

Fonctions d'échelles et nouvelles notions de moments

A. Ezzine¹

.1 Introduction

Dans ce travail on présente de nouvelles notions de moments de la fonction d'échelle ϕ associée à une analyse de multirésolution. On commence par un rappel des ondelettes et de la notion d'analyse de multirésolution. Ces deux notions constituent à elles seules l'essentiel de la théorie des ondelettes largement explicités dans beaucoup d'ouvrages, on cite ici quelques uns qui ont été la principale référence [11], [4]. On donne la définition d'une analyse de multirésolution, de la fonction d'échelle et d'une ondelette; quelques propriétés liées à la notion de bases d'ondelettes vont être explicitées et des exemples d'ondelettes vont être dressés.

Ensuite, après le rappel des moments ordinaires $\mathcal{M}_i = \int x^i \phi(x) dx$ et un algorithme nécessaire pour leurs calculs [7] [9]. On définit trois nouvelles notions de moments en donnant les algorithmes de calcul ainsi que des résultats obtenus après implémentation.

.2 Analyse de multirésolution et fonction d'échelle

Nous allons rappeler ici la manière pour définir la transformée d'ondelette discrète. Il s'agit de la notion d'*analyse de multirésolution* introduite par Y. Meyer et S. Mallat [11], [10]:

Définition 1 Une analyse de multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$, qu'on note AMR, c'est la donnée d'une suite de sous espaces fermés emboîtés $V_j \in L^2(\mathbb{R}), j \in \mathbb{Z}$ vérifiant:

- (i) $V_j \subset V_{j+1}$
- (ii) $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$,
- (iii) $f(x) \in V_0 \iff f(x+k) \in V_0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- (vi) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ et $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$,
- (v) $\exists \phi \in V_0$ telle que $\int \phi(t) dt \neq 0$ et la famille des fonctions $\phi(x-k), k \in \mathbb{Z}$ forme une base de Riesz de V_0 .

Puisque la fonction $\phi \in V_0$ et $V_0 \subset V_1$ alors il existe une suite $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2x - k) \quad (.0.1)$$

On appellera cette équation tout le long de ce travail l'*équation d'échelle*, d'autres nominations sont possibles dans d'autres ouvrages telles que l'équation de dilatation, l'équation de raffinement etc. La fonction ϕ est appelée *fonction d'échelle*.

1. Cermics, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Central 2, La Courtine, 93167 Noisy le Grand.

En intégrant l'équation (.0.1) et comme la fonction d'échelle ϕ est telle que $\int \phi(t)dt \neq 0$ alors on déduit que la suite $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ vérifie :

$$\sum_k h_k = \sqrt{2}. \quad (.0.2)$$

La fonction d'échelle ϕ est complètement déterminées par l'équation (.0.1) et la condition de normalisation $\int \phi(t)dt = 1$. Pour sa construction il suffit de se donner une suite $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ vérifiant (.0.2) et l'algorithme en cascade qui est essentiellement basé sur l'équation (.0.1) donne les valeurs de ϕ aux points dyadique [4, 1, 6, 12, 2]. D'une manière générale la connaissance de la forme analytique de la fonction d'échelle n'est nullement obligatoire, seules la donnée de l'équation (.0.1) et la connaissance des moments de ϕ sont suffisantes pour tout éventuel calcul et nous verrons tout cela dans la suite de ce travail.

L'espace V_j engendré par la famille $\phi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j x - k)$ servira à approximer les fonctions, en calculant les projections de celles ci sur V_j . Comme $L^2(\mathbb{R}) = \cup_{j \in \mathbb{Z}} \bar{V}_j$ alors toute fonction élément de $L^2(\mathbb{R})$ peut être approximé en calculant ses projections. Pour pouvoir approximer les fonctions constantes il faut supposer que la fonction d'échelle et ses translatés forment une partition de l'unité :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(x - k) = 1 \quad (.0.3)$$

Par passage aux transformées de Fourier (.0.3) devient

$$\hat{\phi}(k2\pi) = \delta_k \quad k \in \mathbb{Z}$$

et (.0.1) donne :

$$\hat{\phi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (.0.4)$$

où m_0 est une fonction 2π -périodique définie par

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k e^{-ik\xi}. \quad (.0.5)$$

Comme

$$\hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = m_0\left(\frac{\xi}{2^2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2^2}\right)$$

et en répétant cette opération une infinité de fois alors on obtient :

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi). \quad (.0.6)$$

La convergence de ce produit est utidiée dans [4, 6, 3].

