Nouvelles algèbres d'opérateurs caractérisés par leurs décomposition sur une base d'ondelettes.

A. Ezzine[1]

.1 Introduction

Au cours de ce travail nous allons nous intéresser à la représentation d'opérateurs linéaires dans une base d'ondelettes . Etant donnée une analyse de multirésolution $(V_j)_{j\in(\mathbf{Z})}$ de $L^2(\mathbf{R}^n)$ conduisant à une fonction φ telle que $(\varphi(x-k))_{k\in\mathbf{Z}}$ est une base orthonormée de V_0 et des ondelettes $(\psi_\lambda^\epsilon)_{\lambda\in\Lambda}$; $\Lambda = \{\lambda = k2^{-j} + \epsilon 2^{-j-1} \quad \epsilon \in \{0,1\}^n, \epsilon \neq (0,\ldots,0),\, k \in \mathbb{Z}^n\}$ et $(\psi_\lambda^\epsilon)_{k\in(\mathbf{Z})}$ est une base du complémentaire de V_j dans l'espace V_{j+1} qu'on note W_j , on a $L^2(\mathbf{R}^n) = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j$ et pour un entier l on peut aussi écrire $L^2(\mathbf{R}^n) = V_l \oplus_{j\geq l} W_j$.
De l'écriture ci dessus de l'espace $L^2(\mathbf{R}^n)$ naît l'existence de deux bases orthonormées de $L^2(\mathbf{R}^n)$,la première est la réunion de celles des espaces W_j en l'occurence $(\psi_\lambda^\epsilon)_{\lambda\in\Lambda}$, alors que la seconde est la réunion de $(\varphi_{l,k})_{k\in\mathbf{Z}}$ et $(\psi_\lambda^\epsilon)_{\lambda\in\Lambda_1}$ $avec$ $\Lambda_1 = \{\lambda \in \Lambda$ et $j < l$ $\}$.

Soit T un opérateur Continu définie de $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, d'aprés le célèbre théorème de L.Schwartz il existe une distribution K définie sur $(\mathbf{R}^{2n})$ telle que formellement on a :

$$Tf(x) = \int K(x,y)\, f(y)\, dy \tag{.0.1}$$

dans le sens des distributions ,c'est à dire que :

$$\forall \phi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) < T\,\phi, \psi > = < K|\phi \otimes \psi > \tag{.0.2}$$

Les propriétés de la localisation, la régularité et la cancellation des ondelettes ont pour conséquence une représentation de l'opérateur dans cette base sous forme de matrices bandes ce qui nous permettra de faire des opérations sur l'ensemble de ces opérateurs que l'on explicitera dans les sections suivantes . On peut remarquer la différence subsistante entre le premier terme de l'égalité (.0.2) ci dessus qui est un crochet de dualité $(\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)\ ,\ \mathcal{D}(\mathbf{R}^n))$ et le second qui est un crochet de dualité $(\mathcal{D}'(\mathbf{R}^{2n})\ ,\ \mathcal{D}(\mathbf{R}^{2n}))$ et $\phi\otimes\psi$ est le produit tensoriel de ϕ par ψ , $\phi\otimes\psi\,(x,y) = \phi(x)\,\psi(y)$. Pour que (.0.1) ait un sens on suppose que K (appelé noyau distribution) soit une distribution tempérée .

La représentation de T en tant qu'opérateur de $L^2(\mathbf{R}^n)$ dans $L^2(\mathbf{R}^n)$ se fait de deux manière différente et selon le choix de la base orthonormée de $L^2(\mathbf{R}^n)$ comme on l'a indiqué ci dessus . Si on décompose le noyau K sur le produit tensoriel des ondelettes $(\psi_\lambda^\epsilon)_{\lambda\in\Lambda}$ on obtient la “forme standard” et on note

$$\Theta(\lambda,\lambda') = < T\,\psi_\lambda, \psi_{\lambda'} >$$

Alors que si on décompose K sur les ondelettes bidimentionnelles donc sur la suite $(\psi_\lambda \otimes \psi_{\lambda'}\ ,\ \psi_\lambda \otimes \phi_{\lambda'}\ ,\ \phi_\lambda \otimes \psi_{\lambda'})_{\lambda(j,k),\lambda'(j,k')\in\Lambda^2}$ on obtient la forme non standard.

1. Cermics, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Central 2, La Courtine, 93167 Noisy le Grand.

Dans ce travail seule la forme standard sera étudiée, avant tout on fait remarquer que beaucoup de travaux ont été fait sur au sujet de la forme standard notamment par P-G.Lemarie ([2], et S.Jaffard [1] et une étude plus complète est faite par Y.Meyer dans l'ouvrage [4].
Puisque la suite $\left(\Psi_{\lambda,\lambda'}(x,y) = \psi_\lambda(x).\psi_{\lambda'}(y)\right)_{\lambda,\lambda'\in\Lambda^2}$ est une base tensorielle de $L^2(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, la forme standard est une véritable représentation matricielle $M(\lambda,\lambda') = \Theta(\lambda,\lambda')$ de l'opérateur T dans une telle base et on peut donc déduire que la forme standard est stable par multiplication .
Dans un premier temps nous allons définir une nouvelle classe d'opérateurs caractérisés par leurs matrices dans la base $(\Psi_{\lambda,\lambda'}(x,y))_{\lambda,\lambda'\in\Lambda^2}$.

.2 Rappels et Définition

.2.1 Rappels

Soit V un espace vectoriel tel que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset V \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ avec $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact , les deux injections ci dessus sont continues et d'image dense . on note V' l'espace dual de V . Soit Ω l'ouvert de $(\mathbb{R}^n * \mathbb{R}^n)$ définis par $x \neq y \;\forall\; (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$.

Définition 1 *soit $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ un opérateur linéaire continu . On dit que T est un opérateur de Caldéron Zygmund si les conditions suivantes sont satisfaites*

1. *Le noyau $K(x,y)$ est une fonction localement intégrable sur Ω et $\exists\, C_0$ telle que $|k(x,y)| \leq C_0\,|x-y|^{-n}$*
2. *il existe $\gamma \in]0,1]$ et une constante C_1 tels qu'on ait*

$$\begin{aligned} |K(x,y) - K(x'-y)| &\leq C_1\,|x-x'|^\gamma\,|x-y|^{-n-\gamma} \\ &\quad si\ |x-x'| \leq \tfrac{1}{2}\,|x-y| \\ |K(x,y) - K(x-y')| &\leq C_1\,|y-y'|^\gamma\,|x-y|^{-n-\gamma} \\ &\quad si\ |y-y'| \leq \tfrac{1}{2}\,|x-y| \end{aligned} \tag{.0.3}$$

3. *T se prolonge en un opérateur continu sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

   (on note **CZO** *l'ensemble de ces opérateurs)*

Définition 2 *Un opérateur linéaire continu $T : V \longrightarrow V'$ est associé à une intégrale singulière s'il existe un exposant $\gamma \in]0,1]$, deux constantes C_0 et C_1 et une fonction $K : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$*

$$\begin{aligned} |k(x,y)| &\leq C_0\,|x-y|^{-n} \\ |K(x,y) - K(x'-y)| &\leq C_1\,|x-x'|^\gamma\,|x-y|^{-n-\gamma} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} & & si \ \ |x-x'| \ \le \ \frac{1}{2}\,|x-y| \\ |K(x,y) \ - \ K(x-y')| & \le & C_1\,|y-y'|^{\gamma}\,|x-y|^{-n-\gamma} \\ & & si \ \ |y-y'| \ \le \ \frac{1}{2}\,|x-y| \end{array} \tag{.0.4}$$

et $Tf(x) = \int K(x,y)\, f(y)\, dy$ *pour toute fonction* $f \in V$ *et tout* x *n'appartenant pas au support de* f

(on note **SIO** *l'ensemble de ces opérateurs)*

Définition 3 *Soit* $q \geq 1$ *un entier. On pose alors ,pour toute boule* $B \subset \mathbb{R}^n$*, de centre* x_0 *et de rayon* R *et pour toute fonction* $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *à support contenu dans* B*,*

$$N_q^B(f) = R^{\frac{n}{2}} \sum_{|\alpha \leq q} R^{|\alpha|} \|\partial^\alpha f\|_\infty.$$

Si $0 < s < 1$*, on définit de même* $N_s^B(f)$ *par*

$$N_s^B(f) = R^{\frac{n}{2}+s} \sup_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^s}.$$

On dit qu'un opérateur linéaire continu $T : V \longrightarrow V'$ *est faiblement continu sur* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *s'il existe une constante* $C > 0$ *et un entier* q *tels que l'on ait, pour toute boule* $B \subset \mathbb{R}^n$ *et pour tout couple* (f,g) *de deux fonctions de* V*, toutes deux supportées par* B*,*

$$| < Tf, g > | \leq C N_q^B(f) N_q^B(g).$$

Théorème 1 (David et Journé) *Si* T *est donné par la définition (2) . Alors* T *se prolonge en un opérateur continu sur* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites*

