

Propagation du chaos trajectorielle pour les lois de conservation scalaire

B.Jourdain*

18 décembre 1996

Résumé

A l'aide d'un problème de martingales, nous donnons une interprétation probabiliste trajectorielle de la solution d'une équation cinétique associée aux lois de conservation scalaire. Puis nous montrons que l'unique solution de ce problème est la limite au sens de la propagation du chaos d'une suite de lois de systèmes de particules en interaction, étendant ainsi un résultat obtenu par Perthame et Pulvirenti [2] pour les marginales en temps.

L'équation cinétique non linéaire :

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x, v) + a(v) \cdot \nabla_x f(t, x, v) + \lambda(f(t, x, v) - 1_{\{v \leq u(t, x)\}}) = 0, & x \in \mathbb{R}^d, \quad t \geq 0, \quad v \in \mathbb{R}_+ \\ u(t, x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t, x, v) dv \quad \text{et} \quad f(0, x, v) = f_0(x, v) \end{cases} \quad (0.1)$$

où $\lambda > 0$ et $a : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une fonction continue

a été introduite par Perthame et Tadmor [3]. Ces auteurs ont montré que si $f_0(x, v) = 1_{\{v \leq w_0(x)\}}$, dans le passage à la limite $\lambda \rightarrow +\infty$, $f(t, x, v)$ converge vers $1_{\{v \leq w(t, x)\}}$ où w est l'unique solution entropique de l'équation de conservation scalaire

$$\begin{cases} \partial_t w(t, x) + \nabla_x \cdot A(w(t, x)) = 0, & x \in \mathbb{R}^d, \quad t \geq 0 \\ w(0, x) = w_0(x) \end{cases} \quad (0.2)$$

avec $A(v) = \int_0^v a(\tilde{v}) d\tilde{v}$. Heuristiquement, on peut se convaincre de ce résultat de la façon suivante. Si on intègre (0.1) en v , on obtient $\partial_t u(t, x) + \nabla_x \cdot \int_{\mathbb{R}_+} a(v) f(t, x, v) dv = 0$. Dans le passage à la limite, $f(t, x, v)$ et $1_{\{v \leq u(t, x)\}}$ deviennent très proches et remplaçant formellement $f(t, x, v)$ par $1_{\{v \leq u(t, x)\}}$ dans la dernière équation, on trouve que u vérifie l'équation de conservation scalaire.

Dans la première partie de ce travail, après avoir rappelé que pour $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, l'équation (0.1) admet une unique solution faible dans $L^\infty([0, T], L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$, nous cherchons à donner une interprétation probabiliste de cette solution lorsque f_0 est une densité de probabilité.

*ENPC-CERMICS, La Courtine, 93167 Noisy le Grand Cedex

A cet effet, nous introduisons le problème de martingales non linéaire suivant : une probabilité $P \in \mathcal{P}(D([0, T], \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ dont la marginale en t admet une densité $p(t, x, v)$ par rapport à la mesure de Lebesgue pour tout $t \in [0, T]$, est solution si $p(0, \cdot, \cdot) = f_0(\cdot, \cdot)$ et si, pour $u(t, x) = \int_{\mathbb{R}_+} p(t, x, v) dv$, $\forall \phi \in C_b^{1,0}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$,

$$\phi(X_t, V_t) - \phi(X_0, V_0) - \int_0^t \left(a(V_s) \cdot \nabla_x \phi(X_s, V_s) - \lambda \frac{1_{\{u(s, X_s) > 0\}}}{u(s, X_s)} \int_0^{u(s, X_s)} (\phi(X_s, v) - \phi(X_s, V_s)) dv \right) ds$$

est une P -martingale locale ((X, V) désigne le processus canonique sur $D([0, T], \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$). Ce problème de martingales est associé à (0.1) au sens où si P est solution, alors $p(t, x, v)$ est solution faible de (0.1). Nous montrons qu'il admet une unique solution. La solution est construite de la façon suivante : la position X évolue suivant un mouvement de vitesse $a(V)$ tandis qu'aux instants de sauts (T_k) d'un processus de Poisson de paramètre λ , le paramètre de vitesse V se redistribue uniformément entre 0 et $u(T_k, X_{T_k})$ où u est la densité spatiale de la solution de (0.1).

Dans la seconde partie, nous généralisons un résultat de propagation du chaos dû à Perthame et Pulvirenti. Dans [2], ces auteurs restreignent la position x au tore $T^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$, qu'ils subdivisent en cellules cubiques identiques disjointes de volume $|\Delta|$. Ils construisent un système à N particules à partir de N processus de Poisson indépendants de paramètre λ : l'évolution de la position de la i ème particule est régie par son paramètre de vitesse et aux instants de sauts du i ème processus de Poisson, ce paramètre de vitesse se redistribue uniformément entre 0 et la densité spatiale empirique dans la cellule où se trouve la particule (rapport entre le nombre de particules dans la cellule et $N|\Delta|$). Ils démontrent que pour $N \rightarrow +\infty$ avec $|\Delta| \rightarrow 0$ et $N|\Delta| \rightarrow +\infty$, les marginales en t des systèmes de particules sont $f(t, x, v) dx dv$ -chaotiques où f est l'unique solution de (0.1). Le passage à la limite $|\Delta| \rightarrow 0$, $N|\Delta| \rightarrow +\infty$, $\lambda \rightarrow +\infty$ suffisamment doucement permet d'envisager la simulation de l'équation de conservation scalaire par une méthode de Monte-Carlo.