Comme exemple célèbre de fonctions d'échelles on donne les B-splines qui sont définies de la manière suivante : On note $S_1 = \chi_{[0,1]}$ la fonction indicatrice sur l'intervalle $[0, 1]$, pour $m \in \mathbb{N}^*$ la B-spline d'ordre m notée S_m est définie récursivement par une convolution $S_m = S_{m-1} * S_1$ et on l'équation suivante

$$s_m(x) = 2^{m-1} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} S_m(2x - k). \quad (.0.7)$$

.3 Ondelette

Soit W_j l'espace complémentaire de V_j dans V_{j+1} , la définition d'un tel espace qui n'est pas essentiellement unique nous permet d'avoir la décomposition suivante

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus W_j. \quad (.0.8)$$

L'espace W_j par sa définition contient l'information manquante lors du passage de V_j à V_{j+1} , pour cela on le nomme l'espace des détails à l'échelle j .

On appelle *ondelette* la fonction ψ telle que la famille $(\psi(x - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base de Reisz de W_0 . Par définition de l'analyse de multirésolution on montre que $(\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base de Reisz de W_j et d'après (.0.8) nous déduisons que la collection des fonctions $(\psi_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}^2)$ est une base de Reisz de $L^2(\mathbb{R})$.

Comme $W_0 \subset V_1$ alors en écrivant l'ondelette ψ dans la base $(\phi(x - k))_{k \in \mathbb{Z}}$, il existe une suite $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{2M-1} g_n \phi(2x - n) \quad (.0.9)$$

qui s'écrit aussi

$$\hat{\phi}(\xi) = m_1\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right), \quad (.0.10)$$

avec

$$m_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k g_k e^{-ik\xi}. \quad (.0.11)$$

.4 Bases orthogonales

C'est le cas de bases d'ondelettes qui nous intéresse le plus dans ce travail et ceci grâce à la facilité de sa manipulation dans les calculs. On définit une fonction d'échelle orthogonale la fonction ϕ telle que la famille $(\phi(x - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ devient une base orthogonale de V_0 . Donc

$$\int \phi(t) \phi(t - k) = \delta_{0k}$$

ou alors

$$w(\xi) = \sum |\hat{\phi}(\xi + k2\pi)|^2 = 1, \quad (.0.12)$$

avec (.0.4) on obtient alors

$$\begin{aligned} w(2\xi) &= \sum |m_0(\xi)|^2 |\hat{\phi}(\xi + k\pi)|^2 \\ &= |m_0(\xi)|^2 w(\xi) + |m_0(\xi + \pi)|^2 w(\xi + \pi). \end{aligned}$$

comme $w(\xi) = 1$ alors on a

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1, \quad (.0.13)$$

et de l'écriture (.0.5) de la fonction m_0 (.0.13) nous donne

$$\sum_k h_k h_{k-2l} = \delta_l. \quad (.0.14)$$

De même que pour la fonction ϕ , l'ondelette ψ est dite orthogonale si la famille $(\psi(x-k))_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base orthogonale de W_0 , alors

$$\int \psi(t)\psi(t-k) = \delta_{0k}$$

ce qui nous amène, de la même manière que pour la fonction ϕ , à conclure que la fonction m_1 donnée par (.0.11) vérifie une équation similaire à (.0.13) à savoir

$$|m_1(\xi)|^2 + |m_1(\xi + \pi)|^2 = 1. \quad (.0.15)$$

Comme $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus W_j$ et les fonctions $\psi_{j,k}$ sont orthogonales deux à deux alors la famille $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}^2}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

On définit maintenant une analyse de multirésolution orthogonale, il s'agit d'une AMR telle que l'espace W_j est défini comme le complémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1} et après définition de l'AMR on remarque que seule la condition $W_0 \perp V_0$ est suffisante pour que l'AMR soit orthogonale. Or $W_0 \perp V_0$ revient à écrire

$$\int \psi(t)\phi(t-k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

qui s'écrit par la formule de Poisson comme

$$\sum \hat{\psi}(\xi + k2\pi)\hat{\phi}(\xi + k2\pi) = 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (.0.16)$$

Avec (.0.4) et 2.1b l'égalité (.0.13) ci dessus nous donne

$$m_1(\xi)m_0(\bar{\xi}) + m_1(\xi + \pi)m_0(\bar{\xi} + \pi) = 0 \quad (.0.17)$$

on déduit alors qu'elle existe une fonction g , 2π -périodique vérifiant $g(\xi + \pi) = -g(\xi)$ telle que [5]

$$m_1(\xi) = g(\xi)m_0(\bar{\xi} + \pi). \quad (.0.18)$$

Lemme 1 Si $|g(\xi)| = 1$ alors ϕ orthogonale $\implies \psi$ orthogonale.

En effet, si ϕ est orthogonale alors on a (.0.13), en remplaçant m_1 par sa valeur donnée par (.0.18) dans le calcul de $|m_1(\xi)|^2 + |m_1(\xi + \pi)|^2$ et avec l'hypothèse $|g(\xi)| = 1$ on obtient (.0.15).

