Quadratures singulières et fonctions d'échelle

Albert Cohen[1] Abdelhak Ezzine[2]

Résumé– *Nous présentons une méthode de quadrature, pour le calcul du produit scalaire $I = \int f(t)\, \phi(t)\, dt$, lorsque $f(t)$ présente une singularité de type homogène, la fonction $\phi(t)$ étant définie par une équation d'échelle.*

Singular quadratures and scaling functions

Abstract– *A quadrature method is presented for the computation of the inner product, $I = \int f(t)\, \phi(t)\, dt$, where $f(t)$ has a singularity of homogeneous type, and ϕ is implicitely determined by a refinement equation.*

Version anglaise Abrégée

Wavelet bases have proved to be a powerful tool for the discretization of singular integral equations, since they usually lead to sparse matrices. However, one needs to compute quantities of the type $\langle f, \phi_{j,k}\rangle$ and $\langle T\phi_{j,k}, \phi_{j,l}\rangle$, where f is a function, T is an operator with kernel $K(x, y)$ and $\phi_{j,k} = 2^{j/2}\phi(2^j \cdot -k)$ is the generator of the underlying multiresolution approximation V_j.

The difficulties in computing these quantities arise from the fact the f and K might be singular and ϕ is only known implicitely as a solution of a refinement equation $\phi(x) = 2\sum_{k=0}^{N} h_k\, \phi(2x-k)$. As a prototype example, we consider the computation of $I = \int f(t)\phi(t)dt$.

In the case where the function f is C^l, quadrature rules have been introduced in [1, 9] using the fact the moments $M_k = \int x^k \phi(x)dx$ can easily be computed from the refinement equation.

A first approximation of I is then obtained by replacing f by a polynomial interpolation of degree $l-1$ on the support of ϕ. In order to improve the precision, one can use a subdivision method: iterating the refinement equation, one obtains $\phi(x) = \sum_k s_{j,k}\, 2^j\phi(2^j x - k)$, and the initial quadrature rule can be replaced by a combination of similar rules at scale 2^{-j}.

An analysis of the coefficients $s_{j,k}$ and of the local error, shows that the numerical precision is of order $2-jl$.

In the case where f has a singularity of homogeneous type, i.e. $|f(x)| \leq C|x-p|^\gamma$ and $|\partial^l f(x)| \leq Cl!|x-p|^{\gamma-l}$, $l \geq 0$, $-1 < \gamma < 1$, it is then natural to subdivide the function ϕ in a non-uniform way, i.e. introducing higher scales near the singularity, and use

$$\phi(x) = \sum_{j=1,\cdots,J} \sum_{k\in K_j} a_{j,k}\, 2^j\phi(2^j x - k) + \sum_{k\in R_J} a_{J,k}\, 2^J\phi(2^J x - k),$$

where $k \in K_j$ for $2^{-j}k$ of order 2^{-j}.

A new quadrature is derived approximating ϕ by the first part of this decomposition. For a preassigned precision ε, we use in each layer K_j a different degree $l(j)$ of polynomial interpolation and compute the local error accordingly. Since there is no regularity at p, a crude error estimate is used to determine J.

1. Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, 4 Place Jussieu, 75005 Paris.
2. Cermics, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Central 2, La Courtine, 93167 Noisy le Grand.

Optimizing the choice of $l(j)$, we find that the precision ε can be attained by using an order of $(1/(\gamma+1)+|\gamma|/(\gamma+1)^2)[\log_2(\varepsilon)]^2$ quadrature points.

In the case of a higher order singularity, our method can still be applied, integrating I by parts to reduce the order of the singularity and using the fact that the derivatives of a scaling function are linear combination of other scaling functions ([7]).

1 Introduction

La motivation principale de ce travail provient de la discrétisation sur des bases d'ondelettes d'équations intégrales singulières. La mise en oeuvre d'une méthode de Galerkin nécessite en effet le calcul de produits scalaires du type $\langle f, \phi_{j,k}\rangle$ et $\langle T\phi_{j,k}, \phi_{j,l}\rangle$, où f est une fonction T un opérateur intégral de noyau $K(x,y)$ et $\phi_{j,k} = 2^{j/2}\phi(2^j \cdot -k)$ est la base de l'espace d'approximation V_j engendré par la fonction d'échelle ϕ, que l'on décompose par la suite dans une base d'ondelettes [3].