Nous étendons le résultat de Perthame et Pulvirenti en nous libérant de l'hypothèse technique de minoration de f_0 qui les contraignait à se limiter au tore et en travaillant sur $\mathcal{P}(D([0, T], \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ au lieu de considérer uniquement les marginales en temps. Nous introduisons un système de particules fortement inspiré du leur et nous montrons que pour f_0 satisfaisant une régularité en x précisée ultérieurement, il y a propagation du chaos en norme de variation sur $\mathcal{P}(D([0, T], \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ vers l'unique solution du problème de martingales partant de f_0 .

Notre preuve reprend les deux étapes de la leur. Nous nous appuyons sur le couplage qu'ils utilisent mais avec un point de vue différent. Notre approche probabiliste nous permet de retrouver très facilement le résultat de leur première étape. Puis nous améliorons les majorations de la seconde étape en travaillant dans un cadre L^1 au lieu d'un cadre L^2 .

Notations

Soit $D([0, T], \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ l'espace des fonctions càdlàg de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ et $\mathcal{P}(D([0, T], \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ l'espace des mesures de probabilités sur $D([0, T], \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ que l'on munit de la norme en variation

$$\|P - Q\|_T = \sup \left\{ \int \phi dP - \int \phi dQ, \phi : D([0, T], \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+) \rightarrow \mathbb{R} \text{ borélienne et bornée par } 1 \right\}$$

Si $P \in \mathcal{P}(D([0, T], \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$, on note $(P_t)_{t \in [0, T]}$ les marginales en temps de P .

On désigne par $\tilde{\mathcal{P}}(D([0, T], \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ le sous ensemble de $\mathcal{P}(D([0, T], \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ constitué par les probabilités dont toutes les marginales en temps sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$. Si $P \in \tilde{\mathcal{P}}(D([0, T], \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$, alors il existe une fonction

mesurable $p(t, x, v)$ telle que pour tout $t \in [0, T]$, $p(t, \cdot, \cdot)$ est une densité de P_t par rapport à la mesure de Lebesgue (voir Meyer [1] p193-194). Une telle fonction est appelée version mesurable des densités pour P .

Le processus canonique sur $D([0, T], \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ est noté (X_s, V_s) , $s \in [0, T]$ avec $X_s \in \mathbb{R}^d$ et $V_s \in \mathbb{R}_+$.

Remerciements: Je tiens à remercier Madame le Professeur Sylvie Méléard pour toute l'aide qu'elle m'a apportée au cours de ce travail.

1 Le problème de martingales non linéaire

1.1 L'équation cinétique (0.1)

Proposition 1.1 *Pour toute fonction $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, l'équation cinétique (0.1) admet une unique solution faible f dans $L^\infty([0, T], L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$.*

En outre, si f' est la solution correspondant à la condition initiale f'_0 ,

$$\|f - f'\|_\infty \leq \|f_0 - f'_0\|_{L^1} \quad (1.1)$$

où $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme de $L^\infty([0, T], L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$.

Remarque 1.2 *Par invariance de l'équation cinétique par translation spatiale, si $f(t, x, v)$ est la solution associée à $f_0(x, v)$, $f(t, x + y, v)$ est la solution associée à $f_0(x + y, v)$. Avec la propriété de contraction (1.1), on en déduit que*

$$\left(\forall y \in \mathbb{R}^d, \|f_0(\cdot + y, \cdot) - f_0(\cdot, \cdot)\|_{L^1} \leq K|y| \right) \Rightarrow \left(\forall y \in \mathbb{R}^d, \|f(\cdot, \cdot + y, \cdot) - f(\cdot, \cdot, \cdot)\|_\infty \leq K|y| \right)$$

Preuve de la proposition 1.1 : Soit $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$, f une solution faible de (0.1) dans $L^\infty([0, T], L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ et $u(s, x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(s, x, v) dv$. Ce qui suit est valable pour t en dehors d'un borélien de $[0, T]$ de mesure de Lebesgue nulle.

Si $\psi \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ à support compact

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} f(t, x, v) \psi(t, x, v) dx dv &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} f_0(x, v) \psi(0, x, v) dx dv \\ &+ \int_{(0, t] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} f(s, x, v) (\partial_s \psi + a(v) \cdot \nabla_x \psi - \lambda \psi)(s, x, v) ds dx dv \\ &+ \lambda \int_{(0, t] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} 1_{\{v \leq u(s, x)\}} \psi(s, x, v) ds dx dv \end{aligned} \quad (1.2)$$

Par densité, cette égalité reste vraie pour $\psi \in C^{1,1,0}([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ à support compact.

Soit $\phi \in C^{1,0}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ à support compact. On pose $\psi(s, x, v) = e^{\lambda(s-t)} \phi(x + (t-s)a(v), v)$. La fonction ψ est $C^{1,1,0}$ à support compact dans $[0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$. En outre,

$$\forall (s, x, v) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, (\partial_s \psi + a(v) \cdot \nabla_x \psi - \lambda \psi)(s, x, v) = 0$$

En écrivant (1.2) pour ψ , on obtient alors par un simple changement de variables

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} f(t, x, v) \phi(x, v) dx dv &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} e^{-\lambda t} f_0(x - ta(v), v) \phi(x, v) dx dv \\ &\quad + \lambda \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\{v \leq u(s, x - (t-s)a(v))\}} e^{\lambda(s-t)} \phi(x, v) dx dv \end{aligned}$$

Ainsi

$$t \in [0, T] \text{ p.p.}, (x, v) \text{ p.p. } f(t, x, v) = e^{-\lambda t} f_0(x - ta(v), v) + \lambda \int_0^t e^{\lambda(s-t)} \mathbf{1}_{\{v \leq u(s, x - (t-s)a(v))\}} ds \quad (1.3)$$

Donc f est point fixe de l'application H qui à $g \in L^\infty([0, T], L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ associe,

$$H(g)(t, x, v) = e^{-\lambda t} f_0(x - ta(v), v) + \lambda \int_0^t e^{\lambda(s-t)} \mathbf{1}_{\{v \leq u_g(s, x - (t-s)a(v))\}} ds$$

pour $u_g(s, x) = \int_{\mathbb{R}_+} g(s, x, v) dv$. On montre facilement que cette application est contractante de rapport $(1 - e^{-\lambda T})$ dans $L^\infty([0, T], L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$. Par le théorème du point fixe de Picard, elle admet un unique point fixe. On a donc obtenu l'unicité des solutions de (0.1) dans $L^\infty([0, T], L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$.