1. $T(1) \in \mathbf{BMO}(\mathbb{R}^n)$
2. ${}^tT(1) \in \mathbf{BMO}(\mathbb{R}^n)$
3. T *est faiblement continu sur* $L^2(\mathbb{R}^n)$

L'espace $\mathbf{BMO}(\mathbb{R}^n)$ *est l'espace dual de l'espace de Hardy* $\mathbf{H}^1$ *, nous renvoyons le lecteur à [3] pour tout ce qui concerne cet espace .*

Définition 4 *1. Soit* γ *un réel strictement positif , une matrice "infinie"* A *indexée par l'ensemble des cubes dyadiques* $\Lambda \times \Lambda$ *, appartient à l'ensemble* $\mathcal{M}_\gamma$ *si et seulement si il existe une constante positive* C *telle que :*

$$|A_{\lambda_0,\lambda_1}| \ \leq \ C\, W_\gamma(\lambda_0,\lambda_1). \tag{.0.5}$$

avec

$$W_\gamma(\lambda_0,\lambda_1) \ = \ \frac{2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)\,|j_0-j_1|}}{1+(j_0-j_1)^2} \cdot \frac{1}{(1+2^{inf(j_0,j_1)}|\lambda_0-\lambda_1|)^{n+\gamma}} \tag{.0.6}$$

2. *On note* $\mathcal{OM}_\gamma$ *la classe d'opérateurs* $T : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ *telle que la matrice* $T_{\lambda_0,\lambda_1} = < T\psi_{\lambda_0}, \psi_{\lambda_1} > \in \mathcal{M}_\gamma$.

Théorème 2 ([4]) $\mathcal{M}_\gamma$ *est une algèbre .*

Si $0 < \gamma \leq 1$, on note $\mathcal{A}_\gamma$ la classe des opérateurs lineaires continus vérifiant les conditions (.0.4) de la définition (2) et tels que $T(1) = {}^tT(1) = 0$. on a le théorème suivant [Meyer] [4] .

Théorème 3 ([4]) *Si* $0 < \gamma \leq 1$ *et si* $T \in O\mathcal{M}_\gamma$ *alors* $T \in \mathcal{A}_\gamma$ *. Réciproquement si* $T \in \mathcal{A}_\gamma$ *et si* $0 < \gamma'' < \gamma$ *, on a* $T \in \mathcal{OM}''_\gamma$

Remarque 1 1. *Les résultats ci dessus sont donnés en détail dans [4].*

2. *On appelle algèbre de lemarié la classe* $\mathcal{OM}_\gamma$ *.*

.2.2 Nouvelle algèbre

Dans l'espoir de raffiner les propriétés de l'algèbre $\mathcal{M}_\gamma$, nous définissons la nouvelle classe d'opérateurs suivante :

Définition 5 *Soit* γ , γ' *deux réels strictement positifs , une matrice "infinie"* A *indexée par l'ensemble des cubes dyadiques* $\Lambda \times \Lambda$ *, appartient à l'ensemble* $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$ *si et seulement si il existe une constante positive* C *telle que :*

$$|A_{\lambda_0,\lambda_1}| \leq C\, W_{\gamma,\gamma'}(\lambda_0, \lambda_1). \tag{.0.7}$$

avec

$$W_{\gamma,\gamma'}(\lambda_0, \lambda_1) = \frac{2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)\,|j_0-j_1|}}{1 + (j_0 - j_1)^2} . \frac{1}{(1 + 2^{inf(j_0,j_1)}|\lambda_0 - \lambda_1|)^{n+\gamma'}} \tag{.0.8}$$

Remarque 2 *Si* $\gamma = \gamma'$ *alors* $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'} = \mathcal{M}_\gamma$.

Lemme 1

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\gamma \subseteq \mathcal{M}_{\gamma,\gamma'} \subseteq \mathcal{M}_{\gamma'} \quad & si\ \gamma' \leq \gamma \\ \mathcal{M}_{\gamma'} \subseteq \mathcal{M}_{\gamma,\gamma'} \subseteq \mathcal{M}_\gamma \quad & si\ \gamma' \geq \gamma . \end{aligned}$$

Il suffit d'écrire les définitions de chacun de ces ensembles et utiliser les hypothèses pour déduire ce résultat.

Notation : Pour toute la suite on note $\beta = n+\gamma'$ et $\bar{W}_{\gamma,\gamma'}(\lambda_0, \lambda_1) = \dfrac{1}{(1 + 2^{inf(j_0,j_1)}|\lambda_0 - \lambda_1|)^\beta}$

.3 Condition Suffisante

Théorème 4 *L'ensemble* $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$ *est une algèbre pour tout couple de réels* (γ,γ') *vérifiant* $0<\gamma'\leq 2\gamma$.

Démonstration: Il suffit de démontrer que $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$ est stable par la multiplication matricielle pour conclure . C'est à dire que si A, B sont deux matrices de $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$ pour quel couple (γ,γ') a-t-on $G = A.B \in \mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$?, autrement i l suffit donc de trouver une constante C telle que :

$$I = \sum_{\lambda\in\Lambda} W_{\gamma,\gamma'}(\lambda_0,\lambda)\, W_{\gamma,\gamma'}(\lambda,\lambda_1) \;\leq\; C\, W_{\gamma,\gamma'}(\lambda_0,\lambda_1).$$

En effet:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j,k} \frac{2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)\,(|j_0-j|\,+\,|j-j_1|)}}{(1\,+\,|j_0-j|^2)(1\,+\,|j-j_1|^2)}\, \bar{W}_{\gamma,\gamma'}(\lambda_0,\lambda)\, \bar{W}_{\gamma,\gamma'}(\lambda,\lambda_1). \\ &= \sum_{j} \frac{2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)\,(|j_0-j|\,+\,|j-j_1|)}}{(1\,+\,|j_0-j|^2)(1\,+\,|j-j_1|^2)}\, I^j\,. \end{aligned}$$

avec $I^j = \sum_k \bar{W}_{\gamma,\gamma'}(\lambda_0,\lambda)\, \bar{W}_{\gamma,\gamma'}(\lambda,\lambda_1)$

On commence par l'étude de la somme en k ,donc par I^j et on passera à la somme en j pour conclure .

$$\begin{aligned} I^j &= \textstyle\sum_k \bar{W}_{\gamma,\gamma'}(\lambda_0,\lambda)\, \bar{W}_{\gamma,\gamma'}(\lambda,\lambda_1) \\ &= \textstyle\sum_k (1+2^{inf(j_0,j)}|\lambda_0-\lambda|)^{-\beta}\,(1+2^{inf(j,j_1)}|\lambda-\lambda_1|)^{-\beta}. \end{aligned} \tag{.0.9}$$

Le rôle symétrique de (λ_0,λ_1) nous permet de supposer que $j_0 \geq j_1$ (quitte à remplacer les opérateurs étudiés par leur transposée), trois cas de la position de j par rapport à j_0 et j_1 sont à distinguer :

1. $j\geq j_0\geq j_1$ donc $inf(j,j_0)=j_0$ et $inf(j,j_1)=j_1$
2. $j_0\geq j\geq j_1$ donc $inf(j,j_0)=j$ et $inf(j,j_1)=j_1$
3. $j_0\geq j_1\geq j$ donc $inf(j,j_0)=j$ et $inf(j,j_1)=j$

Avant de passer au calcul , quelques résultats nous paraissent indesponsables.

Lemme 2 *Soient* $(\epsilon,\eta)\in\mathbf{R}^2$, $(x,y)\in\mathbf{R}^2$ *et* $\beta\in\mathbf{R}_+^*$

Si $0 < \eta \leq \epsilon \leq 1$ *alors* $\exists\, C = C(\beta) \; > \; 0$ *tq*

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^n} (\, 1 + |x - k\epsilon|\,)^{-\beta} \, (\, 1 + |y - k\eta|\,)^{-\beta} \;\leq\; C.\epsilon^{-n} \, (\, 1 + |y - x\,\eta\,\epsilon^{-1}|\,)^{-\beta} \tag{.0.10}$$

Lemme 3 *Soient* $(j, j_0, j_1) \in \mathbf{Z}^3$ *tq* $j_0 \geq j \geq j_1$ *Alors*

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} (\, 1 + (j - j_0)^2\,)^{-1} \, (\, 1 + (j - j_1)^2\,)^{-1} \;\leq C.(\, 1 + (j_0 - j_1)^2\,)^{-1}$$

Démonstrations: Tout d'abords , on fait remarquer que le lemme 3 est un cas particulier du lemme 2 , on s'interesse donc à la démonstration de ce dernier,
On note $\theta \;=\; \eta\epsilon^{-1}$ $\quad 0 < \theta \leq 1$, deux positions de x par rapport à y sont à distinguer , soit C une constante strictement supérieur à 1 .

