A. si $r(x) > 1$ et x n'est pas dyadique, alors

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \liminf \left(1 + \frac{a_J(x)}{r_J(x)} - \frac{1}{r_J(x)} \right) \\ &= 1 + \liminf \frac{\log 2^J |\lambda_{i(J,x)}|}{\log |k_J 2^{-J} - x|}. \end{aligned} \quad (16)$$

- * B. si $r(x) = 1$ alors $\alpha(x) = \beta(x)$.

- * C. si x est dyadique, alors $\alpha(x) \leq 1$.
- (b) si $|\lambda|_{max} \geq 1/2$ (donc $v \leq 1$) alors

$$\alpha(x) = \beta(x) .$$

- 2. Si $\lambda_0 + \lambda_1 = 1/2$, alors

$$\alpha(x) = \beta(x) .$$

Preuve:

Remarquons d'abord que dans le cas $r(x) = 1$, la condition 2-microlocale (15) et la propriété (10) du Théorème de Jaffard nous donnent

$$\alpha(x) \geq \beta(x) ;$$

Et que d'autre part, si $\beta(x) < 2$ alors grâce à la première partie du Théorème 1, $\alpha(x)$ ne peut pas être supérieure à $\beta(x)$.

Si $2 \leq \beta(x) < 3$, remarquons que la première partie du Théorème 1 implique que

$$|C_{j,k} - C_{j,k+1}| \leq C2^{-\alpha j}(1 + |2^j x - k|)^\alpha ;$$

Pour notre cas, la différence de deux valeurs consécutives de $C_{j,k}$ est de l'ordre de grandeur de $C_{j,k}$, donc

$$\alpha(x) \leq \beta(x) ;$$

Des différences d'ordre supérieur pour les $C_{j,k}$ sont du même ordre de grandeur que celui de $C_{j,k}$, donc pour $\beta(x) \geq 3$, on obtient aussi $\alpha(x) \leq \beta(x)$. Ainsi

$$\alpha(x) = \beta(x).$$

Maintenant, on va calculer l'exposant de Hölder pour les autres x ;

1. Si $\lambda_0 + \lambda_1 \neq 1/2$, alors

(a) si $|\lambda|_{max} < 1/2$, on a alors

- i. Si $r(x) > 1$ et x n'est pas dyadique, on a

$$|E_J(x)| \sim |\lambda_{i(J,x)}| ; \tag{17}$$

Donc

$$\alpha_J(x) \sim \frac{\log |\lambda_{i(J,x)}|}{\log 2^{-J}} = 1 + \frac{\log 2^J |\lambda_{i(J,x)}|}{\log 2^{-J}} .$$

Il s'ensuit que

$$1 + \frac{\alpha_J(x) - 1}{r_J(x)} \approx 1 - \frac{1}{r_J(x)} + \frac{1}{r_J(x)} \frac{\log |\lambda_{i(J,x)}|}{\log 2^{-J}} = 1 + \frac{1}{r_J(x)} (a_J(x) - 1)$$

où \approx signifie que les deux suites ont la même limite inférieure; et puisque $r_J(x) \approx J'/J$ alors

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\alpha_J(x) - 1}{r_J(x)} &\approx 1 + \frac{J}{J'} \left(-1 + \frac{\log |\lambda_{i(J,x)}|}{\log 2^{-J}} \right) \\ &\approx 1 + \frac{\log 2^J |\lambda_{i(J,x)}|}{\log 2^{-J'}}. \end{aligned}$$

Comme $r(x) > 1$ et $\beta(x) > 1$ alors pour $\epsilon > 0$ assez petit (tel que $\beta(x) > 1 + \epsilon$) il existe une infinité de J telle que $1/r_J(x) < 1 - \epsilon$; pour tels J on a $\beta_J(x) > 1 + \epsilon$ et donc comme $|\lambda|_{max} < 1/2$, alors $|\lambda|_{max} \leq \frac{\rho}{2}$ pour un certain $\rho < 1$, et

$$\begin{aligned} L_{J'}(x) &\leq |\lambda_{i(J,x)}| |\lambda|_{max}^{J'-J} \\ &\leq |\lambda_{i(J,x)}| \left(\frac{\rho}{2}\right)^{J'-J} \end{aligned}$$

donc grâce à (17)

$$\alpha_J(x) \leq \frac{\log L_{J'}(x)}{\log 2^{-J}} + \left(\frac{J'}{J} - 1\right) \left(\frac{\log \rho}{\log 2} - 1\right)$$

et par suite

$$1 + \frac{\alpha_J(x) - 1}{r_J(x)} \leq \beta_{J'}(x) - \left(\frac{1}{r_J(x)} - 1\right) \frac{\log \rho}{\log 2}$$

donc

$$\beta(x) - \epsilon > \liminf \left(1 + \frac{\alpha_J(x) - 1}{r_J(x)} \right);$$

La propriété (11) du Théorème de Jaffard donne

$$\alpha(x) = \liminf \left(1 + \frac{\alpha_J(x) - 1}{r_J(x)} \right) = 1 + \liminf \frac{\log 2^J |\lambda_{i(J,x)}|}{\log 2^{-J'}};$$

donc

$$\alpha(x) = 1 + \liminf \frac{\log 2^J |\lambda_{i(J,x)}|}{\log |k_J 2^{-J} - x|}.$$

ii. Si x est un point dyadique, comme $E_J(x) \neq 0$ alors $\alpha(x) \leq 1$.