D'un point de vue numérique il serait très intéressant que la fonction d'échelle ϕ et l'ondelette ψ aient des supports compacts, ceci a lieu dans le cas où les filtres m_0 et m_1 sont des polynômes trigonométriques c'est à dire que m_0 et m_1 tels qu'ils sont définis respectivement par (.0.5) et (.0.11) sont finis, dans ce cas, de (.0.18) on déduit donc que la fonction g est un polynôme trigonométrique.

On conclut donc que si on veut avoir une base d'ondelettes orthogonale à support compact, il faut choisir la fonction g de (.0.18) comme un polynome trigonometrique vérifiant $|g(\xi)| = 1$ et $g(\xi + \pi) = -g(\xi)$. Le choix standard pour la fonction g est $g(\xi) = -e^{-i\xi}$ [5]. Dans ce cas les suites $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sont finies, seuls les éléments h_k et g_k associés à $k = 0, \dots, N-1$, sont non nuls. $N = 2M$ où $M \in \mathbb{N}^*$ et représente le nombre de moments nuls de la fonction d'échelle ϕ . L'équation d'échelle s'écrit donc

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \phi(2x - k) \quad (.0.19)$$

les suites h_k et g_k sont reliées par

$$g_k = (-1)^k h_{1-k}^- \quad (.0.20)$$

Nous citons les bases d'ondelettes de Daubechies comme meilleur exemple pour les ondelettes orthogonales à support compact et on dresse ci dessous un tableau contenant quelques exemples de suites h_k , et par l'algorithme en cascade on représente les fonctions ϕ_M d'échelle correspondantes.

Remarque 1 – *On peut aussi construire une base orthogonale à partir d'une base de Reisz en considérant la fonction d'échelle ϕ^\perp telle que*

$$\hat{\phi}^\perp(x) = \frac{\hat{\phi}(\xi)}{w(\xi)},$$

où $w(\xi)$ est donnée par (.0.12).

– *Beylkin,coifman et Rokhlin dans[8] et I.Daubechies dans [5] ont construit des bases d'ondelettes symétriques dont la fonction d'échelle vérifie pour un entier τ_M :*

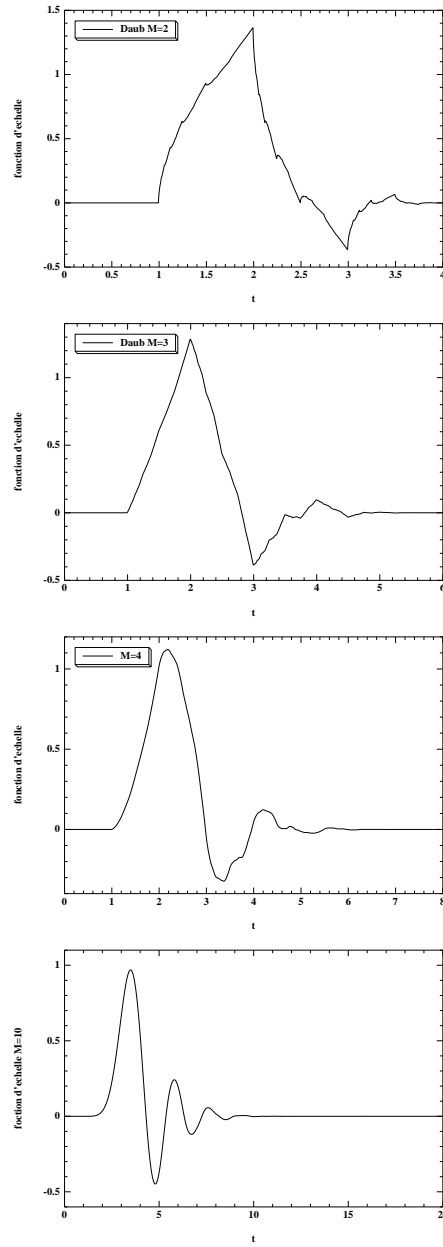
$$\int x^i \varphi(x + \tau_M) dx = 0, \quad i = 1, \dots, M-1 \quad (.0.21)$$

on les a appelés "coiflets". Nous représentons ci dessous quelques exemples de coiflets, elles correspondent aux filtres $(h_i)_{i=0, \dots, 3M-1}$ vérifiant $\sum_{i=0}^{3M-1} h_i = \sqrt{2}$ donnés par le tableau ci après.