a1 $\quad |\, y - \theta x| \;\leq\; C$

b1 $\quad |\, y - \theta x| \;\geq\; C$

Pendant que le premier cas est trés simple puise-qu'on peut confondre x et y et on se ramène à une somme de Reimann avec $\epsilon \; < 1$, le second cas est à étudier .
On distingue la région R_1 où le triplet (x, y, k) vérifie

$$|\, x - \epsilon k| \;\leq\; \frac{1}{2\theta}\, |y - \theta x|\;,$$

de la région R_2 où

$$|\, x - \epsilon k| \;\geq\; \frac{1}{2\theta}\, |y - \theta x|\;.$$

On note $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ les quantités suivantes:

$$\mathcal{S}_1 \;=\; \sum_{k \in R_1} (\, 1 + |x - k\epsilon|\,)^{-\beta} \, (\, 1 + |y - k\eta|\,)^{-\beta}$$

$$\mathcal{S}_1 \;=\; \sum_{k \in R_2} (\, 1 + |x - k\epsilon|\,)^{-\beta} \, (\, 1 + |y - k\eta|\,)^{-\beta}$$

Pour tout $k \;\in\; R_1$ on a:

$$\begin{aligned} |y - \eta k| \;&=\; \theta \,|\, \frac{y}{\theta} \;-\; \epsilon k \,| \\ &\geq\; \theta \, \Big|\, |\frac{y}{\theta} \;-\; x\,| \;-\; |\, x - \epsilon k| \,\Big| \\ &\geq\; \frac{1}{2} \,|\, y - \theta x \,| \end{aligned}$$

Or $\epsilon \; < \; 1$ alors par l'inégalite de Reimann on a

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^n} (\, 1 + |x - k\epsilon|\,)^{-\beta} \;\leq C_0 \; \epsilon^{-n}$$

Alors $\mathcal{S}_1$ vérifie :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 \quad &\leq\ 2^\beta\ (\ 1+|y-x\theta|\ )^{-\beta}\ \textstyle\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}\ (\ 1+|x-k\epsilon|\ )^{-\beta} \\ &\leq\ 2^\beta\ C_0\ \epsilon^{-n}\ (\ 1+|y-x\theta|\ )^{-\beta}. \end{aligned} \tag{.0.11}$$

Pour tout $k\ \in\ R_2$ on a

$$|x\ -\ \theta y|\ \leq\ 2\theta\ |x\ -\ \epsilon k|,$$

alors $\mathcal{S}_2$ vérifie :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 \quad &\leq\ \left(1+\tfrac{1}{2\theta}\ |y-\theta x|\right)^{-\beta}\ \textstyle\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}(\ 1+|y-k\eta|\ )^{-\beta} \\ &\leq\ 2^\beta\ \theta^\beta\ \eta^{-n}\ C(\beta)\ (2\theta\ +\ |y-\theta x|)^{-\beta}. \end{aligned}$$

Or , $|y-x\theta\ |\ \geq\ C$ et $\theta\ <\ 1$, $alors:$ $(2\theta\ +\ |y-\theta x|)^{-\beta} \simeq (\ 1+|y-x\theta|\ )^{-\beta}$, comme $\eta<\epsilon$, $\mathcal{S}_\in$ vérifie :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_2 \quad &\leq C_1(\beta)\ \epsilon^{-n}\ \left(\tfrac{\eta}{\epsilon}\right)^{\beta-n}\ (1\ +\ |y-\theta x|)^{-\beta} \\ &\leq C_1(\beta)\ \epsilon^{-n}\ (1\ +\ |y-\theta x|)^{-\beta}. \end{aligned} \tag{.0.12}$$

la somme de (.0.11) et (.0.12) donne (.0.10), d'où le lemme 3.

Remarque 3 *1. Du lemme 2 ci dessus on deduit :*

Avec $\eta=\epsilon=1$, *l'equation (.0.10) donne,*

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}(\ 1+|x-k|\ )^{-\beta}\ (\ 1+|y-k|\ )^{-\beta}\ \leq\ C.\ (\ 1+|y-x|\ )^{-\beta}$$

L'inégalité ci dessus est vraie pour tout couple $(x,y)\ \in\mathbf{R}^2$, *si on prend* $x=u\mu$ *et* $y=v\nu$ *avec* $0<\mu\leq\nu\leq 1$ *alors on obtient l'inegalité suivante*

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbf{Z}^n}(\ 1+|u\mu-k|\ )^{-\beta}\ (\ 1+|v\nu-k|\ )^{-\beta} \quad &\leq C\ (\ 1\ +\ |v\nu-u\mu|\ )^{-\beta} \\ &\leq C\ \nu^{-\beta}(\ 1\ +\ |v-u\mu\,\nu^{-1}|\ )^{-\beta} \\ \forall\ (u,v) \quad &. \end{aligned}$$

2. On rappelle la somme de Reimann, pour $\epsilon\in\mathbf{R}$, $k\in\mathbf{Z}^n$, $x\in\mathbf{R}$

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}^n}(\ 1+|x-k\epsilon|\ )^{-\beta}\ \leq\ \begin{cases} C & si\ \epsilon\geq 1 \\ C\epsilon^{-n} & si\ \epsilon\leq 1. \end{cases}\quad \forall\beta\in\mathbf{R}\ et\ \beta>n,$$

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 4 et commençons par le premier cas $j \geq j_0 \geq j_1$, on note I_1^j la quantité donnée par l'équation (.0.9) correspondant au cas ci dessus;

$$\begin{aligned} I_1^j &= \sum_k (1+2^{j_0}|\lambda_0-\lambda|)^{-\beta}(1+2^{j_1}|\lambda-\lambda_1|)^{-\beta} \\ &= \sum_k (1+|\,2^{j_0}\lambda_0 - k2^{j_0-j} - r2^{j_0-j-1}|)^{-\beta}(1+|\,k2^{j_1-j} - r2^{j_1-j-1} - \lambda_1 2^{j_1}|)^{-\beta}. \end{aligned}$$

avec les notations suivantes:

$$\begin{aligned} x_j &= 2^{j_0}\lambda_0 - r2^{j_0-j-1} \quad , \quad \epsilon = 2^{j_0-j} \\ y_j &= 2^{j_1}\lambda_1 - r2^{j_1-j-1} \quad , \quad \eta = 2^{j_1-j}. \end{aligned}$$

on a : $0<\eta\leq\epsilon\leq 1$ et $\eta\epsilon^{-1} = 2^{j_1-j_0}$,

$$I_1^j = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} (\,1+|x_j-k\epsilon|\,)^{-\beta}\,(\,1+|y_j-k\eta|\,)^{-\beta}$$

le lemme 2 nous assure l'existence d'une constante $C=C(\beta)>0$ telle que ,

$$\begin{aligned} I_1^j &\leq C(\beta)\,\epsilon^{-n}\,\left(1 + |y_j - x_j\eta\epsilon^{-1}|\right)^{-\beta}. \\ &\leq C(\beta)\,\epsilon^{-n}\,\left(1 + 2^{j_1}|\lambda_0-\lambda_1|\right)^{-\beta} \end{aligned} \tag{.0.13}$$

En passant à la somme en j on obtient grâce à (.0.13)

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_j \frac{2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)\,(2j-j_0-j_1)}}{(1+|j_0-j|^2)(1+|j-j_1|^2)}\,I_1^j \\ &\leq C(\beta)\,\left(1+2^{j_1}|\lambda_0-\lambda_1|\right)^{-\beta}\sum_j \frac{2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)\,(2j-j_0-j_1)}}{(1+|j_0-j|^2)(1+|j-j_1|^2)}\,\epsilon^{-n}. \\ &\leq C(\beta)\,\left(1+2^{j_1}|\lambda_0-\lambda_1|\right)^{-\beta}\frac{1}{(1+|j_0-j_1|^2)}\sum_j 2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)\,(2j-j_0-j_1)-n(j_0-j)} \\ &\leq C(\beta)\,\left(1+2^{j_1}|\lambda_0-\lambda_1|\right)^{-\beta}\frac{2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)\,(j_0-j_1)}}{(1+|j_0-j_1|^2)}\sum_j 2^{-2\gamma(j-j_0)}. \end{aligned}$$

La somme ci dessus est convergente parce que $j \geq j_0$ et $\gamma>0$, d'où la conclusion intermédiaire suivante :

$$\text{Si } j \geq j_0 \geq j_1\ \exists C=C(\beta)\ \text{ tq} \qquad I_1 \leq C(\beta)\,W_{\gamma,\gamma'}(\lambda_0,\lambda_1). \tag{.0.14}$$

On traite maintenant le second cas correspondant à $j_0 \geq j \geq j_1$ et on note I_2^j la somme correspondante à (.0.9);

$$
\begin{aligned}
I_2^j &= \sum_k (1+2^j|\lambda_0-\lambda|)^{-\beta}\,(1+2^{j_1}|\lambda-\lambda_1|)^{-\beta} \\
&= \sum_k \Big(1+|2^j\lambda_0-k-\frac{r}{2}|\Big)^{-\beta}\ \big(1+|2^{j_1}\lambda_1-k2^{j_1-j}-r2^{j_1-j-1}|\big)^{-\beta}.
\end{aligned}
$$