(b) si $|\lambda|_{max} \geq 1/2$ alors dans ce cas,

i. si x n'est pas dyadique, on a

$$|E_J(x)| \leq C 2^{J'-J} L_{J'}(x)$$

soit donc

$$1 + \frac{\alpha_J(x) - 1}{r_J(x)} \geq \beta_{J'}(x)$$

et donc on aura

$$\alpha(x) = \beta(x).$$

ii. Si x est dyadique, comme $\beta(x) = v$ est inférieure à 1, alors le théorème classique de la caractérisation de la régularité nous donne $\alpha(x) = v$.

2. Si $\lambda_0 + \lambda_1 = 1/2$, alors

(a) si x n'est pas dyadique, on a

$$E_J(x) = \frac{1}{2} \lambda_{i(J-1,x)} \left((2\lambda_1)^{J'-J+1} + (2\lambda_0)^{J'-J+1} \right)$$

donc, on aura comme auparavant

$$|E_J(x)| \leq C 2^{J'-J} L_{J'}(x)$$

et

$$\alpha(x) = \beta(x) .$$

(b) Si x est dyadique, alors $E_J = 0$, donc la condition 2-microlocale (15) nous donne $\alpha(x) \geq v$ et l'égalité découle grâce au même raisonnement que celui du cas $r(x) = 1$ pour $|\lambda|_{max} < 1/2$.

La preuve du Théorème 2 est donc achevée.

3 Spectre des singularités

On va prouver le résultat suivant

Proposition 1 • (i) Si $\lambda_0 + \lambda_1 \neq 1/2$, alors

– (i-1) si $|\lambda|_{max} \geq 1/2$ (donc $v \leq 1$) alors pour $\alpha \in [v, \omega]$

$$d(\alpha) = \inf_q (\alpha q - \gamma(q)) \quad \text{avec} \quad \gamma(q) = -\frac{\log(|\lambda_0|^q + |\lambda_1|^q)}{\log 2}$$

et $d(\alpha) = -\infty$ ailleurs.

– (i-2) si $|\lambda|_{max} < 1/2$ (donc $v > 1$) alors pour $\alpha \in [1, \min\{1 + \frac{1}{\sigma}, e_\sigma\}]$ avec $e_\sigma = -(|2\lambda_0|^\sigma \log |2\lambda_0| + |2\lambda_1|^\sigma \log |2\lambda_1|) / \log 2$ et σ l'unique réel vérifiant $|2\lambda_0|^\sigma + |2\lambda_1|^\sigma = 1$, on a

$$d(\alpha) = \sigma(\alpha - 1) .$$

• (ii) Si $\lambda_0 + \lambda_1 = 1/2$, alors pour $\alpha \in [v, \omega]$

$$d(\alpha) = \inf_q (\alpha q - \gamma(q))$$

et $d(\alpha) = -\infty$ ailleurs.

Preuve :

Dans cette preuve, on ne va pas tenir compte des points dyadiques puisque leur contribution donne une dimension de Hausdorff nulle.

Vu la forme de l'expression de l'exposant de Hölder, la preuve des cas (i-1) et (ii) est exactement la même que celle faite dans [9]. Remarquons d'autre part que si x est un point

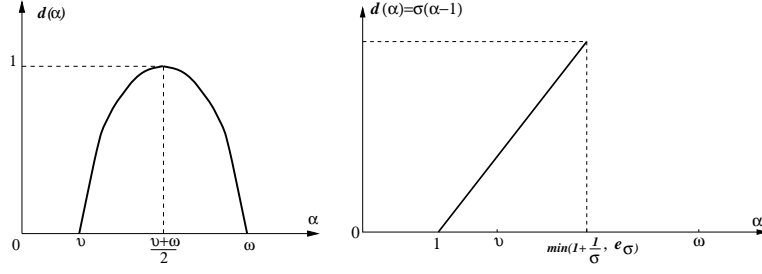


Figure 1: spectre des singularités pour les cas **(i-1)** et **(ii)** (à gauche) et **(i-2)** (à droite)

normal dans la base binaire alors $\lim_l \frac{\log \text{dist}(x, 2^{-l}\mathbb{N})}{\log 2^{-l}} = 1$ et donc le Théorème 2 implique que l'exposant de Hölder en x est $(v+\omega)/2$. Comme presque tout point est normal en base 2, alors pour presque tout point l'exposant de Hölder est $(v+\omega)/2$; donc $d((v+\omega)/2) = 1$.