| M | i | h_i | M | i | h_i |
|-----|--------------------|---------------------|----------------|------------------|-----------------|
| 2 | 0 | 0.4829629131445341 | 2 | -2 | -0.051429728471 |
| | 1 | 0.8365163037378077 | | -1 | 0.238929728471 |
| | 2 | 0.2241438680420134 | | 0 | 0.602859456942 |
| | 3 | -0.129409525512603 | | 1 | 0.272140543058 |
| 3 | 0 | 0.3326705529500825 | 2 | 2 | -0.051429972847 |
| | 1 | 0.8068915093110924 | | 3 | -0.011070271529 |
| | 2 | 0.4598775021184914 | | 4 | -4 |
| | 3 | -0.1350110200102546 | -3 | | -0.029320137980 |
| | 4 | -0.0854412738820267 | -2 | | -0.047639590310 |
| 5 | 0.0352262918857095 | -1 | 0.273021046535 | | |
| 4 | 0 | 0.2303778133088964 | 0 | 0.574682393857 | |
| | 1 | 0.7148465705529154 | 1 | 0.294867193696 | |
| | 2 | 0.6308807679398587 | 2 | -0.054085607092 | |
| | 3 | -0.0279837694168599 | 3 | -0.042026480461 | |
| | 4 | -0.1870348117190931 | 4 | 0.016744410163 | |
| | 5 | 0.0308413818355607 | 5 | 0.003967883613 | |
| | 6 | 0.0328830116668852 | 6 | -0.001289203356 | |
| | 7 | -0.0105974017850690 | 7 | -0.000509505399 | |
| 10 | 0 | 0.02667006 | 6 | -6 | -0.002682418671 |
| | 1 | 0.18817680 | | -5 | 0.005503126709 |
| | 2 | 0.52720119 | | -4 | 0.016583560479 |
| | 3 | 0.68845904 | | -3 | -0.046507764479 |
| | 4 | 0.28117234 | | -2 | -0.043220763560 |
| | 5 | -0.24984642 | | -1 | 0.286503335274 |
| | 6 | -0.19594627 | | 0 | 0.56128525687 |
| | 7 | 0.12736934 | | 1 | 0.302983571773 |
| | 8 | 0.09305736 | | 2 | -0.050770140755 |
| | 9 | -0.07139415 | | 3 | -0.058196250762 |
| | 10 | -0.02945754 | | 4 | 0.024434094321 |
| | 11 | 0.03321267 | 5 | 0.011229240962 | |
| | 12 | 0.00360655 | 6 | -0.0063696601011 | |
| | 13 | -0.01073318 | 7 | -0.001820458916 | |
| | 14 | 0.00139535 | 8 | 0.000790205101 | |
| | 15 | 0.00199241 | 9 | 0.000329665174 | |
| | 16 | -0.00068586 | 10 | -0.000050192775 | |
| | 17 | -0.00011647 | 11 | -0.000024465734 | |
| | 18 | 0.00009359 | | | |
| 19 | -0.00001326 | | | | |

Le tableau à gauche donne les filtres de longueur $L = 2M$ associés aux fonctions d'échelle de Daubechies pour $M = 2, 3, 4, 10$ représentées dans la figure (FIG 1.1). Et celui de droite donne les filtres de longueur $L = 3M$ associés aux coiflets pour $M = 2, 4, 6$ représentées dans la figure (FIG 1.2) .

daubechies



coiflets

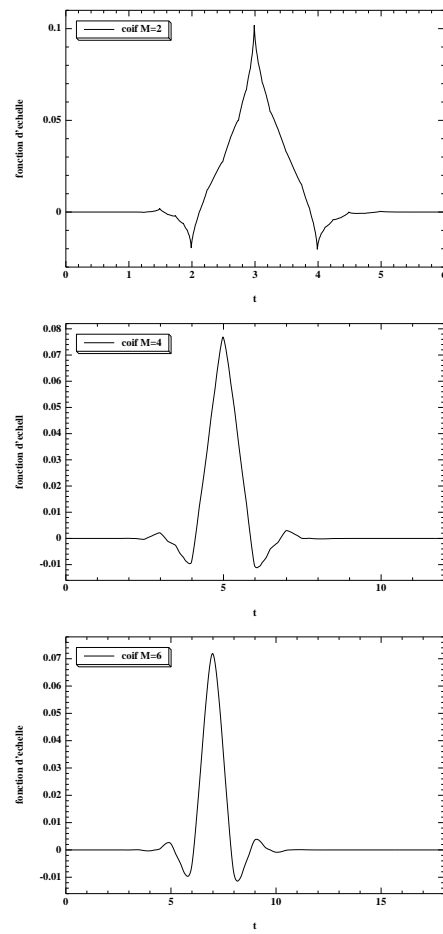


FIG. 1 – Quelques exemples de fonctions d'echelle correspondantes aux coiflets (la colonne à droite), aux ondelettes d'I. Daubechies (la colonne à gauche), on remarque bien la différence des supports pour la même nombre de moments nuls M

.5 Nouvelles notions de moment

.5.1 Moments ordinaires : Rappels.