Avec les notations suivantes

$$
\begin{aligned}
x_j = 2^j\lambda_0\ -\ \frac{r}{2} \quad &, \quad \epsilon = 1 \\
y_j = 2^{j_1}\lambda_1\ -\ r2^{j_1-j-1} \quad &, \quad \eta = 2^{j_1-j}.
\end{aligned}
$$

le lemme 2 est encore vérifiée avec $\epsilon = 1$, on déduit donc l'existence d'une constante $C = C(\beta)\ >\ 0$ tq :

$$
I_2^j\ \leq\ C(\beta)\ (\ 1\ +\ |x_j\eta-y_j|)^{-\beta}. \tag{.0.15}
$$

Au passage à la somme en j on obtient:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \textstyle\sum_j \dfrac{2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)\,(j_0-j_1)}}{(1\ +\ |j_0-j|^2)(1\ +\ |j-j_1|^2)}\, I_2^j \\
&\leq\ C(\beta)\, 2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)\,(j_0-j_1)}\ \big(\ 1\ +\ 2^{j_1}|\lambda_0-\lambda_1|\big)^{-\beta}\ \textstyle\sum_j\ (1\ +\ |j_0-j|^2)^{-1}\ (1\ +\ |j-j_1|^2)^{-1}.
\end{aligned}
$$

le lemme 3 nous donne:

$$
\begin{aligned}
I_2 \ &\leq\ C(\beta)\ \big(\ 1\ +\ 2^{j_1}|\lambda_0-\lambda_1|\big)^{-\beta}\ \frac{2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)\,(j_0-j_1)}}{(1\ +\ |j_0-j_1|^2)} \\
&\leq\ C(\beta)\ W_{\gamma.\gamma'}(\lambda_0,\lambda_1).
\end{aligned} \tag{.0.16}
$$

On acheive la démonstration du théorème en traitant le cas correspondant à $j_0\ \geq\ j_1\ \geq\ j$, on note I_3^j la quantité donnée par l'équation (.0.9) avec les hypothèses ci dessus;

$$
\begin{aligned}
I_3^j &= \sum_k (1+2^j|\lambda_0-\lambda|)^{-\beta}\,(1+2^j|\lambda-\lambda_1|)^{-\beta} \\
&= \sum_k \big(1+2^{j-j_0}|\lambda_0 2^{j_0}-k2^{j_0-j}-r2^{j_0-j-1}|\big)^{-\beta}\ \big(1+2^{j-j_1}|\lambda_1 2^{j_1}-k2^{j_1-j}-r2^{j_1-j-1}|\big)^{-\beta}.
\end{aligned}
$$

Notation;

$$
\begin{aligned}
x_j = 2^{j_0}\lambda_0\ -\ r2^{j_0-j-1} \quad &, \quad \epsilon = 2^{j-j_0} \\
y_j = 2^{j_1}\lambda_1\ -\ r2^{j_1-j-1} \quad &, \quad \eta = 2^{j-j_1}.
\end{aligned}
$$

on a $0 < \epsilon \leq \eta \leq 1$ et

$$I_3^j = \sum_k (\ 1\ +\ |x\epsilon - k|)^{-\beta}\ (\ 1\ +\ |y\eta - k|)^{-\beta}\ .$$

D'après le point (i) de la remarque **??** on déduit l'existence d'une constante $C = C(\beta) > 0$ tq :

$$I_3^j\ \leq\ C(\beta)\ \eta^{-\beta}\ \left(\ 1\ +\ |x_j \epsilon \eta^{-1} - y_j|\right)^{-\beta}. \tag{.0.17}$$

on termine en passant à la somme en j :

$$\begin{aligned}
I_3 \quad &= \quad \sum_j \frac{2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)\ (j_0+j_1-2j)}}{(1\ +\ |j_0-j|^2)(1\ +\ |j-j_1|^2)}\ I_3^j \\
&\leq \quad C(\beta)\left(\ 1\ +\ 2^{j_1}|\lambda_0-\lambda_1|\right)^{-\beta}\ \sum_j \frac{2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)\ (j_0+j_1-2j)}\ 2^{(j_1-j)\beta}}{(1\ +\ |j_0-j|^2)(1\ +\ |j-j_1|^2)} \\
&\leq \quad C(\beta)\ \frac{\left(\ 1\ +\ 2^{j_1}|\lambda_0-\lambda_1|\right)^{-\beta}}{(1\ +\ |j_0-j_1|^2)}\ 2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)(j_0-j_1)}\ \sum_j 2^{-2(\frac{n}{2}+\gamma)j_1}\ 2^{2(\frac{n}{2}+\gamma)j}\ 2^{(j_1-j)\beta} \\
&\leq \quad C(\beta)\ W_{\gamma,\gamma'}(\lambda_0,\lambda_1)\sum_j\ 2^{(2\gamma-\gamma')(j-j1)}
\end{aligned}$$

et comme $j_1 \geq j$,la somme ci dessus n'est convergente que si $\gamma' < 2\gamma$, on deduit donc que si $\gamma' < 2\gamma$ alors il existe une constante $C = C(\beta)$ telle que:

$$I_3\ \leq\ C(\beta)\ W_{\gamma,\gamma'}(\lambda_0,\lambda_1), \tag{.0.18}$$

Conclusion

D'après les équations (.0.14),(.0.16),(.0.18), on conclut que pour

$$(\gamma,\gamma')\ \in \mathbf{R}^2\ verifiant\ \gamma' < 2\gamma$$

il existe une constante $C = C(n,\gamma,\gamma')$ telle que ;

$$|G(\ \lambda_0,\lambda_1\ )|\ \leq\ C\ W_{\gamma,\gamma'}(\lambda_0,\lambda_1) \tag{.0.19}$$

La matrice $G = A.B$ appartient à $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$ **si** $\gamma' < 2\gamma$.

.4 La nécessité de la Condition $\gamma' < 2\gamma$

Nous venons de démontrer que pour tout couple réel (γ,γ') vérifiant $\gamma' < 2\gamma$ l'ensemble $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$ associe est une algèbre , nous allons maintenant regarder la réciproque . On énnonce le théorème suivant ,

<u>**Théorème**</u> **5** *Si* $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$ *est une algèbre alors* $\gamma' < 2\gamma$.

Démonstration;

Nous allons faire un raisonnement par l'absurde ; en effet, soient γ, γ' deux réels positifs tels que $\gamma' \geq 2\gamma$ peut-on prouver l'existence de deux élements A, B de l'ensemble $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$ tels que leur produit $G = A.B$ n'est pas dans $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$.
On prend $A = B = W$ avec la matrice W donnée par $W_(\lambda_0, \lambda_1) = W_{\gamma,\gamma'}(\lambda_0, \lambda_1)$, la matrice produit est donnée donc par

$$\begin{aligned} G(\lambda_0, \lambda_1) &= \sum_{\lambda \in \Lambda} W_{\gamma,\gamma'}(\lambda_0, \lambda)\, W_{\gamma,\gamma'}(\lambda, \lambda_1) \\ &= \sum_{j \in \mathbf{Z}} A^j\ I^j. \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} I^j &= \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \Big(1 + 2^{\inf(j,j_0)}|\lambda_0 - \lambda|\Big)^{-\beta} \Big(1 + 2^{\inf(j,j_1)}|\lambda - \lambda_1|\Big)^{-\beta} \\ A^j &= \frac{2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)\ (|j-j_0|+|j-j_1|)}}{(1+(j-j_0)^2)(1+(j-j_1)^2)}. \end{aligned}$$

Si $\Lambda_3 = \{\lambda \in \Lambda \ /\ j_0 \geq j_1 \geq j\ \}$, $J_3 = \{j / \lambda \in \Lambda_3\ \}$ alors

$$|G(\lambda_0, \lambda_1)| \geq \sum_{j \in J_3} A^j\ I^j$$

et on note

$$I' = \frac{\displaystyle\sum_{j \in J_3} A^j\ I^j}{W_{\gamma,\gamma'}(\lambda_0, \lambda_1)} , \qquad (.0.20)$$

montrer que $G \notin \mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$ revient à montrer que $I' \longrightarrow \infty$, le lemme suivant va nous confirmer ce resultat , ce qui acheivra la démonstration du théorème .