Il nous reste maintenant à étudier le cas (i-2); on va d'abord caractériser les ensembles des singularités. Pour x non dyadique tel que $r(x) > 1$, on a $\alpha(x) = \alpha$ si et seulement si

$$|k_J 2^{-J} - x| = |\tilde{\lambda}_{i(J,x)}|^{\theta_J(x)} \text{ avec } \limsup \theta_J(x) = \frac{1}{\alpha - 1}$$

avec $\tilde{\lambda}_{i(j,x)} = \tilde{\lambda}_{i_1(x)} \dots \tilde{\lambda}_{i_j(x)}$ où $\tilde{\lambda}_0 = 2\lambda_0$ et $\tilde{\lambda}_1 = 2\lambda_1$; cela se traduit comme suit :

$$\forall \varepsilon > 0, \{J : |k_J 2^{-J} - x| < |\tilde{\lambda}_{i(J,x)}|^{\frac{1}{\alpha-1+\varepsilon}}\} \text{ est infini}$$

et

$$\forall \delta > 0, \exists J_\delta \text{ tel que } \forall J \geq J_\delta, |k_J 2^{-J} - x| \geq |\tilde{\lambda}_{i(J,x)}|^{\frac{1}{\alpha-1-\delta}}.$$

Ainsi, de la définition de k_J , il vient

$$\alpha(x) = \alpha \Leftrightarrow x \in \left(\bigcap_{\delta < \frac{1}{\alpha-1}} E_\delta \right) \setminus \left(\bigcup_{\delta > \frac{1}{\alpha-1}} E_\delta \right) \quad (18)$$

avec

$$E_\delta = \bigcap_{m \geq 1} E_\delta^{(m)}, \quad E_\delta^{(m)} = G_m^{(\delta)} \cup G_{m+1}^{(\delta)} \cup \dots$$

$$G_m^{(\delta)} = \bigcup_{\substack{i_1, \dots, i_m = 0 \text{ ou } 1 \\ |\tilde{\lambda}_{i_1} \dots \tilde{\lambda}_{i_m}|^\delta < 2^{-m}}} I_{i_1, \dots, i_m}^{(\delta)}$$

et

$$I_{i_1, \dots, i_m}^{(\delta)} =] \sum_{l=1}^m i_l 2^{-l} - |\tilde{\lambda}_{i_1} \dots \tilde{\lambda}_{i_m}|^\delta, \sum_{l=1}^m i_l 2^{-l} + |\tilde{\lambda}_{i_1} \dots \tilde{\lambda}_{i_m}|^\delta [.$$

On pose $E^{(\alpha)}$ l'ensemble des singularités d'ordre α , on a alors

$$d(\alpha) = \dim_H E^{(\alpha)} \leq \inf_{\delta < \frac{1}{\alpha-1}} \dim_H E_\delta.$$

On va donc estimer la dimension de E_δ ; remarquons qu'on peut recouvrir E_δ par les intervalles $I_{i_1, \dots, i_n}^{(\delta)}$, $n \geq m$; ce qui donne

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq m} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n = 0 \text{ ou } 1 \\ |\tilde{\lambda}_{i_1} \dots \tilde{\lambda}_{i_n}|^\delta < 2^{-n}}} |I_{i_1, \dots, i_n}^{(\delta)}|^d &\leq \sum_{n \geq m} \sum_{i_1, \dots, i_n = 0 \text{ ou } 1} |I_{i_1, \dots, i_n}^{(\delta)}|^d \\ &= \sum_{n \geq m} 2^d (|\tilde{\lambda}_0|^{\delta d} + |\tilde{\lambda}_1|^{\delta d})^n; \end{aligned}$$

si $|\lambda|_{max} < 1/2$, ceci est uniformément borné si et seulement si $|\tilde{\lambda}_0|^{\delta d} + |\tilde{\lambda}_1|^{\delta d} < 1$, c'est à dire pour $d > d_\delta$ avec d_δ l'unique réel vérifiant $|\tilde{\lambda}_0|^{\delta d_\delta} + |\tilde{\lambda}_1|^{\delta d_\delta} = 1$. Comme d_δ en tant que fonction de δ est décroissante (car $d_\delta = \sigma/\delta$) alors

$$d(\alpha) \leq d_{\frac{1}{\alpha-1}} = \sigma(\alpha - 1). \quad (19)$$

D'autre part, pour donner une bonne minoration pour le spectre des singularités, on va dans un premier temps supposer que $|\lambda_0| = |\lambda_1| := \lambda \in [1/4, 1/2[$. La dépendance en x dans le numérateur de la formule (16) disparaît, et les ensembles de singularités seront les ensembles de points ayant la même approximation par les points dyadiques. Dans ce cas $v = \omega = -\frac{\log \lambda}{\log 2} := \alpha_\lambda > 1$, donc pour $\alpha \in [1, \alpha_\lambda]$

$$E^{(\alpha)} = \left(\bigcap_{\delta < \frac{1}{\alpha-1}} E_\delta \right) \setminus \left(\bigcup_{\delta > \frac{1}{\alpha-1}} E_\delta \right)$$

avec

$$E_\delta = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} F_n +] - \tilde{\lambda}^{n\delta}, \tilde{\lambda}^{n\delta}[$$

et F_n l'ensemble de toutes les sommes $i_1 2^{-1} + i_2 2^{-2} + \dots + i_n 2^{-n}$ où $i_j = 0$ ou 1 . On a dans ce cas $d_{\frac{1}{\alpha-1}} = -(\alpha-1) \frac{\log 2}{\log \lambda} = (\alpha-1)/(\alpha_\lambda-1)$. Donc pour $\alpha \in [1, \alpha_\lambda]$, $d(\alpha) \leq (\alpha-1)/(\alpha_\lambda-1)$.