L'équation d'échelle (.0.19) donne accès aux valeurs de $\mathcal{M}_k = \int x^k \phi(x) dx$ par un calcul récurrent très simple (ϕ est normalisée au sens où $\mathcal{M}_0 = 1$). On trouvera dans [7, 9] une généralisation de ce résultat au calcul d'intégrales de produits de fonctions d'échelle quelconques et on rappelle ici les grandes lignes de la méthode. Puisque

$$\phi(x) = \int e^{2\pi i x \xi} \hat{\phi}(\xi) d\xi$$

alors, nous avons

$$\int y^k \phi(y) dy = (2\pi)^{-k} (-i)^k \frac{d^k}{d\xi^k} \hat{\phi} \Big|_{\xi=0}$$

or $\hat{\phi}(\xi) = m_0(\xi/2) \hat{\phi}(\xi/2)$ et $\hat{\phi}(0) = 1$, les dérivées de la transformée de Fourier de ϕ s'expriment donc par

$$\begin{aligned} \hat{\phi}^{(k)}(0) &= 2^{-k} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} \hat{m}_0^{(k-l)}(0) \hat{\phi}^{(l)}(0) \\ \Rightarrow \hat{\phi}^{(k)}(0) &= \frac{2^{-k}}{1-2^{-k}} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} \hat{m}_0^{(k-l)}(0) \hat{\phi}^{(l)}(0). \end{aligned}$$

on déduit donc la formule récurrente suivante :

$$\mathcal{M}_p = \int x^p \phi(x) dx = \frac{1}{2^p - 1} \sum_{i=1}^p \binom{p}{i} m_i \mathcal{M}_{p-i}, \quad p = 1, \dots, M-1 \quad (.0.22)$$

avec:

$$m_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{2M-1} h_n n^i, \quad i = 0, \dots, M-1 \quad (.0.23)$$

| k | 2 | 3 | 4 | 10 |
|-----|-----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 0 | 1.000000000000e + 00 | 1.000000000000e + 00 | 1.000000000000e + 00 | 1.000000000000e + 00 |
| 1 | 6.33974589933e - 01 | 8.17401167810e - 01 | 1.00539321345e + 00 | 2.13096815090e + 00 |
| 2 | 4.01923777054e - 01 | 6.68144669138e - 01 | 1.01081551366e + 00 | 4.54102506925e + 00 |
| 3 | 1.31091538279e - 01 | 4.45460044913e - 01 | 9.07360367246e - 01 | 9.48102536203e + 00 |
| 4 | -3.021933565909e - 01 | 1.17226347006e - 01 | 5.83771813559e - 01 | 1.89523308966e + 01 |
| 5 | -1.06587285311e + 00 | -4.66510905905e - 02 | 6.30775241167e - 02 | 3.51965767186e + 01 |
| 6 | -2.41783035039e + 00 | 1.47354534090e + 00 | -2.37749435288e - 01 | 5.79706852707e + 01 |
| 7 | -4.72791240031e + 00 | 1.06728808683e + 01 | -8.17841787095e - 01 | 7.73198936849e + 01 |
| 8 | -8.40765539856e + 00 | 4.83009119195e + 01 | -1.93803883128e + 01 | 6.27949381259e + 01 |
| 9 | -1.35142662601e + 01 | 1.81428345214e + 02 | -2.00465275763e + 02 | -3.19994591376e + 01 |
| 10 | -1.83643342457e + 01 | 6.18393596591e + 02 | -1.41963579680e + 03 | -1.74246743690e + 02 |
| 11 | -1.53776342745e + 01 | 1.99271425928e + 03 | -8.2882077421e + 03 | 2.40126302022e + 02 |
| 12 | 2.04356970442e + 01 | 6.22212460107e + 03 | -4.31895504389e + 04 | 5.64479845086e + 03 |
| 13 | 1.61829096057e + 02 | 1.91965612611e + 04 | -2.09155395696e + 05 | 5.63022897337e + 04 |
| 14 | 6.06578724845e + 02 | 5.96783414894e + 04 | -9.63160743437e + 05 | 5.83083824579e + 05 |
| 15 | 1.86869717660e + 03 | 1.90992051157e + 05 | -4.27642693954e + 06 | 6.29455519619e + 06 |
| 16 | 5.24015829499e + 03 | 6.42498534549e + 05 | -1.84588983269e + 07 | 6.74617660910e + 07 |
| 17 | 1.38794605619e + 04 | 2.30398604919e + 06 | -7.77703878158e + 07 | 7.18420399087e + 08 |
| 18 | 3.53132056092e + 04 | 8.81860374050e + 06 | -3.19712788478e + 08 | 7.73770563290e + 09 |

Tableau 2: Les moments $\mathcal{M}_k, k = 0, \dots, 18$ pour les fonctions d'échelles associées aux ondelettes de Daubechies dont le nombre de moments nuls est $M = 2, 3, 4$ et 10.