Lemme 4 *Il existe un couple (λ_0, λ_1) tel que pour toute constante $C > 0$ on a $I' > C$ (I' est donné par (.0.20)).*

en effet,
Avec les notations suivantes ,

$$\begin{aligned} x = k_0 + \frac{r_0}{2} - r2^{j_0-j-1} \quad &, \quad \epsilon = 2^{j-j_0} \\ y = k_1 + \frac{r_1}{2} - r2^{j_1-j-1} \quad &, \quad \eta = 2^{j-j_1}. \end{aligned}$$

on a

$$I^j = \sum_{k\in\mathbf{Z}^n} (1+|x\epsilon-k|)^{-\beta}\ (1+|y\eta-k|)^{-\beta}$$

$$W_{\gamma,\gamma'}(\lambda_0,\lambda_1) = 2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)\,(|j_0-j_1|)}\ \left(1+|y-x\epsilon\eta^{-1}|\right)^{-\beta}.$$

D'une part , I^j est une somme à termes positifs ,donc on peut la minorer par l'un de ses termes, soit celui qui correspond à $k=[x\epsilon]$ et on aura donc;

$$\begin{aligned} I^j &\geq \eta^\beta\, 2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)\,(|j_0-j_1|)}\ \left(\eta^{-1}+|y-x\epsilon\eta^{-1}|\right)^{-\beta} \\ &\geq 2^{-\beta}\, 2^{-\beta\,(j-j_1)}\ \left(\eta^{-1}+|y-x\epsilon\eta^{-1}|\right)^{-\beta} \end{aligned}$$

D'autre

$$I' = \frac{\displaystyle\sum_{j\in J_3} A^j\ I^j}{W_{\gamma,\gamma'}(\lambda_0,\lambda_1)},$$

on minore donc I' de la façon suivante,

$$\begin{aligned} I' &\geq \frac{\displaystyle\sum_{j\in J_3} A^j\, 2^{-\beta}\, 2^{-(j-j_1)\beta}\ \left(\eta^{-1}+|y-x\epsilon\eta^{-1}|\right)^{-\beta}}{2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)\,(|j_0-j_1|)}\ (1+|y-x\epsilon\eta^{-1}|)^{-\beta}} \\ &\geq 2^{-\beta}\sum_{j\in J_3} 2^{(2\gamma-\gamma')(j-j_1)}\left(\frac{1+|y-x\epsilon\eta^{-1}|}{\eta^{-1}+|y-x\epsilon\eta^{-1}|}\right)^{\beta}, \end{aligned}$$

On note

$$\Sigma = \sum_{j\in J_3} 2^{(2\gamma-\gamma')(j-j_1)}\left(\frac{1+|y-x\epsilon\eta^{-1}|}{\eta^{-1}+|y-x\epsilon\eta^{-1}|}\right)^{\beta},$$

On distingue deux cas , le premier correspond à $\eta^{-1} < |y-x\epsilon\eta^{-1}|$ et le second à $\eta^{-1}\geq|y-x\epsilon\eta^{-1}|$

On considère Σ_1 et Σ_2 telle que ,

$$\Sigma_1 = \sum_{\substack{j\in j_3 \\ \eta^{-1}<|y-x\epsilon\eta^{-1}|}} 2^{(2\gamma-\gamma')(j-j_1)}\left(\frac{1+|y-x\epsilon\eta^{-1}|}{\eta^{-1}+|y-x\epsilon\eta^{-1}|}\right)^{\beta},$$

et

$$\Sigma_2 = \sum_{\substack{j\in j_3 \\ \eta^{-1}\geq|y-x\epsilon\eta^{-1}|}} 2^{(2\gamma-\gamma')(j-j_1)}\left(\frac{1+|y-x\epsilon\eta^{-1}|}{\eta^{-1}+|y-x\epsilon\eta^{-1}|}\right)^{\beta},$$

on a $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$.

Comme les calculs sont faits sur des termes positifs alors il suffit de montrer que l'un des deux termes (Σ_1, Σ_2) tend vers l'infini pour un certain couple (λ_0, λ_1) pour conclure qu'il existe (λ_0, λ_1) tel que $\Sigma \to \infty$.

Lemme 5 *Avec les mêmes notations ci dessus ,*

$$Si \qquad 2^{j_1}|\lambda_0 - \lambda_1| > 1 \qquad alors \qquad \forall C > 0 \qquad \Sigma_1 > C \tag{.0.21}$$

en effet;
On a $\eta^{-1} < |y - x\epsilon\eta^{-1}|$ alors

$$2^{j_1 - j} < 2^{j1}|\lambda_0 - \lambda_1| \qquad donc \qquad 2^{-j} < |\lambda_0 - \lambda_1|$$

ce qui donne

$$j > -\frac{log|\lambda_0 - \lambda_1|}{log\ 2},$$

si on note $j^\star = 1 - [log_2|\lambda_0 - \lambda_1|]$ on a $j \geq j^\star$ la somme Σ_1 devient,

$$\Sigma_1 = \sum_{j_1 \geq j \geq j^\star} 2^{(2\gamma - \gamma')(j - j_1)} \left(\frac{1 + |y - x\epsilon\eta^{-1}|}{\eta^{-1} + |y - x\epsilon\eta^{-1}|} \right)^\beta,$$

or $\eta^{-1} < |y - x\epsilon\eta^{-1}|$, alors

$$\left(\frac{1 + |y - x\epsilon\eta^{-1}|}{\eta^{-1} + |y - x\epsilon\eta^{-1}|} \right)^\beta > \left(\frac{1 + |y - x\epsilon\eta^{-1}|}{2|y - x\epsilon\eta^{-1}|} \right)^\beta = \left(\frac{1 + 2^{j_1}|\lambda_0 - \lambda_1|}{2^{j_1+1}|\lambda_0 - \lambda_1|} \right)^\beta;$$

et comme $2^{j_1}|\lambda_0 - \lambda_1| > 1$ alors ,

$$\left(\frac{1 + |y - x\epsilon\eta^{-1}|}{\eta^{-1} + |y - x\epsilon\eta^{-1}|} \right)^\beta > \left(2^{j1}|\lambda_0 - \lambda_1| \right)^{-\beta};$$

si on note $b = 2^{\gamma' - 2\gamma}$, $m = j_1 - j$ et $m^\star = j_1 - j^\star$ par hypothèse ona $b \geq 1$ donc Σ_1 vérifie ;

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &> \sum_{j = j^\star}^{j_1} 2^{(2\gamma - \gamma')(j - j_1)} \left(2^{j_1}|\lambda_0 - \lambda_1| \right)^{-\beta} \\ &> \sum_{m=0}^{m^\star} b^m \left(2^{j_1}|\lambda_0 - \lambda_1| \right)^{-\beta}. \end{aligned}$$

pour $b = 1$ on a

$$\Sigma_1 > (m^\star + 1) \left(2^{j1}|\lambda_0 - \lambda_1| \right)^{-\beta} \quad ,$$

en faisant tendre j_1 vers ∞ alors $\forall\ \lambda_0$ le couple (λ_0, λ_1) répond au lemme 5.
pour $b > 1$ on ecrit,

$$\Sigma_1 > \left(2^{j1}|\lambda_0 - \lambda_1| \right)^{-\beta} \frac{1 - b^{1+m^\star}}{1 - b},$$

Pour tout couple (λ_0, λ_1) tel que

$$X = 2^{j1}|\lambda_0 - \lambda_1| \to +\infty \text{ donc } m^\star \to +\infty$$

on a

$$\left(2^{j1}|\lambda_0 - \lambda_1|\right)^{-\beta} \frac{b^{1+m^\star} - 1}{b-1} = X^{-\beta} \frac{e^{(X+2)log_2 b} - 1}{b-1} \to +\infty,$$

car $b > 1$; on déduit donc que $\forall C > 0 \quad \Sigma_1 > C$ d'où le lemme 5 et on conclut donc par $\forall C > 0 \quad I' > C$,d'où le lemme 4 et par l'occasion on acheive le démonstration du théorème .

Conclusions :

1. la matrice $G = W.W$ vérifie, $\exists\ (\lambda_0, \lambda_1) \in \Lambda^2\ tq : \forall C > 0$

   $G(\lambda_0, \lambda_1) > CW_{\gamma,\gamma'}(\lambda_0, \lambda_1) \qquad$ d$onc \qquad G \notin \mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$.
2. $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$ est une algèbre si et seulement si $\gamma' < 2\gamma$.
3. Pour toute la suite de cette partie on suppose que la condition $0 < \gamma' < 2\gamma$ est vérifiée donc $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$ est une algèbre.

.5 Algèbre $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$ et bases d'ondelettes

Définition 6 *Soit $(\psi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une base d'ondelettes provenant d'une analyse de multirésolution de régularité r, pour tout couple de réels (γ, γ') tel que $0 < \gamma' < 2\gamma$, on définit $O\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$ la classe d'opérateurs $T : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ dont la matrice représentative dans la base orthonormée $(\psi_\lambda \otimes \psi'_\lambda)_{(\lambda,\lambda')\in\Lambda^2}$ appartient à l'algèbre $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$.*

Il est trés important de faire remarquer que cette définition ne dépend guère du choix de la base d'ondelettes, comme le montre le lemme ci aprés.