Pour établir l'existence, nous allons montrer que le point fixe f est solution de (0.1). On pose $u(t, x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t, x, v) dv$. On se donne $t \in [0, T]$ et $\psi \in C^{1,1,0}([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ à support compact. En utilisant notamment la formule d'intégration par parties pour les intégrales de Stieljes, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{(0, t] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \left(\partial_s \psi + a(v) \cdot \nabla_x \psi - \lambda \psi \right) (s, x, v) \int_0^s e^{\lambda(\tau-s)} \mathbf{1}_{\{v \leq u(\tau, x - (s-\tau)a(v))\}} d\tau ds dx dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \int_0^t \partial_s \left(e^{-\lambda s} \psi(s, x + sa(v), v) \right) \int_0^s e^{\lambda\tau} \mathbf{1}_{\{v \leq u(\tau, x + \tau a(v))\}} d\tau ds dx dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} e^{-\lambda t} \psi(t, x + ta(v), v) \int_0^t e^{\lambda\tau} \mathbf{1}_{\{v \leq u(\tau, x + \tau a(v))\}} d\tau dx dv \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \int_0^t e^{-\lambda s} \psi(s, x + sa(v), v) e^{\lambda s} \mathbf{1}_{\{v \leq u(s, x + sa(v))\}} ds dx dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \psi(t, x, v) \int_0^t e^{\lambda(s-t)} \mathbf{1}_{\{v \leq u(s, x - (t-s)a(v))\}} ds \\ &\quad - \int_{(0, t] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \psi(s, x, v) \mathbf{1}_{\{v \leq u(s, x)\}} ds dx dv \end{aligned} \quad (1.4)$$

Un raisonnement analogue fournit

$$\begin{aligned} &\int_{(0, t] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \left(\partial_s \psi + a(v) \cdot \nabla_x \psi - \lambda \psi \right) (s, x, v) e^{-\lambda s} f_0(x - sa(v), v) ds dx dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} e^{-\lambda t} f_0(x - ta(v), v) \psi(t, x, v) dx dv - \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} f_0(x, v) \psi(0, x, v) dx dv \end{aligned}$$

En sommant cette équation et λ fois (1.4) puis en utilisant (1.3), on obtient que $t \in [0, T]$ p.p., (1.2) est vérifiée pour toute fonction $\psi \in C^{1,1,0}([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ à support compact. Donc f est solution faible de l'équation cinétique (0.1).

Si f' est la solution correspondant à la condition initiale f'_0 , d'après (1.3), $t \in [0, T]$ p.p., $\|f(t, \cdot, \cdot) - f'(t, \cdot, \cdot)\|_{L^1} \leq e^{-\lambda t} \|f_0 - f'_0\|_{L^1} + (1 - e^{-\lambda t}) \|f - f'\|_\infty$. On en déduit $\|f - f'\|_\infty \leq \|f_0 - f'_0\|_{L^1}$. ■

1.2 Existence et unicité pour le problème de martingales

Définition 1.3 Soit f_0 une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$.

On dit que $P \in \tilde{\mathcal{P}}(D([0, T], \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ est solution du problème de martingales (PDM) partant de f_0 si P_0 admet f_0 comme densité et si pour $p(t, x, v)$ version mesurable des densités de P et $u(t, x) = \int_{\mathbb{R}_+} p(t, x, v) dv$,

$$\begin{aligned} \forall \phi \in C_b^{1,0}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+), \phi(X_t, V_t) - \phi(X_0, V_0) - \int_0^t a(V_s) \cdot \nabla_x \phi(X_s, V_s) ds \\ - \lambda \int_0^t \frac{\mathbf{1}_{\{u(s, X_s) > 0\}}}{u(s, X_s)} \int_0^{u(s, X_s)} (\phi(X_s, v) - \phi(X_s, V_s)) dv ds \text{ est une } P\text{-martingale locale} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Cette définition est indépendante du choix de la version mesurable des densités. En effet si p et p' sont deux telles versions et u et u' sont les densités spatiales associées,

$$\begin{aligned} Pp.s., \forall t \in [0, T], \int_0^t \frac{\mathbf{1}_{\{u(s, X_s) > 0\}}}{u(s, X_s)} \int_0^{u(s, X_s)} (\phi(X_s, v) - \phi(X_s, V_s)) dv ds \\ = \int_0^t \frac{\mathbf{1}_{\{u'(s, X_s) > 0\}}}{u'(s, X_s)} \int_0^{u'(s, X_s)} (\phi(X_s, v) - \phi(X_s, V_s)) dv ds \end{aligned}$$

Théorème 1.4 Pour toute densité de probabilité f_0 sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$, le problème de martingales (PDM) partant de f_0 admet une unique solution P . De surcroît, toute version mesurable des densités pour p est solution de (0.1).