La mise au point de quadratures précises pour le calcul de ces quantités se heurte à trois difficultés : les fonctions f et K peuvent présenter des singularités, la régularité de la fonction ϕ est limitée par la taille de son support [3] et ϕ n'est connue qu'implicitement comme solution d'une équation d'échelle

$$\phi(x) \;=\; 2\sum_{k=0}^{N} \, h_k \, \phi(2x-k), \tag{1}$$

où $N \in \mathbb{N}^*$ et les réels $h_k, k = 0, \cdots, N$, sont connus explicitement. On rappelle que l'on a $\mathrm{supp}(\phi) = [0, N]$.

Nous allons montrer que cette équation permet néanmoins d'obtenir une méthode de quadrature de faible coût calculatoire, pour une précision ε fixée. Par changement d'échelle on se ramène au calcul de $S_k = \int f(t)\phi(t-k)dt$ et $T_{k,l} = \int K(x,y)\phi(x-k)\phi(y-l)dx\, dy$.

Nous traitons ici uniquement le calcul de S_k, dans le cas où f présente une singularité de type homogène en un point. Cependant, la méthode s'étend de façon naturelle au calcul de $T_{k,l}$ pour des noyaux de type Calderon-Zygmund, en remarquant que la fonction $\Phi(x,y) = \phi(x)\phi(y)$ vérifie une équation d'échelle induite par (1). Cette étude, ainsi qu'une implémentation de l'algorithme correspondant, fera prochainement l'objet d'une publication. Notons finalement que les fonctions B-splines satisfont des équations du type (1) et que notre méthode peut ainsi s'appliquer dans le cadre des éléments finis.

Sans perte de généralité, on se ramène au problème du calcul de $I = \int f(t)\phi(t)dt$.

Dans un premier temps nous allons rappeler la méthode développée dans [1, 9], lorsque la fonction f est de classe $C^l(\mathbb{R}), l \in \mathbb{N}^*$. Ensuite nous expliciterons la méthode de quadrature pour une singularité de type homogène $|x|^\gamma, |\gamma| < 1$. Enfin nous évoquerons le traitement des singularités d'ordre plus élevé.

2 Quadrature pour une fonction régulière

Soit f une fonction de classe C^l. La méthode de quadrature de [1, 9] utilise la donnée des moments $M_k = \int x^k\phi(x)dx$. En effet, l'équation (1) donne accès aux valeurs de M_k par un calcul réccursif très simple (ϕ est normalisée au sens où $M_0 = 1$). On trouvera dans [2, 6] une généralisation de ce résultat au calcul d'intégrales de produits de fonctions d'échelle quelconques.

En remplacant alors f par son interpolation par un polynôme P_l de degré $l-1$, aux points $x_i = iN/(l-1)$, $i = 0, \cdots, l-1$, on obtient une suite de poids $(w_i^l)_{i=0,\cdots,l-1}$ dépendant linéairement des moments M_k, $k = 0, \cdots, l-1$, et une première approximation

$$I = \langle P_l, \phi \rangle + E = \sum_{i=0,\cdots,l-1} w_i^l \, f(x_i) \ + \ E, \tag{2}$$

où $|E| \leq B \sup_{t \in \text{supp}(\phi)} |f^l(t)|$ représente l'erreur de la quadrature de I.

Si $|E| > \varepsilon$, on améliore la précision par la méthode de subdivision suivante : par itération de (1), nous obtenons

$$\phi(x) \ = \ \sum_k \ s_{j,k} \ 2^j \phi(2^j x - k), \tag{3}$$

Les coefficients $s_{j,k}$ sont calculés par un algorithme de subdivision $s_{j,k} = \sum_n h_{k-2n} s_{j-1,n}$ (on trouvera dans [4] une étude générale de ces algorithmes), et sont uniquement déterminés par le produit scalaire $s_{j,k} =< \phi, \tilde{\phi}(2^j \cdot -k) >$ où $\tilde{\phi}$ est une fonction duale (que l'on peut choisir égale à ϕ dans le cas d'une fonction d'échelle orthonormale).