Pour minorer le spectre des singularités, il suffit de construire une mesure de probabilité μ dont le support est l'ensemble des singularités $E^{(\alpha)}$ (ou une partie de $E^{(\alpha)}$), qui vérifie la propriété de "scaling" : "pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, de longueur $|I| \leq 1/2$, on ait $\mu(I) \leq C|I|^{d_{\frac{1}{\alpha-1}} - \varepsilon}$, $\forall \varepsilon > 0$ ".

Soit $m_1 < m_2 < \dots$ une suite croissante d'entiers qui tend assez rapidement vers l'infini, disons que pour tout $n \geq 1$, $m_{n+1} \geq \exp(m_n)$. Posons

$$K_{\frac{1}{\alpha-1}} = \bigcap_{n \geq 1} G_{m_n}^{(\frac{1}{\alpha-1})} \quad (20)$$

avec

$$G_m^{(\frac{1}{\alpha-1})} = F_m +] - \tilde{\lambda}^{m \frac{1}{\alpha-1}}, \tilde{\lambda}^{m \frac{1}{\alpha-1}}[. \quad (21)$$

On applique alors le résultat suivant (voir [7]: Exemple 4.7 p:59-60)

Proposition 2 *Soit $0 < s < 1$ fixé et $n_1 < n_2 < \dots$ une suite d'entiers qui croit rapidement (telle que par exemple $n_{k+1} \geq \max\{n_k^k, 3n_k^{1/s}\}$ pour chaque k). Pour chaque k , soit $A_k \subset \mathbb{R}$ constitué d'intervalles de longueur $n_k^{-1/s}$ chacun, tels que la distance entre les milieux de deux intervalles consécutifs est n_k^{-1} . Alors $\dim_H \bigcap_{k \geq 1} A_k = s$.*

Pour notre cas, $A_k = G_{m_k}^{(\frac{1}{\alpha-1})}$, $n_k = 2^{m_k}$ et $s = (\alpha - 1)/(\alpha_\lambda - 1)$, donc $\dim_H K_{\frac{1}{\alpha-1}} = (\alpha - 1)/(\alpha_\lambda - 1)$.

On pose N_k le nombre d'intervalles de longueur $2\tilde{\lambda}^{m_k \frac{1}{\alpha-1}}$ que l'on peut trouver dans $H_k = G_{m_1}^{(\frac{1}{\alpha-1})} \cap \dots \cap G_{m_k}^{(\frac{1}{\alpha-1})}$, et μ_k la mesure de probabilité qui, à chacun de ces N_k intervalles, associe le poids $N_k^{-1} dx / 2\tilde{\lambda}^{m_k \frac{1}{\alpha-1}}$. D'après [7] (Exemple 4.6 p:58-59 et Exemple 4.7 p:59-60), on a $\mu_k \rightarrow \mu$ quand $n \rightarrow \infty$, où $\mu = \mu_{\frac{1}{\alpha-1}}$ est supportée par $K_{\frac{1}{\alpha-1}}$, et il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout intervalle I , $|I| \leq 1/2$, on a

$$\mu(I) \leq C |I|^{(\alpha-1)/(\alpha_\lambda-1)} \log \frac{1}{|I|}. \quad (22)$$

D'autre part, on a

$$E^{(\alpha)} \supset E_{\frac{1}{\alpha-1}} \setminus \left(\bigcup_{\delta > \frac{1}{\alpha-1}} E_\delta \right) \quad (23)$$

et

$$\mu(E_\delta) = 0 \text{ pour tout } \delta > \frac{1}{\alpha-1}.$$

Comme la réunion de ces ensembles peut être écrite comme une réunion dénombrable, la mesure de leur réunion s'annule, donc $\mu_{\frac{1}{\alpha-1}}(E^{(\alpha)}) = \mu_{\frac{1}{\alpha-1}}(E_{\frac{1}{\alpha-1}}) = 1$ car $K_{\frac{1}{\alpha-1}} \subset E_{\frac{1}{\alpha-1}}$.

Le lemme suivant nous permet alors de conclure que $d(\alpha) = (\alpha - 1)/(\alpha_\lambda - 1)$ pour $\alpha \in [1, \alpha_\lambda]$.

Lemme 1 Soit $A \subset \mathbb{R}^m$ et R_ε l'ensemble de tous les recouvrements de A par des ensembles de diamètre au plus ε . Soit

$$M_{\varepsilon,d}(A) = \inf_{r \in R_\varepsilon} \sum_{A_i \in r} (\text{diam } A_i)^d \log(1/(\text{diam } A_i))$$

et soit

$$\text{Mes}_d(A) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} M_{\varepsilon,d}(A)$$

la d -mesure de Hausdorff mesure modifiée (évidemment, cette modification ne change pas la dimension de Hausdorff de A qui est $D = \inf \{d : \text{Mes}_d(A) = 0\} = \sup \{d : \text{Mes}_d(A) = +\infty\}$).

Soit μ une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^m et $E \subset \mathbb{R}^m$.

Si $\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^s \log(1/r)} < C \quad \forall x \in E$, alors $\text{Mes}_s(E) \geq \frac{\mu(E)}{C}$.

Revenons maintenant au cas général, on va écrire l'ensemble des singularités sous la forme d'une partition d'ensembles de points ayant la même approximation par les points dyadiques, puis minorer la taille de ces nouveaux ensembles.