Pour montrer le théorème, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 1.5 Soit f_0 une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ et $U : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. On note (PDMU) le problème de martingales : $P \in \mathcal{P}(D([0, T], \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ est solution si P_0 admet une densité égale à f_0 et si (1.5) est vérifiée lorsque l'on y remplace u par U .

Ce problème admet une unique solution. En outre, la solution est dans $\tilde{\mathcal{P}}(D([0, T], \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$.

Preuve du lemme 1.5 : Soit P une solution de (PDMU). Pour montrer l'unicité pour ce problème, nous commençons par montrer que $Pp.s.$, chaque trajectoire du processus X est une fonction déterministe de X_0 et de la trajectoire correspondante du processus V .

Soit $\phi \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$. Le processus $M_t^\phi = \phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t a(V_s) \cdot \nabla_x \phi(X_s) ds$ est une martingale locale localement bornée et donc localement de carré intégrable. Par la formule d'intégration par parties, on obtient

$$\phi^2(X_t) = \phi^2(X_0) + 2 \int_0^t \phi(X_{s-}) dM_s^\phi + 2 \int_0^t \phi(X_s) a(V_s) \cdot \nabla_x \phi(X_s) ds + [\phi(X)]_t$$

La fonction ϕ^2 étant dans $C_b^1(\mathbb{R}^d)$, $\phi^2(X_t) - \phi^2(X_0) - 2 \int_0^t \phi(X_s) a(V_s) \cdot \nabla_x \phi(X_s) ds$ est une martingale locale. Donc $[\phi(X)]_t$ est une martingale locale. Puisque les sauts de M_t^ϕ et de $\phi(X_t)$ sont

les mêmes, $[M^\phi]_t = [\phi(X)]_t$. Donc le compensateur $\langle M^\phi \rangle_t$ de $[M^\phi]_t$ est nul. Ainsi,

$$Pp.s., \forall t \in [0, T], \phi(X_t) = \phi(X_0) + \int_0^t a(V_s) \cdot \nabla_x \phi(X_s) ds$$

Avec des fonctions $\phi_{i,n} \in C_b^1(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq i \leq d$, $n \in \mathbb{N}^*$ telles que $\forall x \in [-n, n]^d$, $\phi_{i,n}(x) = x_i$, on en déduit

$$Pp.s., \forall t \in [0, T], X_t = X_0 + \int_0^t a(V_s) ds$$

On se ramène maintenant à un problème de martingales qui ne porte que sur X_0 et V .

Pour se rapprocher des notations du lemme 1 de l'appendice de Sznitman [4], on définit sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ le noyau borélien à valeurs \mathbb{R} , $M(s, x, v, dv') = \lambda \frac{1_{\{U(s,x) > 0\}}}{U(s,x)} 1_{\{-v \leq v' \leq -v + U(s,x)\}} dv'$.

$$\forall \phi \in C_b(\mathbb{R}_+), \phi(V_t) - \phi(V_0) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (\phi(V_s + v') - \phi(V_s)) M\left(s, X_0 + \int_0^s a(V_\tau) d\tau, V_s, dv'\right) ds \text{ est une martingale locale}$$

Par le théorème fonctionnel de classe monotone, cette propriété reste vraie pour ϕ borélienne et bornée. Par une adaptation immédiate de la preuve du lemme 1 de l'appendice de Sznitman [4], on en déduit que $Pp.s.$, V n'admet qu'un nombre fini de sauts sur chaque trajectoire et $\forall t \in [0, T]$, $V_t = V_0 + \sum_{s \leq t} \Delta V_s$, la loi des instants et des valeurs des sauts sachant (X_0, V_0) étant déterminée de proche en proche (grâce à un choix judicieux de fonctions ϕ). D'où l'unicité pour (PDMU).

Pour l'existence, on se donne une variable aléatoire (χ_0, ν_0) distribuée suivant la loi de densité f_0 , et, indépendamment, un processus de Poisson de paramètre λ de temps de sauts $(T_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ ainsi qu'une suite $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de marques I.I.D. sur $[0, 1]$. On construit (X, V) de la manière suivante :

- $(X_0, V_0) = (\chi_0, \nu_0)$
- sur $[0, T]$, entre les sauts du processus de Poisson, le paramètre de vitesse V est inchangé et la position X évolue suivant un mouvement libre de vitesse $a(V)$
- en T_k (si $T_k \leq T$), V est inchangé si $U(T_k, X_{T_k}) = 0$ et prend la valeur $U(T_k, X_{T_k}) \times Z_k$ sinon. De cette façon, lorsque $U(T_k, X_{T_k}) > 0$, le paramètre de vitesse se redistribue uniformément sur $[0, U(T_k, X_{T_k})]$.

Nous allons vérifier que la loi P de ce processus est solution de (PDMU). A cet effet, on pose $H(s, z) = 1_{\{s \leq T\}} 1_{\{U(s, X_s) > 0\}} (\phi(X_s, U(s, X_s)z) - \phi(X_s, V_{s-}))$, et $Q = \sum_k \delta_{\{T_k, Z_k\}}$. Soit (\mathcal{G}_t) la filtration du processus $\sum_{k: T_k \leq t} (1 + Z_k)$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \sigma(\chi_0, \nu_0)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ la tribu \mathcal{F}_t prévisible. On se donne $\phi \in C_b^{1,0}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$. On a pour $t \in [0, T]$,

$$\phi(X_t, V_t) = \phi(X_0, V_0) + \int_0^t a(V_s) \cdot \nabla_x \phi(X_s, V_s) ds + \int_{\mathbb{R}_+ \times [0, 1]} H(s, z) 1_{\{s \leq t\}} Q(ds dz)$$

La mesure aléatoire Q est une \mathcal{F}_t -mesure de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times [0, 1]$ de compensateur $\lambda dt dz$. Comme la fonction H est $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \otimes \mathcal{B}([0, 1])$ mesurable, on en déduit que

$$\phi(X_t, V_t) - \phi(X_0, V_0) - \int_0^t a(V_s) \cdot \nabla_x \phi(X_s, V_s) ds - \lambda \int_0^t \int_{[0, 1]} H(s, z) ds dz$$

est une \mathcal{F}_t -martingale locale. Donc P est solution du problème de martingale (PDMU).