.5.2 Moment fractionnaire

Définition 2 Soient ϕ la fonction d'échelle associé à une **AMR** de Daubechies, α un réel tel que $0 < |\alpha| \leq 1$, nous appelons moment fractionnaire de type α de ϕ la quantité

$$\mathcal{M}_\alpha = \int |x|^\alpha \phi(x) dx, \quad (.0.24)$$

Algorithme de calcul La méthode numérique de calcul de \mathcal{M}_α que nous expliciterons ci dessous est issue d'une discussion avec I.Daubechies et consiste à calculer d'abord les éléments de la suite $\mathcal{M}_{\alpha,p} = \int |x|^\alpha \phi(x-p) dx$. Le terme $\mathcal{M}_{\alpha,0}$ correspond à ce qu'on cherche.

Nous allons calculer tout les éléments $\mathcal{M}_{\alpha,p}$ en même temps. Comme la fonction d'échelle ϕ a son support compact dans l'intervalle $I = [0, 2M-1]$ alors le support de la fonction translatée $\phi(\cdot - p)$ est dans $I' = [p, 2M-1+p]$, on note $I_M = [-(2M-1), 0]$. Deux cas sont à envisager pour la position de p par rapport à I_M :

1. Si $p \notin I_M$, la fonction $h(x) = |x|^\alpha$ est C^∞ sur le support de $\phi(\cdot - p)$ et l'intégrale $\int |x|^\alpha \phi(x-p) dx$ peut être approchée arbitrairement en remplaçant $h(x)$ par sa série de Taylor autour de p tronquée à L termes ,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\alpha,p} &\simeq \int \sum_{k=0}^L \frac{1}{k!} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-L+1) p^{\alpha-k} (x-p)^k \phi(x-p) dx \\ &\simeq \sum_{k=0}^L \frac{1}{k!} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-L+1) p^{\alpha-k} \int (x-p)^k \phi(x-p) dx \\ &\simeq \sum_{k=0}^L \frac{1}{k!} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-L+1) p^{\alpha-k} \mathcal{M}_k, \end{aligned} \quad (.0.25)$$

où \mathcal{M}_k est donné par (.0.22) pour $k = 0, \dots, L$.

2. Si $p \in I_M$ c'est à dire que $p \leq 0$ et $|p| \leq 2M-1$, par l'équation d'échelle (.0.1) nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\alpha,p} &= \int |x|^\alpha \phi(x-p) dx \\ &= \sqrt{2} \sum_m h_m \int |x|^\alpha \phi(2x-2p-m) dx \\ &= 2^{-(\alpha+\frac{1}{2})} \sum_{m=0}^{2M-1} h_m \mathcal{M}_{\alpha,2p+m} \end{aligned} \quad (.0.26)$$

et nous déduisons le système linéaire suivant à $2M$ équations

$$2^{(\alpha+\frac{1}{2})} \mathcal{M}_{\alpha,p} - \sum_{\substack{m=0 \\ 2p+m \in I_M}}^{2M-1} h_m \mathcal{M}_{\alpha,2p+m} = \sum_{\substack{m=0 \\ 2p+m \notin I_M}}^{2M-1} h_m \mathcal{M}_{\alpha,2p+m}, \quad (.0.27)$$

pour $p = -(2M - 1), \dots, 0$ et $2M$ inconnues $\mathcal{M}_{\alpha,i}, i = -2M + 1, \dots, 0$.

Finalement la valeur de $\mathcal{M}_{\alpha,0}$ obtenue en résolvant le système $(2M, 2M)$ (.0.27) est la quantité \mathcal{M}_α recherchée.

.5.3 Moment logarithmique

Définition 3 Nous appelons moment logarithmique de ϕ la quantité

$$\mathcal{L} = \int \log |t| \phi(t) dt.$$

Nous allons utiliser la même idée de calcul des moments fractionnaires pour calculer le moment logarithmique. Pour $p \in \mathbb{Z}$, on note

$$\mathcal{L}_p = \int \log |t| \phi(t - p) dt$$

Avec les mêmes notations que le paragraphe ci dessus $I = [0, 2M - 1]$ est le support de ϕ , $I' = [p, 2M - 1 + p]$ est le support $\phi(\cdot - p)$, on note $I_M = [-(2M - 1), 0]$. Deux possibilités sont à envisager pour la position de p ; par rapport à I_M . Si $p \notin I_M$, la fonction $h(x) = \log |x|$ est C^∞ sur le support de $\phi(\cdot - p)$ et l'intégrale $\int \log |x| \phi(x - n) dx$ peut être approchée arbitrairement en remplaçant $\log |x|$ par sa série de Taylor autour de p tronquée à L termes. Si $p \in I_M$ alors par l'équation d'échelle nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p &= \sqrt{2} \sum_m h_m \int \log |x| \phi(2x - 2p - m) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_m h_m \int \log \frac{|x|}{2} \phi(x - 2p - m) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_m h_m \int \log |x| \phi(x - 2p - m) dx - \frac{\log 2}{\sqrt{2}} \sum_m h_m \int \phi(x - 2p - m) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m=0}^{2M-1} h_m \mathcal{L}_{2p+m} - \log 2 \end{aligned}$$