Lemme 6 *Soient $(\psi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ et $(\bar{\psi}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ deux bases orthonormées d'ondelettes de régularité r. Si on note P la matrice de passage d'une base à l'autre,*

$$P_{\lambda,\lambda'} = \int \psi_\lambda(x)\bar{\psi}_{\lambda'}(x)dx.$$

Alors $\qquad P \in \mathcal{M}_{\gamma,\gamma'} \qquad \forall\gamma < r, 0 < \gamma' < 2\gamma,$

Avant de donner la démonstration de ce lemme, nous allons rappeler les expressions des propriétés de la régularité, la localisation et le caractère oscillant d'une ondelette.

Définition 7 *([3]) Soit $r \in \mathbf{N}$, une fonction ψ est appelée une ondelette de classe r si ψ vérifie:*

1. *Si $r = 0$, $\psi(x) \in L^\infty(\mathbf{R})$ et si $r \geq 1$, $\psi(x)$ ainsi que toutes ses dérivées ,jusqu'à l'ordre r , appartient à $L^\infty(\mathbf{R})$*

2. $\forall N \geq 1 \qquad 0 \leq k \leq r$

$$\left| \left(\frac{d}{dx}\right)^k \; \psi_\lambda(x) \right| \;\leq\; C_N \; 2^{j(k+\frac{1}{2})} \;(\; 1 \;+\; |2^j x - k|)^{-N}. \qquad (.0.22)$$

3. *Pour* $\;0 \leq k \leq r$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \; x^k \; \psi(x) \; dx \;=\; 0. \qquad (.0.23)$$

4. *La collection des fonctions* $\;2^{\frac{j}{2}} \; \psi(2^j x - k), \; j \in \mathbf{Z}, \; k \in \mathbf{Z}\;$ *est une base orthonormée de* $\;L^2(\mathbf{R})$.

Les deux premiers points caractérisent la régularité et la localisation de ψ, le troisième point donne le caractère oscillant de ψ et il est connu aussi sous le nom de propriété de cancellation.

Retournons maintenant à la démonstration du lemme (6) ci dessus, d'une part nous avons

$$\begin{aligned} P_{\lambda,\lambda'} &= <\psi_\lambda, \bar{\psi}'_\lambda> = \int \psi_\lambda(x)\bar{\psi}_{\lambda'}(x)dx \\ &= 2^{\frac{n(j+j')}{2}} \int \psi(2^j x - k)\bar{\psi}(2^{j'} x - k'), \end{aligned}$$

Par la localisation des ondelettes ψ et $\bar{\psi}$, pour N un entier positif, nous avons

$$\begin{aligned} \left|P_{\lambda,\lambda'}\right| &\leq 2^{\frac{n}{2}(j+j')} \int (1 + |2^j x - k|)^{-N}(1 + |2^{j'} x - k'|)^{-N} dx, \\ &\leq 2^{\frac{n}{2}(j+j')} \int (1 + |2^j x - k|)^{-N}(1 + 2^{j'}|x - k'2^{-j'}|)^{-N} dx, \end{aligned} \qquad (.0.24)$$

or d'aprés [3], il existe une constante $C_N > 0$ telle que

$$\int (1 + |2^j x - k|)^{-N}(1 + |2^{j'} x - k'|)^{-N} dx \leq C_N 2^{-nj'}(1 + 2^j|k'2^{-j'} - k2^{-j}|)^{-N},$$

On en déduit alors que (.0.24) se majore de la manière suivante

$$\left|P_{\lambda,\lambda'}\right| \leq C_N 2^{-\frac{n}{2}(j'-j)}(1 + 2^j|k'2^{-j'} - k2^{-j}|)^{-N}.$$

Si on choisit $N \geq n + \gamma'$ alors

$$\left|P_{\lambda,\lambda'}\right| \leq C_N 2^{-\frac{n}{2}|j'-j|}(1 + 2^{\inf(j,j')}|\lambda - \lambda'|)^{-n-\gamma'}. \qquad (.0.25)$$

D'autre, En utilisant le caractère oscillant de ψ (.0.23) et sa régularité qui se traduit par

$$\left|\psi_{jk}(x) - \psi_{jk}(k'2^{-j'})\right| \leq 2^{j(\frac{n}{2}+r)} \left|x - k'2^{-j'}\right|^r$$

nous déduisons que la quantité $\left|P_{\lambda,\lambda'}\right|$ se majore par

$$\begin{aligned}
\left|P_{\lambda,\lambda'}\right| &\leq \int \left|\psi_\lambda(x) - \psi_\lambda(k'2^{-j'})\right| \left|\bar{\psi}_{\lambda'}(x)\right| dx \\
&\leq 2^{j(\frac{n}{2}+r)} \int \left|x - k'2^{-j'}\right|^r \left|\bar{\psi}_{\lambda'}(x)\right| dx \\
&\leq C2^{-(\frac{n}{2}+r)|j-j'|}
\end{aligned} \tag{.0.26}$$

Si $\gamma \leq r$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left|P_{\lambda,\lambda'}\right| \leq C2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)|j-j'|} \tag{.0.27}$$

Donc à l'aide des deux majorations (.0.25) et (.0.27) ci dessus de $\left|P_{\lambda,\lambda'}\right|$, notées M_1 et M_2, on en obtient une troisième majoration $M_3 = M_1^\tau M_2^{(1-\tau)}$ où $0 < \tau < 1$. En choisissant τ suffisamment petit, on obtient

$$\left|P_{\lambda,\lambda'}\right| \leq C2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)|j-j'|}(1 + 2^{\inf(j,j')}|\lambda - \lambda'|)^{-n-\gamma'} \tag{.0.28}$$

On conclut donc que la matrice P appratient à l'algèbre $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$.

Remarque 4 *D'après le lemme ci dessus l'utilisation d'une ondelettes à support compact pour l'étude des algèbres $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$ est largement suffisante.*

.6 Théorème de Caractérisation des algèbres $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$

Nous nous limitons dans cette section au cas où $0 < \gamma \leq 1$ et $0 < \gamma' < 2\gamma$ et on note $\gamma^+ = \sup(\gamma, \gamma')$ et $\gamma^- = \inf(\gamma, \gamma')$, nous rappelons quelques notations necessaires pour la simplification des calculs.

Pour $\lambda = 2^{-j}(k + \frac{\epsilon}{2})$ avec $\epsilon \in \{0,1\}^n$ et $\epsilon \neq (0,\ldots,0)$, on désigne par $Q(\lambda)$ le cube dyadique définit par $Q(\lambda) = \{x \ / 2^j x - k \in [0,1[^n\}$ et il existe un entier m tel que le support de $\psi_\lambda(x) = 2^{\frac{nj}{2}}\psi(2^j x - k)$ soit inclus dans $mQ(\lambda)$ avec

$$mQ(\lambda) = x \ / 2^j x - k \in [-\frac{m+1}{2}, m + 2 + \frac{1}{2}[^n. \tag{.0.29}$$

Soit V un espace vectoriel tel que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset V \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ avec $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact, les deux injections ci dessus sont continues et d'image dense et V' est son dual.

Définition 8 *Nous définissons $\mathcal{A}_{\gamma,\gamma'}$ la classe d'opérateurs continus*

$$\begin{aligned}
T &: V \longrightarrow V' \\
Tf(x) &= \int K(x,y)\, f(y)\, dy
\end{aligned}$$

pour tout x n'appartenant pas au support de f, tel que le noyau $K(x,y)$ associé vérifie

$$|K(x,y)| \;\leq\; C_0\,|x-y|^{-n-|\gamma-\gamma'|} \tag{.0.30}$$

$$|K(x,y)-K(x'-y)| \;\leq\; \begin{cases} C_1|x-x'|^{\gamma^-}|x-y|^{-n-\gamma^+} & si \quad |x-y|\leq 1 \\ C_1|x-x'|^{\gamma^+}|x-y|^{-n-\gamma^-} & si \quad |x-y|>1 \ et \ |x-x'|>1 \\ C_1|x-x'|^{\gamma^-}|x-y|^{-n-\gamma^-} & si \quad |x-y|>1 \ et \ |x-x'|\leq 1 \end{cases}$$

$$si \quad |x-x'| \;\leq\; \frac{1}{2}\,|x-y| \tag{.0.31}$$

$$|K(x,y)-K(x-y')| \;\leq\; \begin{cases} C_1|y-y'|^{\gamma^-}|x-y|^{-n-\gamma^+} & si \quad |x-y|\leq 1 \\ C_1|y-y'|^{\gamma^+}|x-y|^{-n-\gamma^-} & si \quad |x-y|>1 \ et \ |y-y'|>1 \\ C_1|y-y'|^{\gamma^-}|x-y|^{-n-\gamma^-} & si \quad |x-y|>1 \ et \ |y-y'|\leq 1 \end{cases}$$

$$si \quad |y-y'| \;\leq\; \frac{1}{2}\,|x-y|. \tag{.0.32}$$

Théorème 1 *Si $0<\gamma'<2\gamma$ et $0<\gamma\leq 1$ et si $T\in\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$ alors $T\in\mathcal{A}_{\gamma,\gamma'}$ et $T(1) = {}^tT(1) = 0$.*

La démonstration de ce théorème est largement inspirée de celle utilisée dans [4] pour la caractérisation des algèbres de Lemarié et beaucoup de confirmations y sont empruntées. Nous allons développer les calculs dans le cas où $\gamma\leq\gamma'<2\gamma$, dans ce cas $\gamma^-=\gamma$ et $\gamma^+=\gamma'$.