On utilise la construction précédente pour établir l'absolue continuité. On commence par supposer $\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$, $U(t, x) > 0$. Soit $t \in (0, T]$ et $\phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée. Avec la convention $T_0 = 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\phi(X_t, V_t)) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\{T_k \leq t < T_{k+1}\}} \phi \left(\chi_0 + \sum_{j=1}^k (T_j - T_{j-1}) a(V_{T_{j-1}}) + (t - T_k) a(V_{T_k}), V_{T_k} \right) \right) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \mathbb{E} \left(\phi \left(\chi_0 + \sum_{j=1}^k (T_j - T_{j-1}) a(V_{T_{j-1}}) + (t - T_k) a(V_{T_k}), V_{T_k} \right) \middle| T_k \leq t < T_{k+1} \right) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-\lambda t} \lambda^k \int_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k} dt_1 \dots dt_k \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^{k+1}} \frac{\mathbf{1}_{\{v_1 \leq U(t_1, x_1)\}}}{U(t_1, x_1)} \dots \frac{\mathbf{1}_{\{v_k \leq U(t_k, x_k)\}}}{U(t_k, x_k)} \\
&\quad f_0(x_0, v_0) \phi(x_t, v_k) dx_0 dv_0 dv_1 \dots dv_k \tag{1.6}
\end{aligned}$$

où $x_i = x_0 + \sum_{j=1}^i (t_j - t_{j-1}) a(v_{j-1})$ et $x_t = x_0 + \sum_{j=1}^k (t_j - t_{j-1}) a(v_{j-1}) + (t - t_k) a(v_k)$ (par convention $t_0 = 0$). En effectuant le changement de variable $[x_0 \rightarrow x_t$ et $\forall 0 \leq i \leq k, v_i \rightarrow v_i]$ dans l'intégrale sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^{k+1}$ et en utilisant le théorème de Fubini, on obtient

$$\mathbb{E}(\phi(X_t, V_t)) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \phi(x, v) \times p(t, x, v) dx dv$$

pour

$$\begin{aligned}
p(t, x, v) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-\lambda t} \lambda^k \int_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k} dt_1 \dots dt_k \int_{\mathbb{R}_+^k} \frac{\mathbf{1}_{\{v_1 \leq U(t_1, y_1)\}}}{U(t_1, y_1)} \dots \frac{\mathbf{1}_{\{v_{k-1} \leq U(t_{k-1}, y_{k-1})\}}}{U(t_{k-1}, y_{k-1})} \\
&\quad \frac{\mathbf{1}_{\{v \leq U(t_k, y_k)\}}}{U(t_k, y_k)} f_0(y_0, v_0) dv_0 \dots dv_{k-1}
\end{aligned}$$

avec $y_i = x - (t - t_k) a(v) - \sum_{j=i+1}^k (t_j - t_{j-1}) a(v_{j-1})$.
Donc la loi de (X_t, V_t) est absolument continue.

Dans le cas où U peut s'annuler, au lieu de l'intégrale sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^{k+1}$ de (1.6), on doit considérer 2^k intégrales suivant que $U(t_i, x_i) > 0$ ou que $U(t_i, x_i) = 0$ ($1 \leq i \leq k$).

On note I l'ensemble des i pour lesquels on prend $U(t_i, x_i) > 0$ et i_1, \dots, i_n les éléments de I classés par ordre croissant. L'intégrale sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^{k+1}$ est remplacée par

$$\sum_I \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^{n+1}} \prod_{i \notin I} \mathbf{1}_{\{U(t_i, x_i) = 0\}} \prod_{j=1}^n \mathbf{1}_{\{U(t_{i_j}, x_{i_j}) > 0\}} \frac{\mathbf{1}_{\{v_j \leq U(t_{i_j}, x_{i_j})\}}}{U(t_{i_j}, x_{i_j})} f_0(x_0, v_0) \phi(x_t, v_n) dx_0 dv_0 dv_1 \dots dv_n$$

avec $t_{i_0} = 0$, $x_i = x_0 + \sum_{j=1}^{\max\{j: i_j \leq i\}} (t_{i_j} - t_{i_{j-1}}) a(v_{j-1}) + (t_i - t_{i_{\max\{j: i_j \leq i\}}}) a(v_{\max\{j: i_j \leq i\}})$ et $x_t = x_0 + \sum_{j=1}^n (t_{i_j} - t_{i_{j-1}}) a(v_{j-1}) + (t - t_{i_n}) a(v_n)$. Et on conclut en effectuant un changement de variable dans chacun des 2^k termes. \blacksquare