Nous déduisons le système linéaire suivant à $2M$ équations

$$\sqrt{2}\mathcal{L}_p - \sum_{\substack{m=0 \\ 2p+m \in I_M}}^{2M-1} h_m \mathcal{L}_{2p+m} = \sum_{\substack{m=0 \\ 2p+m \notin I_M}}^{2M-1} h_m \mathcal{L}_{2p+m} - \sqrt{2} \log 2. \quad (.0.28)$$

pour $p = -(2M - 1), \dots, 0$ et $2M$ inconnues $\mathcal{L}_i, i = -2M + 1, \dots, 0$.

Finalement la valeur de \mathcal{L}_0 obtenue en résolvant le système $(2M, 2M)$ (.0.28) est la quantité \mathcal{L} recherchée.

.5.4 Moment tronqué

Définition 4 Soit $c \in \mathbb{R}$, nous appellerons moment tronqué à gauche et moment tronqué à droite de la fonction d'échelle ϕ respectivement les quantités

$$\mathcal{G}_i = \int_0^c t^i \phi(t) dt, \quad (.0.29)$$

$$\mathcal{D}_i = \int_c^{2M-1} t^i \phi(t) dt. \quad (.0.30)$$

Nous supposons que le point c est dans le support de la fonction d'échelle ϕ car le cas contraire est sans intérêt. En utilisant l'équation d'échelle (.0.1) nous allons donner une méthode pour calculer simultanément \mathcal{G}_i et \mathcal{D}_i . En effet

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sqrt{2} \sum_{m=0}^{2M-1} h_m \phi(2t - m) \\ &= \sqrt{2} \sum_{\substack{m=0 \\ m \in K_1^+}} h_m \phi(2t - m) + \sqrt{2} \sum_{m \in K_1^-} h_m \phi(2t - m) \\ &+ \sqrt{2} \sum_{m \in K_1^c} h_m \phi(2t - m), \end{aligned}$$

où

$$K_1^+ = \{m = 0, \dots, 2M - 1 \mid \text{supp}(\phi(2t - m)) \subset [c, 2M - 1]\},$$

$$K_1^- = \{m = 0, \dots, 2M - 1 \mid \text{supp}(\phi(2t - m)) \subset [0, c]\}$$

$$\text{et } K_1^c = \{m = 0, \dots, 2M - 1 \mid c \in \text{supp}(\phi(2t - m))\}.$$

En répétant la procédure pour tout $m \in K_1^c$ jusqu'à l'échelle n nous montrons qu'il existe des suites réelles $a_{jm}^+, a_{jm}^-, a_{jm}^c$ telles que

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sum_{j=1}^n \sum_{m \in K_j^+} a_{jm}^+ \phi(2^j t - m) + \sum_{j=1}^n \sum_{m \in K_j^-} a_{jm}^- \phi(2^j t - m) \\ &+ \sum_{m \in K_n^c} a_{jm}^c \phi(2^n t - m). \end{aligned} \quad (.0.31)$$

En injectant (.0.31) dans (.0.29) et (.0.30) nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_i &= \sum_{j=1}^n \sum_{m \in K_j^-} a_{jm}^- \int_0^c t^i \phi(2^j t - m) dt, \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{m \in K_j^-} a_{jm}^- 2^{-j(1+i)} M_{i,m}, \end{aligned} \quad (.0.32)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_i &= \sum_{j=1}^n \sum_{m \in K_1^+} a_{jm}^+ \int_c^{2M-1} t^i \phi(2^j t - m) dt \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{m \in K_1^+} a_{jm}^+ 2^{-j(1+i)} M_{i,m}.
\end{aligned} \tag{.0.33}$$

où $M_{i,m} = \int (t - m)^i \phi(t) dt$ est le moment *shifté* de ϕ . Voici quelques exemples de calcul de ce type de moments .