On écrit

$$E^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta \geq 1} A^\beta \cap E^{(\alpha)}$$

avec

$$A^\beta = \{x : \limsup \frac{\log |k_J 2^{-J} - x|}{\log 2^{-J}} = \beta\}.$$

On a aussi

$$E^{(\alpha)} \supset \bigcup_{\beta \in [\max\{1, \frac{\nu-1}{\alpha-1}\}, \frac{\omega-1}{\alpha-1}]} A^\beta \cap D_{(\alpha-1)\beta}$$

avec

$$D_{(\alpha-1)\beta} = \{x : \lim \frac{\log |\tilde{\lambda}_{i(J,x)}|}{\log 2^{-J}} = (\alpha-1)\beta\}.$$

Donc

$$d(\alpha) \geq \sup_{\beta \in [\max\{1, \frac{\nu-1}{\alpha-1}\}, \frac{\omega-1}{\alpha-1}]} \dim_H A^\beta \cap D_{(\alpha-1)\beta}. \quad (24)$$

On va montrer que la dimension de Hausdorff de $A^\beta \cap D_{(\alpha-1)\beta}$ est supérieure au produit des dimensions de Hausdorff de A^β et $D_{(\alpha-1)\beta}$ et que le suprémum précédent coïncide avec $\sigma(\alpha-1)$.

Un raisonnement analogue à celui du cas $|\tilde{\lambda}_0| = |\tilde{\lambda}_1|$ nous donne

$$A^\beta = \left(\bigcap_{\delta < \beta} A_\delta \right) \setminus \left(\bigcup_{\delta > \beta} A_\delta \right),$$

avec

$$A_\delta = \bigcap_{m \geq 1} \bigcup_{n \geq m} F_n +] - 2^{-n\delta}, 2^{-n\delta}[$$

et $\dim_H A^\beta = 1/\beta$.

D'autre part la dimension de Hausdorff de $D_{(\alpha-1)\beta}$ est bien connue (cf [7] ou [9] par exemple) et vaut $\inf_a (a(\alpha-1)\beta - \tau(a))$ avec $\tau(a) = -\log_2(|\tilde{\lambda}_0|^a + |\tilde{\lambda}_1|^a)$.

On pose $\tilde{K}_\beta = \bigcap_{n \geq 1} \tilde{G}_{m_n}^{(\beta)}$ avec $\tilde{G}_m^{(\beta)} = F_m +] - 2^{-m\beta}, 2^{-m\beta}[$. Pour la minoration de la dimension de $A^\beta \cap D_{(\alpha-1)\beta}$ on va construire sur l'ensemble \tilde{K}_β , une famille de mesures de probabilités invariantes, analogue à celle qui intervient dans le calcul des dimensions des $D_{(\alpha-1)\beta}$ (cf [9]) et utiliser le Lemme de Billingsley.

On pose $P_0 = |\tilde{\lambda}_0|^a 2^{\tau(a)}$ et $P_1 = |\tilde{\lambda}_1|^a 2^{\tau(a)}$, alors $P_0 + P_1 = 1$. Construisons sur $\tilde{G}_{m_n}^{(\beta)}$ une mesure de probabilité μ_n telle que pour tout (i_1, \dots, i_{m_n}) ,

$$\mu \left(\sum_{l=1}^{m_n} i_l 2^{-l} +] - 2^{-m_n\beta}, 2^{-m_n\beta}[\right) = P_{i_1} \dots P_{i_{m_n}}.$$

Alors $\mu_n \rightarrow \mu$ quand $n \rightarrow \infty$, où $\mu = \mu_{\beta,a}$ est une mesure de probabilité supportée par \tilde{K}_β .

Soient $x \in \tilde{K}_\beta \cap D_{(\alpha-1)\beta}$ et $I(x, r)$ un intervalle de centre x et de rayon r . Comme $x \in D_{(\alpha-1)\beta}$ alors il existe n tel que pour $i = (i_1(x), \dots, i_{m_n}(x))$, $\frac{\log |\tilde{\lambda}_i|}{\log 2^{-m_n}} \leq (\alpha-1)\beta + \epsilon$, donc pour $r_n = 2^{-m_n\beta}$ et $a > 0$, on a $\mu(I(x, r_n)) \sim P_{i_1} \dots P_{i_{m_n}} = |\tilde{\lambda}_i|^a 2^{m_n\tau(a)}$, donc

$$\frac{\log \mu(I(x, r_n))}{\log 2^{-m_n\beta}} \leq a(\alpha-1) + a\epsilon - \frac{\tau(a)}{\beta};$$

Donc pour tout $a > 0$ et $\epsilon > 0$

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(I(x, r))}{r^{a(\alpha-1) - \frac{\tau(a)}{\beta} + \epsilon}} = +\infty$$

donc, d'après le Lemme de Billingsley, $M_s(\tilde{K}_\beta \cap D_{(\alpha-1)\beta}) = 0$ et $\dim_H \tilde{K}_\beta \cap D_{(\alpha-1)\beta} \leq a(\alpha-1) - \frac{\tau(a)}{\beta} \forall a > 0$.