En injectant (3) dans I, et en utilisant la même méthode pour le calcul de $\langle f, 2^j \phi(2^j \cdot -k) \rangle$, on obtient des points $x_i^{j,k} = 2^{-j}(k + x_i) \in \text{supp}(\phi_{j,k})$, $i = 0, \cdots, l-1$ et une approximation

$$I = \sum_k s_{j,k} \sum_{i=0,\cdots,l-1} w_i^l \, f(x_i^{j,k}) \ + \ E_j \tag{4}$$

où $|E_j| \ \leq \ \sum_k |s_{j,k} E_{j,k}|$. L'erreur de quadrature $E_{j,k} = \langle f, 2^j \phi(2^j \cdot -k) \rangle - \sum_{i=0,\cdots,l-1} w_i^l \, f(x_i^{j,k})$ est estimée par

$$|E_{j,k}| \ \leq \ C_l 2^{-jl} \sup_{t \in \text{supp}(\phi_{j,k})} |f^l(t)|.$$

De plus, en utilisant la majoration $|M_l| \leq (N \sup |\phi|)^l$, on a l'estimation $C_l \leq K^l / l!$ où K ne dépend que du choix de la fonction ϕ.

On déduit de $s_{j,k} \ = < \phi, \tilde{\phi}(2^j \cdot -k) >$ l'estimation $|s_{j,k}| \ \leq \ D 2^{-j}$, $D = \|\phi\|_\infty \|\tilde{\phi}\|_1$, et on remarque que la somme dans (3) comporte au plus $N 2^{j+1}$ termes non nuls. On a donc $\sum_k |s_{j,k}| \ \leq \ 2DN$, et l'estimation

$$|E_j| \leq D_l 2^{-jl} \sup_{t \in \text{supp}(\phi)} |f^l(t)|. \tag{5}$$

Il est ainsi possible de rendre l'erreur $|E_j|$ arbitrairement petite en augmentant la valeur de j.

3 Méthode de quadrature pour les singularités homogènes

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ une fonction C^∞ partout sauf en un point p où elle présente une singularité du type $|x-p|^\gamma$, $-1 < \gamma < 1$ (on a donc $f \in L^1_{loc}$). On suppose ainsi que l'on a $|f(x)| \leq C|x-p|^\gamma$ et $|\partial^l f(x)| \leq C l! |x-p|^{\gamma - l}$, $l \geq 0$.

La formule (3) devient alors inadaptée, car l'erreur de quadrature locale $E_{j,k}$ dépend fortement de la distance du support de $\phi_{j,k}$ au point p ainsi que du choix de l. Il est donc naturel d'effectuer une *subdivision non-uniforme* consistant à itérer la décomposition (3) sur les fonctions $\phi(2^j \cdot -k)$ dont le support est proche de p.

Soit ε l'erreur de précision exigée pour le calcul de I.

On note $d_{j,k}$ la distance de $\mathrm{supp}(\phi_{j,k})$ au point p. On a alors l'estimation

$$|E_{j,k}| \ \leq \ CK^l 2^{-jl} d_{j,k}^{\gamma - l} = C d_{j,k}^{\gamma} [K 2^{-j} d_{j,k}^{-1}]^l. \tag{6}$$

On pose alors $d_j = (K2^{-j})/2$, et pour $0 < j \leq J$, on définit par récurrence une suite d'ensemble R_j, en prenant $R_0 = \{0\}$, $R_j = \{k \in \mathbb{Z} \ ; \ d_{j,k} \leq d_j\} \cap S_j$ et $K_j = (\mathbb{Z} - R_j) \cap S_j$ où $k \in S_j$ si et seulement si il existe $l \in R_{j-1}$ satisfaisant $\mathrm{supp}(\phi_{j,k}) \subset \mathrm{supp}(\phi_{j-1,l})$. En itérant l'equation d'échelle sur les fonctions $\phi(2^j \cdot -k)$, $k \in R_j$, on obtient une décomposition du type

$$\phi(x) \ = \ \sum_{j=1,\cdots,J} \sum_{k \in K_j} a_{j,k} \, 2^j \phi(2^j x - k) \ + \ \sum_{k \in R_J} a_{J,k} \, 2^J \phi(2^J x - k), \tag{7}$$

où les $a_{j,k}$ sont calculés par un algorithme de subdivision qui se concentre sur la singularité. L'échelle d'arrêt J sera déterminée en fonction de la précision ε exigée dans l'évaluation de I.