Supposons que $T\in\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$, alors il existe une constante $C>0$ telle que

$$|T_{\lambda,\lambda'}| \;=\; |<T\psi_\lambda,\psi_{\lambda'}>| \;\leq\; C\;W_{\gamma,\gamma'}(\lambda,\lambda'), \tag{.0.33}$$

avec

$$W_{\gamma,\gamma'}(\lambda,\lambda') \;=\; \frac{2^{-(\frac{n}{2}+\gamma)\,|j-j'|}}{1+(j-j')^2}\,\frac{1}{(1+2^{\inf(j,j')}|\lambda-\lambda'|)^{n+\gamma'}}. \tag{.0.34}$$

D'après le lemme 6, la définition de $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$ ne dépend pas de la base d'ondelettes choisie, nous allons alors faire tous les calculs dans une base d'ondelettes à support compact et de régularité $r=1$.

On doit montrer que le noyau $K(x,y)$ associé à T vérifie les inégalités (.0.30)-(.0.32), seule l'inégalité (.0.31) sera établit éxplicitement, les deux autres se font d'une manière très similaire.

En effet, suivant la position de l'entier j par rapport à l'entier j', le noyau $K(x,y)$ se décompose de la manière suivante

$$K(x,y) \;=\; K_1(x,y) \;+\; K_2(x,y) \;+\; K_3(x,y)$$

où

$$K_1(x,y) \;=\; \sum_{(\lambda,\lambda' /\ (j'>j))} < T\psi_{\lambda'},\psi_\lambda > \psi_\lambda(x)\psi_{\lambda'}(y)$$

$$K_2(x,y) \;=\; \sum_{(\lambda,\lambda' /\ (j'=j))} < T\psi_{\lambda'},\psi_\lambda > \psi_\lambda(x)\psi_{\lambda'}(y)$$

et

$$K_3(x,y) \;=\; \sum_{(\lambda,\lambda' /\ (j'<j))} < T\psi_{\lambda'},\psi_\lambda > \psi_\lambda(x)\psi_{\lambda'}(y).$$

Il suffit de démontrer que chacune des quantités K_1, K_2 et K_3 vérifie (.0.32), nous donnons en détail la démonstration pour $K_1(x,y)$ et celles pour les deux autres en découlent trés facilement.

Soient j_0 et j_1 deux entiers tels que $2^{-j_0} \le |x-y| < 2^{-j_0+1}$ et $2^{-j_1} \le |y-y'| < 2^{-j_1+1}$, comme le triplet (x,y,y') est tel que $|y-y'| \le \frac{1}{2}|x-y|$ alors $j_0 < j_1$. On remarque que quatre possibilités sont envigeables pour la position des entiers j et j' par rapport aux entiers j_0 et j_1, on écrit alors

$$\begin{aligned}
|K_1(x,y) - K_1(x,y')| \;\le\; & \sum_{(\lambda,\lambda' /\ (j\le j_0, j<j'\le j_1))} |T_{\lambda,\lambda'}||\psi_\lambda(x)|\,|\psi_{\lambda'}(y)-\psi_{\lambda'}(y')| \\
& + \sum_{(\lambda,\lambda' /\ (j\le j_0, j'>j_1))} |T_{\lambda,\lambda'}||\psi_\lambda(x)|\,|\psi_{\lambda'}(y)-\psi_{\lambda'}(y')| \\
& + \sum_{(\lambda,\lambda' /\ (j_0<j<j'\le j_1))} |T_{\lambda,\lambda'}||\psi_\lambda(x)|\,|\psi_{\lambda'}(y)-\psi_{\lambda'}(y')| \\
& + \sum_{(\lambda,\lambda' /\ (j_0<j, j'>j_1))} |T_{\lambda,\lambda'}||\psi_\lambda(x)|\,|\psi_{\lambda'}(y)-\psi_{\lambda'}(y')|
\end{aligned}$$

La localisation des ondelettes nous permet d'oublier les sommes en $k \in \mathbb{Z}^n$ et $k' \in \mathbb{Z}^n$ puisque, pour x, y et y' fixés, ces sommes portent sur un ensemble de couples (k,k') de cardinalité uniformément bornée. Alors on garde seulement les sommes en $j \in \mathbb{Z}$ et en $j' \in \mathbb{Z}$, l'inégalité ci dessus devient

$$\left|K_1(x,y) - K_1(x,y')\right| \le \Sigma_1 \;+\; \Sigma_2 \;+\; \Sigma_3 \;+\; \Sigma_4, \tag{.0.35}$$

avec

$$\Sigma_1 \;=\; C \sum_{(j\le j_0,} \sum_{j'\le j_1)} W_{\gamma,\gamma'}(\lambda,\lambda')|\psi_\lambda(x)|\left|\psi_{\lambda'}(y)-\psi_{\lambda'}(y')\right|,$$

$$\Sigma_2 \;=\; C \sum_{(j\le j_0,} \sum_{j'> j_1)} W_{\gamma,\gamma'}(\lambda,\lambda')|\psi_\lambda(x)|\left|\psi_{\lambda'}(y)-\psi_{\lambda'}(y')\right|,$$

$$\Sigma_3 = C \sum_{(j>j_0,} \sum_{j'\le j_1)} W_{\gamma,\gamma'}(\lambda,\lambda')|\psi_\lambda(x)| \left|\psi_{\lambda'}(y) - \psi_{\lambda'}(y')\right|,$$

et

$$\Sigma_4 = C \sum_{(j>j_0,} \sum_{j'>j_1)} W_{\gamma,\gamma'}(\lambda,\lambda')|\psi_\lambda(x)| \left|\psi_{\lambda'}(y) - \psi_{\lambda'}(y')\right|.$$

où $W_{\gamma,\gamma'}(\lambda,\lambda')$ est donnée par (.0.34).

La première série Σ_1 porte sur les gros cubes $Q(\lambda)$ et les gros cubes $Q(\lambda')$, l'ondelette $\psi_{\lambda'}(y)$ est supposée de classe 1 alors il existe une constante $C > 0$ tel que

$$\left|\psi_{\lambda'}(y) - \psi_{\lambda'}(y')\right| \le C 2^{(\frac{n}{2}+1)j'}|y-y'|,$$

avec l'estimation (.0.34) nous déduisons que

$$\Sigma_1 \le |y-y'| \sum_{(j\le j_0,} \sum_{j'\le j_1)} 2^{(n+\gamma)j} 2^{(1-\gamma)j'} (1+|j-j'|^2)^{-1}. \tag{.0.36}$$

... Si $j_0 \ge 0$ nous avons

$$2^{(n+\gamma)j} \le 2^{(n+\gamma)j_0} \le C\, |x-y|^{-n-\gamma'} \tag{.0.37}$$

en faisant la somme en j' et comme

$$2^{(1-\gamma)j'} \le 2^{(1-\gamma)j_1} \le C\, |y-y'|^{\gamma-1} \tag{.0.38}$$

alors nous déduisons qu'il existe une constante $C_{11} > 0$ telle que la série Σ_1 vérifie

$$\Sigma_1 \;\le\; C_1\, |y-y'|^{\gamma}\, |x-y|^{-n-\gamma'}.$$

... Si $j_0 < 0$, ou bien $j_1 < 0$, dans ce cas puisque $1-\gamma > 0$ nous avons

$$2^{(1-\gamma)j'} \le 2^{(1-\gamma')j_1} \le C\, |y-y'|^{\gamma'-1} \tag{.0.39}$$

et comme

$$2^{(n+\gamma)j} \le 2^{(n+\gamma)j_0} \le C\, |x-y|^{-n-\gamma} \tag{.0.40}$$

alors il existe une constante $C_{12} > 0$ telle que la série Σ_1 vérifie

$$\Sigma_1 \;\le\; C\, |y-y'|^{\gamma'}\, |x-y|^{-n-\gamma}.$$

ou bien $j_1 \ge 0$, alors d'aprés (.0.38) et (.0.40) nous déduisons qu'il existe une constante $C_{13} > 0$ telle que

$$\Sigma_1 \;\le\; C\, |y-y'|^{\gamma}\, |x-y|^{-n-\gamma}.$$

Nous pouvons donc conclure qu'il existe trois constantes strictement positives C_{11}, C_{12}, C_{13} telles que

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &\le C_{11}\, |y-y'|^{\gamma}\, |x-y|^{-n-\gamma'} && \text{si } j_0 \ge 0 \\
\Sigma_1 &\le C_{12}\, |y-y'|^{\gamma'}\, |x-y|^{-n-\gamma} && \text{si } j_0 \le 0 \text{ et } j_1 \le 0 \\
\Sigma_1 &\le C_{13}\, |y-y'|^{\gamma}\, |x-y|^{-n-\gamma} && \text{si } j_0 \le 0 \text{ et } j_1 \ge 0.
\end{aligned} \tag{.0.41}$$