Soit maintenant $r > 0$, on prend j tel que $\frac{1}{2}2^{-j} \leq 2r < 2^{-j}$ et $i = (i_1, \dots, i_j)$ le code de l'intervalle dyadique de longueur 2^{-j} contenant $I(x, r)$ alors

$$\begin{aligned} \mu(I(x, r)) &\leq P_{i_1} \dots P_{i_j} \\ &= |\tilde{\lambda}_i|^a 2^{j\tau(a)} \\ &\leq 2^{-ja((\alpha-1)\beta-\epsilon)} 2^{j\tau(a)} = 2^{-j[a((\alpha-1)\beta-\epsilon)-\tau(a)]} \quad \text{pour } a > 0 \\ &\leq 2^{-j[a(\alpha-1-\epsilon)-\frac{\tau(a)}{\beta}]} \end{aligned}$$

donc $\forall \epsilon > 0$

$$\frac{\mu(I(x, r))}{r^{a(\alpha-1)-\frac{\tau(a)}{\beta}-\epsilon}} \leq C.$$

En prenant

$$a = \left[\log \left(-\frac{\log |\tilde{\lambda}_1| + (\alpha-1)\beta \log 2}{\log |\tilde{\lambda}_0| + (\alpha-1)\beta \log 2} \right) \right] / \left[\log \frac{|\tilde{\lambda}_0|}{|\tilde{\lambda}_1|} \right] := a_\beta \quad (25)$$

on aura alors $\tau'(a) = (\alpha-1)\beta$ et l'infimum de $a(\alpha-1) - \frac{\tau(a)}{\beta}$ est atteint pour $a = a_\beta$; De plus, grâce à des arguments analogues à ceux de [9] on a $\mu(\tilde{K}_\beta \cap D_{(\alpha-1)\beta}) > 0$ (avec $\mu = \mu_{\beta, a_\beta}$); donc en utilisant le Lemme de Billingsley, on aura l'égalité

$$\dim_H \tilde{K}_\beta \cap D_{(\alpha-1)\beta} = \inf_{a>0} (a(\alpha-1) - \frac{\tau(a)}{\beta}). \quad (26)$$

Du travail précédent, on en déduit que

$$d(\alpha) \geq \sup_{\beta \in [\max\{1, \frac{v-1}{\alpha-1}\}, \frac{\omega-1}{\alpha-1}]} \frac{1}{\beta} \inf_a (a(\alpha-1)\beta - \tau(a)). \quad (27)$$

On pose

$$\varphi(\beta) = \inf_a (a(\alpha-1)\beta - \tau(a)) = a_\beta(\alpha-1)\beta - \tau(a_\beta)$$

et

$$\Phi(\beta) = \frac{1}{\beta} \varphi(\beta).$$

Un calcul facile nous donne

$$\Phi'(\beta) = -\frac{1}{\beta^2 \log 2} \log(|\tilde{\lambda}_0|^{a_\beta} + |\tilde{\lambda}_1|^{a_\beta}).$$

Donc $\Phi'(\beta) = 0$ si et seulement si $|\tilde{\lambda}_0|^{a_\beta} + |\tilde{\lambda}_1|^{a_\beta} = 1$, c'est à dire que $a_\beta = \sigma$, ou encore $\beta = -\frac{(|\tilde{\lambda}_0|^\sigma \log |\tilde{\lambda}_0| + |\tilde{\lambda}_1|^\sigma \log |\tilde{\lambda}_1|)}{(\alpha-1) \log 2} := \tilde{\beta}$; Or $\beta \in [\max\{1, \frac{v-1}{\alpha-1}\}, \frac{\omega-1}{\alpha-1}]$ si et seulement si $\alpha \in [1, -(|\tilde{\lambda}_0|^\sigma \log |\tilde{\lambda}_0| + |\tilde{\lambda}_1|^\sigma \log |\tilde{\lambda}_1|) / \log 2]$ donc

$$\sup_{\beta \in [\max\{1, \frac{v-1}{\alpha-1}\}, \frac{\omega-1}{\alpha-1}]} \Phi(\beta) = \sigma(\alpha-1).$$

Ce qui achève la preuve de la Proposition 1.

Ainsi, on constate que les singularités des fonctions de la base Schauder aux points dyadiques (bien que leur réunion soit dénombrable et ait une dimension de Hausdorff nulle) changent complètement la nature fractale de la fonction autosimilaire associée.

4 Validité du formalisme multifractal

Remarquons que la dérivée (au sens des distributions) de la fonction F est donnée par la série $F'(x) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \lambda_{i(j,x)} h\left(S_{i(j,x)}^{-1}(x)\right)$ où $h(x)$ est la fonction de Haar qui vaut 0 pour $x < 0$, 1 sur $[0, 1/2[$, -1 sur $[1/2, 1[$ et 0 pour $x \geq 1$.

Dans [5], on a le résultat suivant

Proposition 3 *Soit $0 < s < 1/p \leq 1$ et $f = \sum C_{j,k} h(2^j x - k)$. Si $f \in L^p$ et*

$$\sup_{0 < \epsilon < \delta} \left[\int_{t \in [0,1] : t+\epsilon \in [0,1]} |f(t+\epsilon) - f(t)|^p dt \right]^{1/p} = O(\delta^s), \quad \delta \mapsto 0 \quad (28)$$

alors

$$A_{j,p} := 2^{j(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \left(\sum_k |2^{-\frac{j}{2}} C_{j,k}|^p \right)^{\frac{1}{p}} = O(2^{-js}), \quad j \mapsto \infty. \quad (29)$$

Réciproquement, (29) implique que la série de Haar correspondante converge vers f dans L^p satisfaisant (28).