Preuve du théorème 1.4 : Soit f_0 une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$, P une solution du problème de martingales (PDM) partant de f_0 et p une version mesurable des densités pour P . On va montrer que p est solution faible de (0.1). On pose $u(t, x) = \int_{\mathbb{R}_+} p(t, x, v) dv$. La loi P

est solution de (PDMu). En utilisant la construction de la solution de (PDMu) donnée dans la preuve du Lemme 1.5, on obtient que pour toute fonction $\psi \in C^{1,1,0}([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ à support compact,

$$\begin{aligned} & \psi(t, X_t, V_t) - \psi(0, X_0, V_0) - \int_0^t (\partial_s \psi(s, X_s, V_s) + a(V_s) \cdot \nabla_x \psi(s, X_s, V_s)) ds \\ & - \lambda \int_0^t \frac{\mathbf{1}_{\{u(s, X_s) > 0\}}}{u(s, X_s)} \int_0^{u(s, X_s)} (\psi(s, X_s, v) - \psi(s, X_s, V_s)) dv ds \quad \text{est une } P\text{-martingale} \end{aligned} \quad (1.7)$$

On note A_t l'espérance du dernier terme. Par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} A_t &= \lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \frac{\mathbf{1}_{\{u(s, x) > 0\}}}{u(s, x)} \left(\int_0^{u(s, x)} \psi(s, x, v) dv \right) p(s, x, v') dx dv' ds \\ &- \lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \frac{\mathbf{1}_{\{u(s, x) > 0\}}}{u(s, x)} \left(\int_0^{u(s, x)} \psi(s, x, v') dv \right) p(s, x, v') dx dv' ds \\ &= \lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \frac{\mathbf{1}_{\{u(s, x) > 0\}}}{u(s, x)} \psi(s, x, v) \mathbf{1}_{\{v \leq u(s, x)\}} \left(\int_{\mathbb{R}_+} p(s, x, v') dv' \right) dx dv ds \\ &- \lambda \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{\{u(s, x) > 0\}} \psi(s, x, v) p(s, x, v) dx dv ds \\ &= \lambda \int_{(0, t] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \psi(s, x, v) \left(\mathbf{1}_{\{v \leq u(s, x)\}} - p(s, x, v) \right) ds dx dv \end{aligned}$$

Avec la constance de l'espérance de la martingale (1.7), on en déduit facilement que p est solution faible de (0.1).

L'unicité pour (PDM) est une conséquence de ce résultat et de la Proposition 1.1. En effet, si P et P' sont deux solutions de densités spatiales respectives $u(t, x)$ et $u'(t, x)$, le résultat d'unicité de la Proposition 1.1 implique $(t, x) \text{ p.p.}, u(t, x) = u'(t, x)$. On en déduit que P' est solution de (PDMu). Par l'unicité pour ce problème, $P' = P$.

Pour l'existence, on note f la solution de (0.1) fournie par la Proposition 1.1 et on lui associe $U(t, x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t, x, v) dv$. Soit P la solution de (PDMU), p une version mesurable des densités pour P et u la densité spatiale associée. Si $\psi \in C^{1,1,0}([0, T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ à support compact,

$$\begin{aligned} & \psi(t, X_t, V_t) - \psi(0, X_0, V_0) - \int_0^t (\partial_s \psi(s, X_s, V_s) + a(V_s) \cdot \nabla_x \psi(s, X_s, V_s)) ds \\ & - \lambda \int_0^t \frac{\mathbf{1}_{\{U(s, X_s) > 0\}}}{U(s, X_s)} \int_0^{U(s, X_s)} (\psi(s, X_s, v) - \psi(s, X_s, V_s)) dv ds \quad \text{est une } P\text{-martingale} \end{aligned}$$

En prenant l'espérance, on obtient une équation linéaire satisfaite au sens faible par p

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \psi(t, x, v) p(t, x, v) dx dv = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \psi(0, x, v) f_0(x, v) dx dv \\ & + \int_{(0, t] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} (\partial_s \psi + a(v) \cdot \nabla_x \psi - \lambda \psi)(s, x, v) p(s, x, v) ds dx dv \\ & + \lambda \int_{(0, t] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \psi(s, x, v) \left(\mathbf{1}_{\{U(s, x) > 0\}} \frac{u(s, x)}{U(s, x)} \mathbf{1}_{\{v \leq U(s, x)\}} + \mathbf{1}_{\{U(s, x) = 0\}} p(s, x, v) \right) ds dx dv \end{aligned}$$

Comme au début de la preuve de la Proposition 1.1, on en déduit que $\forall t \in [0, T], (x, v) \text{ p.p.},$

$$\begin{aligned} & p(t, x, v) = e^{-\lambda t} f_0(x - ta(v), v) \\ & + \lambda \int_0^t e^{\lambda(s-t)} \left(\mathbf{1}_{\{U(s, x_{t,s,v}) > 0\}} \frac{u(s, x_{t,s,v})}{U(s, x_{t,s,v})} \mathbf{1}_{\{v \leq U(s, x_{t,s,v})\}} + \mathbf{1}_{\{U(s, x_{t,s,v}) = 0\}} p(s, x_{t,s,v}, v) \right) ds \end{aligned}$$

avec $x_{t,s,v} = x - (t-s)a(v)$.

Donc p est point fixe de l'application H qui à $g \in L^\infty([0, T], L^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+))$ associe

$$H(g)(t, x, v) = e^{-\lambda t} f_0(x - ta(v), v) + \lambda \int_0^t e^{\lambda(s-t)} \left(\mathbf{1}_{\{U(s, x_{t,s,v}) > 0\}} \frac{u_g(s, x_{t,s,v})}{U(s, x_{t,s,v})} \mathbf{1}_{\{v \leq U(s, x_{t,s,v})\}} + \mathbf{1}_{\{U(s, x_{t,s,v}) = 0\}} g(s, x_{t,s,v}, v) \right) ds$$

où $u_g(t, x) = \int_{\mathbb{R}_+} g(t, x, v) dv$. On montre facilement que H est contractante de rapport $(1 - e^{-\lambda T})$ puis que f est l'unique point fixe de H . On en déduit que (t, x) p.p., $U(t, x) = u(t, x)$. Donc P est solution du problème de martingales non linéaire (PDM). \blacksquare