Pour la seconde série Σ_2, elle porte sur les gros cubes $Q(\lambda)$ et les petits cubes $Q(\lambda')$ puisque $j \leq j_0$ et $j' > j_1$. La régularité de $\psi_{\lambda'}$ n'apporte pas grande chose, puisqu'elle s'exprime en fonction du terme $|y-y'|$ qui est trés faible, on majore donc $\psi_{\lambda'}$ par $\|\psi_{\lambda'}\|_\infty$ et on a

$$\Sigma_2 \leq \sum_{(j \leq j_0,\ } \sum_{j' > j_1)} 2^{(n+\gamma)j} 2^{-\gamma j'} (1+|j-j'|^2)^{-1}. \tag{.0.42}$$

De la même manière que pour Σ_1 nous démontrons qu'ils existent $C_{21}, C_{22} et C_{33}$ telles que

$$\begin{aligned} \Sigma_2 &\leq C_{21}\, |y-y'|^\gamma\, |x-y|^{-n-\gamma'} && \text{si } j_0 \geq 0 \\ \Sigma_2 &\leq C_{22}\, |y-y'|^{\gamma'}\, |x-y|^{-n-\gamma} && \text{si } j_0 \leq 0 \text{ et } j_1 \leq 0 \\ \Sigma_2 &\leq C_{22}\, |y-y'|^{\gamma}\, |x-y|^{-n-\gamma} && \text{si } j_0 \leq 0 \text{ et } j_1 \geq 0 \end{aligned} \tag{.0.43}$$

Les deux dernières séries portent sur les petits cubes $Q(\lambda)$ et les petits cubes $Q(\lambda')$, ces derniers sont suffisament petit pour qu'ils soient loin l'un de l'autre, donc la valeur de $|x-y|$ est trés interessante. En utilisant (.0.34) et les mêmes arguments conçernant la régularité de $\psi_{\lambda'}(y)$ que nous avons explicités pour les series Σ_1 et Σ_2, nous obtenons

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &\leq |y-y'| \sum_{(j_0 < j,\ } \sum_{j' \leq j_1)} 2^{(n+\gamma)j} 2^{(1-\gamma)j'} (1+|j-j'|^2)^{-1} (1+2^j|\lambda-\lambda'|)^{-n-\gamma'} \\ &\leq |y-y'| \sum_{(j_0 < j,\ } \sum_{j' \leq j_1)} 2^{(n+\gamma)j} 2^{(1-\gamma)j'} (1+|j-j'|^2)^{-1} (1+|k-l|)^{-n-\gamma'}, \end{aligned} \tag{.0.44}$$

et

$$\begin{aligned} \Sigma_4 &\leq \sum_{(j_0 < j,\ } \sum_{j' > j_1)} 2^{(n+\gamma)j} 2^{\gamma j'} (1+|j-j'|^2)^{-1} (1+2^j|\lambda-\lambda'|)^{-n-\gamma'} \\ &\leq \sum_{(j_0 < j,\ } \sum_{j' > j_1)} 2^{(n+\gamma)j} 2^{\gamma j'} (1+|j-j'|^2)^{-1} (1+|k-l|)^{-n-\gamma'}, \end{aligned} \tag{.0.45}$$

avec l l'entier tel que $2^{-j'}k' \in Q(j,l)$.
Soit m un entier tel que $m \geq 1$ et le support de l'ondelette $\psi_\lambda = \psi_{j,k}$ soit inclus dans $mQ\lambda = mQ(j,k)$ (.0.29), et comme (j,k,l) sont reliés par les conditions $x \in mQ(j,k)$ et $y \in mQ(j,l)$ c'est à dire que

$$2^j x - k \in \left[-\tfrac{m}{2} + \tfrac{1}{2}, m + 2 + \tfrac{1}{2}\right[^n$$

$$2^j y - l \in \left[-\tfrac{m}{2} + \tfrac{1}{2}, m + 2 + \tfrac{1}{2}\right[^n,$$

alors nous avons facilement

$$2^j (1+|k-l|)^{-1} \leq |x-y|^{-1}.$$

... Si $j_0 \geq 0$, nous nous trouvons donc au voisinage de la diagonale, c'est à dire que $|x-y|<1$ et on a

$$\begin{aligned} 2^{(n+\gamma)j}(1+|k-l|)^{-n-\gamma'} &\leq 2^{(n+\gamma')j}(1+|k-l|)^{-n-\gamma'} \\ &\leq |x-y|^{-n-\gamma'} \end{aligned} \tag{.0.46}$$

et comme

$$2^{(1-\gamma)j'} \leq 2^{(1-\gamma)j'} \leq |y-y'|^{\gamma-1} \tag{.0.47}$$

alors pour la série Σ_3 donnée par (.0.44) il existe une constante $C>0$ telle que

$$\Sigma_3 \leq C_{31}|y-y'|^{\gamma}|x-y|^{-n-\gamma'}$$

Si $j_0 \leq 0$, nous sommes trés loin de la diagonale, où bien $j_1 \leq 0$ et dans ce cas nous avons

$$2^{(1-\gamma)j'} \leq 2^{(1-\gamma')j'} \leq |y-y'|^{\gamma'-1} \tag{.0.48}$$

et

$$\begin{aligned} 2^{(n+\gamma)j}(1+|k-l|)^{-n-\gamma'} &\leq 2^{(n+\gamma)j}(1+|k-l|)^{-n-\gamma}(1+|k-l|)^{\gamma-\gamma'} \\ &\leq |x-y|^{-n-\gamma} \end{aligned} \tag{.0.49}$$

donc la série Σ_3 vérifie

$$\Sigma_3 \leq C_{32}|y-y'|^{\gamma'}|x-y|^{-n-\gamma}$$

où bien $j_1 \geq 0$ alors de (.0.47) et (.0.49) nous avons

$$\Sigma_3 \leq C_{33}|y-y'|^{\gamma}|x-y|^{-n-\gamma}$$

Nous concluons donc qu'ils existent $C_{31}>0, C_{32}>0$ et $C_{33}>0$ telles que

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &\leq C_{31}\,|y-y'|^{\gamma}\,|x-y|^{-n-\gamma'} && \text{si } j_0 \geq 0 \\ \Sigma_3 &\leq C_{32}\,|y-y'|^{\gamma'}\,|x-y|^{-n-\gamma} && \text{si } j_0 \leq 0 \text{ et } j_1 \leq 0 \\ \Sigma_3 &\leq C_{32}\,|y-y'|^{\gamma}\,|x-y|^{-n-\gamma} && \text{si } j_0 \leq 0 \text{ et } j_1 \geq 0 \end{aligned} \tag{.0.50}$$

En faisant le même travail pour la série Σ_4 nous obtenons l'existence de quatres constantes $C_{41}>0, C_{42}>0$ et $C_{43}>0$ telles que

$$\begin{aligned} \Sigma_4 &\leq C_{41}\,|y-y'|^{\gamma}\,|x-y|^{-n-\gamma'} && \text{si } j_0 \geq 0 \\ \Sigma_4 &\leq C_{42}\,|y-y'|^{\gamma'}\,|x-y|^{-n-\gamma} && \text{si } j_0 \leq 0 \text{ et } j_1 \leq 0 \\ \Sigma_4 &\leq C_{42}\,|y-y'|^{\gamma}\,|x-y|^{-n-\gamma} && \text{si } j_0 \leq 0 \text{ et } j_1 \geq 0 \end{aligned} \tag{.0.51}$$

De (.0.41), (.0.43), (.0.50) et (.0.51) nous déduisons que K_1 vérifie l'inégalité (.0.32).

Il reste à démontrer que $T(1) = {}^tT(1) = 0$, en effet, si $\gamma \leq \gamma'$ l'algèbre $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$ est inclus dans l'algèbre $\mathcal{M}_\gamma$(respectivemnt si $\gamma \geq \gamma'$ l'algèbre $\mathcal{M}_{\gamma,\gamma'}$ est inclus dans l'algèbre $\mathcal{M}'_\gamma$), or d'après [4], tout opérateur T dont la matrice représentative dans une base d'ondelettes est un élément de $\mathcal{M}_\gamma$(respectivement $\mathcal{M}'_\gamma$) vérifie $T(1) = {}^tT(1) = 0$. Par ceci nous terminons la démonstration du théorème.

Références

[1] S. JAFFARD. *Construction et propriétés de bases d'ondelettes. remarques sur la contrôlabilité exacte.* PhD thesis, Ecole polytechnique, 1989.

[2] P. G. LEMARIE. PhD thesis, Université d'Orsay, 1985.

[3] Y. MEYER. *Ondelettes et opérateurs 1.* Hermann, 1990.

[4] Y. MEYER. *Ondelettes et opérateurs 2.* Actualités mathématiques. Hermann, 1990.