Ainsi la Proposition 3 est identique à la caractérisation des séries d'ondelettes régulières dans les espaces de Besov (cf [12]) et donne $\eta_f(p) = \zeta_f(p) = sp$.

Appliquons ce résultat pour F' , on a

$$\begin{aligned} A_{j,p} &= 2^{-j/p} 2^j \left(\sum_{|i|=j} |\lambda_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 2^{-j \left(-1 + \frac{1}{p} - \frac{\log(|\lambda_0|^p + |\lambda_1|^p)}{p \log 2} \right)} \\ &= 2^{-j \left(\frac{1}{p} - \frac{\log(|\tilde{\lambda}_0|^p + |\tilde{\lambda}_1|^p)}{p \log 2} \right)}; \end{aligned}$$

1. Si $\lambda_0 + \lambda_1 \neq 1/2$, alors

- (a) si $|\lambda|_{max} \geq 1/2$, alors pour tout $p \geq 1$, on a $|\tilde{\lambda}_0|^p + |\tilde{\lambda}_1|^p > 1$ et donc pour tout $p \geq 1$ $\eta_{F'}(p) = \zeta_{F'}(p) = 1 - \frac{\log(|\tilde{\lambda}_0|^p + |\tilde{\lambda}_1|^p)}{\log 2}$, ainsi comme $\eta(p) = \eta_{F'}(p) + p$ et $\zeta(p) = \zeta_{F'}(p) + p$, alors pour $\alpha \in [v, \omega]$

$$\begin{aligned} \inf_{p \geq 1} (\alpha p - \zeta(p) + 1) &= \inf_{p \geq 1} (\alpha p - \eta(p) + 1) = \inf_{p \geq 1} \log_2((2^\alpha |\lambda_0|)^p + (2^\alpha |\lambda_1|)^p) \\ &= d(\alpha) \end{aligned}$$

et le formalisme multifractal est valide.

(b) si $|\lambda|_{max} < 1/2$, alors

- i. si $|\lambda_0| + |\lambda_1| > 1/2$, on pose p_0 l'unique p tel que $|\tilde{\lambda}_0|^p + |\tilde{\lambda}_1|^p = 1$, (c'est à dire $p_0 = \sigma$); alors pour tout $1 \leq p < p_0$, on a $|\tilde{\lambda}_0|^p + |\tilde{\lambda}_1|^p > 1$ et par suite $\eta_{F'}(p) = \zeta_{F'}(p) = 1 - \frac{\log(|\tilde{\lambda}_0|^p + |\tilde{\lambda}_1|^p)}{\log 2}$, ainsi

$$\begin{aligned} \inf_{1 \leq p < p_0} (\alpha p - \zeta(p) + 1) &= \inf_{1 \leq p < p_0} (\alpha p - \eta(p) + 1) \\ &= \inf_{1 \leq p < p_0} \log_2((2^{(\alpha-1)} |\tilde{\lambda}_0|)^p + (2^{(\alpha-1)} |\tilde{\lambda}_1|)^p) \\ &= \inf_{1 \leq p < p_0} \log_2((2^\alpha |\lambda_0|)^p + (2^\alpha |\lambda_1|)^p). \end{aligned}$$

Cependant pour $p \geq p_0$, on a $A_{j,p} \leq C2^{-js}$, $\forall 0 < s < 1/p$, donc $\zeta_{F'}(p) \geq 1$, et comme F' n'est pas continue alors $F' \notin B_p^{s,\infty}$ pour $s > 1/p$, et par suite $\eta_{F'}(p) = \zeta_{F'}(p) = 1$, donc

$$\inf_{p \geq p_0} (\alpha p - \eta(p) + 1) = \inf_{p \geq p_0} (\alpha p - \zeta(p) + 1) = (\alpha - 1)p_0 .$$

Pour $1 \leq \alpha \leq v$, on a $2^\alpha |\lambda_0| \leq 1$ et $2^\alpha |\lambda_1| \leq 1$, il s'ensuit alors que

$$\begin{aligned} \inf_{1 \leq p < p_0} (\alpha p - \eta(p) + 1) &= \inf_{1 \leq p < p_0} (\alpha p - \zeta(p) + 1) \\ &= \log_2((2^{(\alpha-1)}|\tilde{\lambda}_0|)^{p_0} + (2^{(\alpha-1)}|\tilde{\lambda}_1|)^{p_0}) \\ &= (\alpha - 1)p_0 ; \end{aligned}$$

Or par définition, $(\alpha - 1)p_0 = d(\alpha)$ pour $\alpha \geq 1$, ainsi pour $1 \leq \alpha \leq v$

$$d(\alpha) = \inf_{p \geq 1} ((\alpha - 1)p - \zeta(p) + 1) = \inf_{p \geq 1} ((\alpha - 1)p - \eta(p) + 1) \quad (30)$$

et pour $v < \alpha \leq \min\{1 + \frac{1}{\sigma}, -(|\tilde{\lambda}_0|^\sigma \log |\tilde{\lambda}_0| + |\tilde{\lambda}_1|^\sigma \log |\tilde{\lambda}_1|) / \log 2\}$

$$d(\alpha) = \inf_{p \geq p_0} (\alpha p - \zeta(p) + 1) = \inf_{p \geq p_0} (\alpha p - \eta(p) + 1) . \quad (31)$$