2 Le résultat de propagation du chaos

2.1 Le système de particules en interaction

Soit $N \geq 2$. On fixe un hypercube D de \mathbb{R}^d de mesure de Lebesgue $|D|$ centré en 0 que l'on subdivise en $\frac{|D|}{|\Delta|}$ cellules cubiques identiques de mesure de Lebesgue $|\Delta|$. Si $y \in D$, $\Delta(y)$ désigne la cellule dans laquelle se trouve y . Pour $y^N = (y_1^N, \dots, y_N^N) \in \mathbb{R}^{Nd}$, on définit la densité empirique au point y_i^N par

$$\rho_i(y^N) = \mathbf{1}_{\{y_i^N \in D\}} \frac{1}{(N-1)|\Delta|} \sum_{j \neq i} \mathbf{1}_{\Delta(y_i^N)}(y_j^N)$$

On note $(X^N(t), V^N(t)) = (X_1^N(t), \dots, X_N^N(t), V_1^N(t), \dots, V_N^N(t))$ le processus canonique sur $D([0, T], \mathbb{R}^{Nd} \times \mathbb{R}_+^N)$. On définit la loi du système de particules en interaction comme l'unique solution $P^{N,D,\Delta}$ du problème de martingales: $P \in \mathcal{P}(D([0, T], \mathbb{R}^{Nd} \times \mathbb{R}_+^N))$ est solution si P_0 est égale à $(f_0 dx dv)^{\otimes N}$ et pour toute fonction $\phi \in C_b^{1,0}(\mathbb{R}^{Nd} \times \mathbb{R}_+^N)$,

$$\begin{aligned} \phi(X^N(t), V^N(t)) - \phi(X^N(0), V^N(0)) - \sum_{i=1}^N \int_0^t \left(a(V_i^N(s)) \cdot \nabla_{x_i} \phi(X^N(s), V^N(s)) + \lambda \frac{\mathbf{1}_{\{\rho_i(X^N(s)) > 0\}}}{\rho_i(X^N(s))} \int_0^{\rho_i(X^N(s))} \phi(X^N(s), (V_1^N, \dots, V_{i-1}^N, v, V_{i+1}^N, \dots, V_N^N)(s)) - \phi(X^N(s), V^N(s)) dv \right) ds \end{aligned}$$

est une P -martingale locale. L'unicité pour ce problème de martingales s'obtient comme dans la preuve du lemme 1.5.

On se donne N processus de Poisson indépendants de paramètre λ (on note $(T_k^i)_{k \in \mathbb{N}^*}$ les instants de sauts du i ème processus), N suites $(Z_k^i)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de marques I.I.D. sur $[0, 1]$ et N variables (χ_0^i, ν_0^i) I.I.D. suivant la loi de densité f_0 . La probabilité $P^{N,D,\Delta}$ est la loi du processus (X^N, V^N) construit de la manière suivante :

- pour $1 \leq i \leq N$, $(X_i^N(0), V_i^N(0)) = (\chi_0^i, \nu_0^i)$
- sur $[0, T]$, en dehors des sauts du i ème processus de Poisson, V_i^N le paramètre de vitesse de la i ème particule est constant et sa position évolue suivant un mouvement libre de vitesse $a(V_i^N)$

- à l'instant T_k^i (si $T_k^i \leq T$), V^i prend la valeur $\rho_i(X^N(T_k^i)) \times Z_k^i$ si $\rho_i(X^N(T_k^i)) > 0$ et reste constant sinon.

Remarque 2.1 - Comme on peut le voir sur la construction que l'on vient d'en donner, $P^{N,D,\Delta}$ est symétrique.

- Si on cherche seulement à approcher la solution de (0.1) dans un domaine contenu dans D , on peut arrêter de suivre toute particule qui sort de D . En effet, le paramètre de vitesse d'une telle particule ne peut plus changer. La particule part donc à l'infini et n'interagit plus avec les autres.

2.2 Propagation du chaos

Théorème 2.2 On se donne f_0 une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ qui vérifie

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \|f_0(\cdot + y, \cdot) - f_0(\cdot, \cdot)\|_{L^1} \leq K|y| \quad (2.1)$$

On note P la solution du problème de martingales (PDM) partant de f_0 (théorème 1.4) et on pose $u(t, x) = \int_{\mathbb{R}_+} p(t, x, v) dv$ pour p version mesurable des densités de P .

Pour $k \leq N$, on note $P_{(k)}^{N,D,\Delta}$ la loi des k premières particules sous $P^{N,D,\Delta}$. Alors en norme de variation sur $\mathcal{P}(D([0, T], \mathbb{R}^{kd} \times \mathbb{R}_+^k))$,

$$\left\| P_{(k)}^{N,D,\Delta} - P^{\otimes k} \right\|_T \leq 2k\lambda \left(\left(\sqrt{\frac{|D|}{(N-1)|\Delta|}} + 2^d \sqrt{d} K |\Delta|^{\frac{1}{d}} \right) T + \int_0^T \int_{D^c} u(s, z) dz ds \right) e^{3\lambda T} \quad (2.2)$$

Ainsi, pour $N \rightarrow +\infty$ avec $|D| \rightarrow +\infty$, $|\Delta| \rightarrow 0$ et $\frac{N|\Delta|}{|D|} \rightarrow +\infty$, il y a propagation du chaos.