La méthode de quadrature que nous proposons consiste alors à approximer I suivant

$$I = \sum_{j=1,\cdots,J} \sum_{k \in K_j} a_{j,k} \sum_{i=0,\cdots,l(j)-1} w_i^{l(j)} \ f(x_i^{j,k}) + E_J, \tag{8}$$

où le degré $l(j)$ varie en fonction de j. L'erreur E_J est la somme des erreurs

$$E_J^1 \ = \ \sum_{j=1}^{J} \sum_{k \in K_j} a_{j,k} E_{j,k}.$$

et

$$E_J^2 \ = \sum_{k \in R_J} a_{J,k} 2^J < f, \phi(2^J \cdot -k) > .$$

Grace au choix de d_j, on a pour $k \in K_j$, $|E_{j,k}| \ \leq \ C 2^{-\gamma j} 2^{-l(j)}$. A chaque niveau j, on prend pour $l(j)$ la plus petite valeur telle que $|E_{j,k}| \leq \varepsilon/(2A_J)$, pour tout $k \in K_j$, avec $A_J = \sum_{j=1}^{J} \sum_{k \in K_j} |a_{j,k}|$, ce qui assure ainsi $|E_J^1| \leq \varepsilon/2$.

Comme dans le cas de la subdivision uniforme, il est possible d'obtenir une estimation $A_J \leq A$, indépendante de l'échelle d'arrêt J. Une difficulté nouvelle provient de ce que les coefficients $a_{j,k}$ ne sont pas tous égaux aux $s_{j,k}$ de la section précèdente, et ne peuvent donc pas tous être identifiés aux produits scalaires $< \phi, \tilde{\phi}(2^j \cdot -k) >$. L'estimation $|a_{j,k}| \leq D 2^{-j}$ n'est donc plus triviale, mais elle est assurée dans deux cas particuliers :

- Lorsque les coefficients h_n sont positifs (par exemple dans le cas des B-splines). L'estimation $|a_{j,k}| \leq 2^{-j}$ est alors une conséquence de $\sum h_{2n} = \sum h_{2n+1} = 1/2$. De plus, on a directement l'estimation $A_J \leq 1$.

– Sous une hypothèse technique portant sur la suite d_j qui assure que $a_{j,k} = s_{j,k}$ lorsque $k \in R_j$, $j = 1, \cdots, J-1$. Les majorations $|a_{j,k}| \leq HD2^{-j}$, $k \in K_j$ et $|a_{J,k}| \leq HD2^{-J}$, $k \in R_J$ en découlent, avec $H = \sum_n |h_n|$, puisque ces coefficients sont respectivement calculés à partir des coefficients $s_{j-1,k}$, $k \in R_{j-1}$ et $s_{J-1,k}$, $k \in R_{J-1}$ par des combinaisons linéaires finies faisant intervenir les coefficients h_n. On montre dans [5] que cette hypothèse est toujours satisfaite par le choix $d_j = (\alpha K 2^{-j})/2$, pour un facteur $1 < \alpha < 2$ bien choisi, ce qui ne modifie pas les estimations de $E_{j,k}$

Dans le deuxième cas, il est alors facile d'obtenir $A_J \leq DH \sum_{j=1}^{J} 2^{-j} \mathrm{Card}(K_j) \leq A$, où A est indépendante de J.

Pour déterminer l'échelle d'arrêt J, on estime E_J^2 par

$$\begin{aligned} |E_J^2| &\leq DH2^{-J} \textstyle\sum_{k \in R_J} 2^J | < f, \phi(2^J \cdot - k) > | \\ &\leq DH (\sup(\textstyle\sum_k |\phi(\cdot - k)|) \textstyle\int_{|t-p| < d_J + N2^{-J}} |f(t)| dt \\ &\leq CR 2^{-(\gamma+1)J}, \end{aligned}$$

où la constante R ne dépend que de la fonction ϕ. Puisque $\gamma > -1$, il est possible de choisir J tel que $|E_J^2| \leq \varepsilon/2$.