| <i>Daubechies, M = 4</i> $c = 4.5e + 00$ $\epsilon = 3.90625e - 03$ | | | | |
|--|----------------------|----------------------|---------------------------------|----------------------|
| i | \mathcal{D}_i | \mathcal{G}_i | $\mathcal{D}_i + \mathcal{G}_i$ | \mathcal{M}_i |
| 0 | 2.131315598037e - 03 | 9.978597040851e - 01 | 9.999910196831e - 01 | 1.000000000000e + 00 |
| 1 | 9.785585253102e - 03 | 9.955671143100e - 01 | 1.005352699563e + 00 | 1.005393213457e + 00 |
| 2 | 4.487546232415e - 02 | 9.657572802786e - 01 | 1.010632742602e + 00 | 1.010815513666e + 00 |
| 3 | 2.055201340664e - 01 | 7.010157110371e - 01 | 9.065358451035e - 01 | 9.073603672468e - 01 |
| <i>Daubechies, M = 4</i> $c = 4.5e + 00$ $\epsilon = 9.765625e - 04$ | | | | |
| i | \mathcal{D}_i | \mathcal{G}_i | $\mathcal{D}_i + \mathcal{G}_i$ | \mathcal{M}_i |
| 0 | 2.135108647771e - 03 | 9.978583115872e - 01 | 9.999934202349e - 01 | 1.000000000000e + 00 |
| 1 | 9.802657292934e - 03 | 9.955609568280e - 01 | 1.005363614121e + 00 | 1.005393213457e + 00 |
| 2 | 4.495230141984e - 02 | 9.657300585366e - 01 | 1.010682359956e + 00 | 1.010815513666e + 00 |
| 3 | 2.058659770954e - 01 | 7.008953932274e - 01 | 9.067613703228e - 01 | 9.073603672468e - 01 |
| <i>Daubechies, M = 3</i> $c = 5e - 01$ $\epsilon = 2.470355e - 04$ | | | | |
| i | \mathcal{D}_i | \mathcal{G}_i | $\mathcal{D}_i + \mathcal{G}_i$ | \mathcal{M}_i |
| 0 | 8.588096648135e - 01 | 1.411903351865e - 01 | 9.999999999999e - 01 | 1.000000000000e + 00 |
| 1 | 7.696369014765e - 01 | 4.776426633438e - 02 | 8.174011678108e - 01 | 8.174011678108e - 01 |
| 2 | 6.500886531007e - 01 | 1.805601603783e - 02 | 6.681446691386e - 01 | 6.681446691385e - 01 |
| 3 | 4.381991035131e - 01 | 7.260941400228e - 03 | 4.454600449133e - 01 | 4.454600449133e - 01 |
| <i>Daubechies, M = 3</i> $c = 5e - 01$ $\epsilon = 39.0625e - 04$ | | | | |
| i | \mathcal{D}_i | \mathcal{G}_i | $\mathcal{D}_i + \mathcal{G}_i$ | \mathcal{M}_i |
| 0 | 8.576864875697e - 01 | 1.359319583386e - 01 | 9.936184459082e - 01 | 1.000000000000e + 00 |
| 1 | 7.690752849842e - 01 | 4.517142808365e - 02 | 8.142467130678e - 01 | 8.174011678108e - 01 |
| 2 | 6.498078330514e - 01 | 1.677739125576e - 02 | 6.665852243071e - 01 | 6.681446691386e - 01 |
| 3 | 4.380586886599e - 01 | 6.630340325513e - 03 | 4.446890289855e - 01 | 4.454600449134e - 01 |

Références

- [1] Cohen. A. *Ondelettes, analyses de multirésolutions et traitements numériques de signal*. PhD thesis, Université de Paris-9, 1989.
- [2] C. A. Michelli. A. S. Cavaretta, W. Dahmen. Stationary subdivision. *Memoirs Amer. Math. Soc.*, 93(453), 1991.
- [3] A. Cohen. Biorthogonal wavelets. In *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*, pages 123–152. Academic Press, San Deigo, CA, 1992.
- [4] I. DAUBECHIES. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure, Applied Math*, XL1(41):909–996, 1988.
- [5] I. DAUBECHIES. *Ten lectures in Wavelets*, volume 61. CBMS-NFS Regional conference series in applied mathematics 61, 1992.
- [6] S. DURAND. *Etude de la vitesse de convergence del'algorithmme en cascade...* PhD thesis, Université de Paris–dauphine, 1993.
- [7] W. Dahmen et C.A. Michelli. Using the refinement equation for evaluating integrals of wavwlwts. *SIAM J. Numer. Anal.*, 30(2):507–537, april 1993.
- [8] R. COIFMAN G. BEYLKIN and V. ROCKILN. Wavelet transform and numerical algorithms 1. *Comm. Pure, Applied Math*, XLIV, 1991.
- [9] A. Kunothe. Computing refinable integrals - documentation of the program - version 1.1. Technical report, Texas A& M University, 1995.
- [10] S. Mallat. *Wavelets*. rien, 1989.
- [11] Y. MEYER. *Ondelettes et opérateurs 1*. Hermann, 1990.
- [12] G. Strang. Wavelets and dilatation equation: A brief introduction. *SIAM Rev*, 28(2):288–305, 1989.