- ii. si maintenant $|\lambda_0| + |\lambda_1| < 1/2$, alors pour tout $p \geq 1$, $|\tilde{\lambda}_0|^p + |\tilde{\lambda}_1|^p < 1$ et donc $\eta(p) = \zeta(p) = 1 + p$. Il s'ensuit que

$$\inf_{p \geq 1} (\alpha p - \zeta(p) + 1) = \inf_{p \geq 1} (\alpha p - \eta(p) + 1) = \alpha - 1 .$$

Comme $\sigma < 1$ alors

$$d(\alpha) < \inf_{p \geq 1} (\alpha p - \zeta(p) + 1) = \inf_{p \geq 1} (\alpha p - \eta(p) + 1) ,$$

et le formalisme multifractal échoue dans ce cas.

2. Si $\lambda_0 + \lambda_1 = 1/2$, alors

- (a) si $|\lambda|_{max} \geq 1/2$ alors comme précédemment le formalisme multifractal est valide.
- (b) si $|\lambda|_{max} < 1/2$ alors le formalisme multifractal est valide pour tout $\alpha \in [v, \omega]$ tel que l'infimum dans $\inf_{p \geq 1} \log_2((2^\alpha |\lambda_0|)^p + (2^\alpha |\lambda_1|)^p)$ est atteint pour $p \in [1, p_0]$.

D'où la conclusion suivante

Théorème 3 Soit F la fonction donnée par la série

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{i(j,x)} \Lambda(\tau^j x)$$

solution de l'équation autosimilaire

$$F(x) = \lambda_0 F(2x) + \lambda_1 F(2x - 1) + \Lambda(x) ;$$

Alors

1. Si $\lambda_0 + \lambda_1 \neq 1/2$, alors
 - (a) si $|\lambda|_{max} \geq 1/2$ (i.e $v \leq 1$) alors le formalisme multifractal est valide sur $[v, \omega]$.
 - (b) si $|\lambda|_{max} < 1/2$ (i.e $v > 1$), alors
 - i. si $|\lambda_0| + |\lambda_1| > 1/2$, alors le formalisme multifractal est valide sur $[1, \min\{1 + \frac{1}{\sigma}, -(|\tilde{\lambda}_0|^\sigma \log|\tilde{\lambda}_0| + |\tilde{\lambda}_1|^\sigma \log|\tilde{\lambda}_1|)/\log 2\}]$.
 - ii. si $|\lambda_0| + |\lambda_1| < 1/2$, alors le formalisme multifractal échoue.
2. Si $\lambda_0 + \lambda_1 = 1/2$, alors
 - (a) si $|\lambda|_{max} \geq 1/2$ (i.e $v \leq 1$), alors le formalisme multifractal est valide sur $[v, \omega]$.
 - (b) si $|\lambda|_{max} < 1/2$ (i.e $v > 1$), alors le formalisme multifractal est valide pour tout $\alpha \in [v, \omega]$ tel que l'infimum dans $\inf_{p \geq 1} \log_2((2^\alpha |\lambda_0|)^p + (2^\alpha |\lambda_1|)^p)$ est atteint pour $p \in [1, \sigma]$.

References

- [1] M. Ben Slimane. Multifractal formalism for selfsimilar functions under the action of nonlinear dynamical systems. Preprint, 1995.
- [2] M. Ben Slimane. Multifractal formalism and anisotropic selfsimilar functions. Preprint, 1995.
- [3] G. Brown, G. Michon, et J. Peyrière. On the multifractal analysis of measures. *Jour. Stat. Phys.*, T.66:775–79, 1992.
- [4] P. Collet, J. Lebowitz, et A. Porzio. The dimension spectrum of some dynamical systems. *Jour. Stat. Phys.*, T.47:PP.609–644, 1987.
- [5] Z. Ciesielski. Haar orthogonal functions in analysis and probability. *Alfred Haar Memorial Conference*, pages 25–56, 1985. Colloquia Mathematica Conference, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, Budapest.
- [6] I. Daubechies et J.C. Lagarias. On the thermodynamic formalism for functions. *Reviews in Mathematical Physics*, Vol. 6(No. 5a):1033–1070, 1994.
- [7] K.J Falconer. *Fractal Geometry*. John Wiley and sons, 1990.
- [8] S. Jaffard. Multifractal formalism for functions. Part 1: Results valid for all functions. *SIAM Journal Math. Anal.* To appear.
- [9] S. Jaffard. Multifractal formalism for functions. Part 2: Selfsimilar functions. *SIAM Journal Math. Anal.* To appear.
- [10] S. Jaffard et B. Mandelbrot. Local regularity of nonsmooth wavelet expansions and applications to the Polya function. To appear in *Advances in Math.*
- [11] Y. Meyer. Les espaces 2-microlocaux. Cours de DEA à l'Université de Paris Dauphine, 1992.
- [12] Y. Meyer. *Ondelettes et opérateurs*. Hermann, 1990.