On obtient ainsi une précision $|E_J| \leq \varepsilon$, avec un nombre de points de quadratures

$$\begin{aligned} N(\varepsilon) &= \textstyle\sum_{j=0}^{J} \mathrm{Card}(K_j) l(j) \\ &\leq C_a \textstyle\sum_{j=0}^{J} 2^j (d_j - d_{j-1})(\log_2(\varepsilon) + |\gamma| J) \\ &\leq C_b J(-\log_2(\varepsilon) + |\gamma| J) \\ &\leq C_c (1/(\gamma+1) + |\gamma|/(\gamma+1)^2)[\log_2(\varepsilon)]^2, \end{aligned}$$

où les constantes C_a, C_b et C_c ne dépendent que de la fonction ϕ.

4 Méthode de quadrature pour les singularités d'ordre élevé

Considérons à présent le cas où la singularité de f en p est d'ordre $r > 0$. Lorsque $p \in \mathrm{supp}(\phi)$, la fonction ϕ doit être au moins de classe C^r afin de permettre l'existence de I. D'autre part, l'estimation de l'échelle d'arrêt par la méthode précédente diverge en général.

On utilise alors une technique de régularisation introduite par J.C.Nedelec [8] pour le calcul d'intégrale singulières dans le cadre des éléments finis: la distribution f vérifie en effet $f = g^{[r]}$ où g est une distribution d'ordre 0, et on se ramène au calcul de $I = (-1)^r \langle g, \phi^{([r])} \rangle$ avec $[r]$ la partie entière de r.

Ce dernier calcul s'effectue par la méthode décrite dans la section précédente grâce à une propriété remarquable des fonctions d'échelles à support compact, décrite dans [7]: On a l'identité $\phi^{([r])} = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k} \varphi(\cdot - k)$ où φ est une fonction d'échelle continue à support compact, vérifiant $\varphi = 2 \sum_{n=0}^{N-r} g_n \varphi(2 \cdot - n)$ avec $\sum h_n e^{in\omega} = [(1 + e^{i\omega})/2]^r \sum g_n e^{in\omega}$.

Par exemple, dans le cas où $f = vp(\frac{1}{x})$, on obtient $I = \langle \ln |x|, \varphi(\cdot - 1)\rangle - \langle \ln |x|, \varphi \rangle$, que l'on calcule par la méthode de la section précèdente. Remarquons que cette technique s'applique immédiatement au calcul des éléments la matrice de la transformée de Hilbert.

Références

[1] R. Coifman G. Beylkin and V. Rocklin, Wavelet transform and numerical algorithms 1. *Comm. Pure, Applied Math*, XLIV, 1991.

[2] W. Dahmen et C.A. Michelli, Using the refinement equation for evaluating integrals of wavelets. *SIAM J. Numer. Anal.*, 30(2):507–537, april 1993.

[3] I. Daubechies, *Ten lectures in Wavelets*, volume 61. CBMS-NFS 61, 1992.

[4] N. Dyn, *Subdivision schemes in computer-aided geometric design*, *dans "Advances in Numerical Analysis II, Wavelets, Subdivision algorithms, and Radial Basis Functions"*, W.A. Light (ed.), Clarendon Press, Oxford, 1992, 36-104.

[5] A. Ezzine, Etude et réalisation des algorithmes de quadratures pour la résolution des équations intégrales dans une base d'ondelettes. *Thèse de doctorat de l'école nationale des ponts et chaussées*, septembre 1996.

[6] A. Kunoth, Computing refinable integrals - Documentation of the program - Version 1.1. *Technical report ISC-95-02-Math*, Texas A& M University, 1995.

[7] P.G. Lemarié, Fonctions a support compact dans les analyses multirésolution. *Rev. Iberoamericana*, 7:157–182., 1991.

[8] J. C. Nedelec, Integral equations with non integrable kernel, *Integral equations and Operator Theory,* 5, 1982, 562–572.

[9] W. Sweldens and R. Piessens, Quadrature formulae and asymptotic error expansions for wavelet approximation of smooth functions. SIAM J.*Numer. Anal.*, 31(4):1240–1264,1994.