Preuve : La preuve est basée sur le couplage utilisé par Perthame et Pulvirenti dans [2]. On va construire un système à $2N$ particules tel que la loi du sous-système constitué par les N premières particules est $P^{N,D,\Delta}$ et que celle du sous-système constitué par les N dernières est $P^{\otimes N}$.

Le couplage

On note $(X^N, Y^N) \in \mathbb{R}^{2Nd}$ et $(V^N, W^N) \in \mathbb{R}_+^{2N}$ les positions et les paramètres de vitesse des $2N$ particules.

On se donne N variables (χ_0^i, ν_0^i) I.I.D. suivant la loi de densité $f_0(x, v)$ et N processus de Poisson de paramètre λ indépendants. On note $(T_k^i)_{k \in \mathbb{N}^*}$ les temps de sauts successifs du i ème processus.

On se donne également, indépendamment du reste, N suites indépendantes $(Z_k^{i,1}, Z_k^{i,2}, Z_k^{i,3})_{k \in \mathbb{N}^*}$ de marques I.I.D. suivant la loi uniforme sur $[0, 1]^3$.

On construit le couplage de la façon suivante :

- pour $1 \leq i \leq N$, $(X_i^N(0), V_i^N(0)) = (Y_i^N(0), W_i^N(0)) = (\chi_0^i, \nu_0^i)$

- sur $[0, T]$, en dehors des sauts du i ème processus de Poisson, V_i^N le paramètre de vitesse de la i ème particule et W_i^N celui de la $(N+1)$ ème restent constants et les positions de ces deux particules évoluent respectivement suivant des mouvements libres de vitesse $a(V_i^N)$ et $a(W_i^N)$
- à l'instant T_k^i (si $T_k^i \leq T$), en notant $\rho_{i,k} = \rho_i(X^N(T_k^i))$ et $u_{i,k} = u(T_k^i, Y_i^N(T_k^i))$ pour alléger les formules
 - si $\rho_{i,k} = u_{i,k} = 0$, alors $V_i^N(T_k^i)$ et $W_i^N(T_k^i)$ sont inchangés.
 - si $\rho_{i,k} > 0$ et $u_{i,k} = 0$ alors W_i^N est inchangé et on pose $V_i^N(T_k^i) = \rho_{i,k} \times Z_k^{2,i}$
 - si $\rho_{i,k} = 0$ et $u_{i,k} > 0$ alors V_i^N est inchangé et on pose $W_i^N(T_k^i) = u_{i,k} \times Z_k^{2,i}$
 - $\rho_{i,k} \geq u_{i,k} > 0$
 - si $Z_k^{1,i} \leq \frac{u_{i,k}}{\rho_{i,k}}$, on pose $V_i^N(T_k^i) = W_i^N(T_k^i) = u_{i,k} \times Z_k^{2,i}$
 - sinon on pose $V_i^N(T_k^i) = u_{i,k} + (\rho_{i,k} - u_{i,k}) \times Z_k^{2,i}$ et $W_i^N(T_k^i) = u_{i,k} \times Z_k^{3,i}$
 - si $0 < \rho_{i,k} < u_{i,k}$
 - si $Z_k^{1,i} \leq \frac{\rho_{i,k}}{u_{i,k}}$, on pose $V_i^N(T_k^i) = W_i^N(T_k^i) = \rho_{i,k} \times Z_k^{2,i}$
 - sinon on pose $W_i^N(T_k^i) = \rho_{i,k} + (u_{i,k} - \rho_{i,k}) \times Z_k^{2,i}$ et $V_i^N(T_k^i) = \rho_{i,k} \times Z_k^{3,i}$

Etape 1

Dans cette première étape qui utilise la compensation des mesures aléatoires de Poisson, nous majorons, pour $t \in [0, T]$, la probabilité pour que les trajectoires de la i ème particule et de la $(N+1)$ ème particule sur $[0, t]$ soient différentes. Par symétrie, cette probabilité est indépendante de i . On la note Q_t .

Soit $M^i = \sum_k \delta_{(T_k^i, Z_k^{1,i}, Z_k^{2,i}, Z_k^{3,i})}$ et (\mathcal{F}_t^i) la filtration du processus $\sum_{k: T_k \leq t} (1 + Z_k^{1,i}, Z_k^{2,i}, Z_k^{3,i})$. Alors M^i est une \mathcal{F}_t^i -mesure de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times [0, 1]^3$ de compensateur $\lambda dt dz_1 dz_2 dz_3$. On pose $\mathcal{F}_0 = \sigma((\chi_0^i, \nu_0^i))$, $1 \leq i \leq N$ et $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_0 \vee (\bigvee_{i=1}^N \mathcal{F}_t^i)$. Par l'indépendance, M^i est encore une \mathcal{F}_t -mesure de Poisson de compensateur $\lambda dt dz_1 dz_2 dz_3$. On définit

$$G(s) = \mathbf{1}_{\{\max(u(s, Y_1^N(s)), \rho_1(X^N(s))) > 0\}} \frac{\min(u(s, Y_1^N(s)), \rho_1(X^N(s)))}{\max(u(s, Y_1^N(s)), \rho_1(X^N(s)))} + \mathbf{1}_{\{\max(u(s, Y_1^N(s)), \rho_1(X^N(s))) = 0\}}$$

$$H(s, z_1) = \mathbf{1}_{\{s \in (0, t]\}} \mathbf{1}_{\{z_1 \geq G(s)\}}$$

Les trajectoires de la première particule et de la $(N+1)$ ème particule sur $[0, t]$ sont différentes si et seulement si il y a avant t un saut du premier processus de Poisson tel que les paramètres de vitesse sont égaux avant ce saut et prennent des valeurs différentes à l'instant du saut. Pour que le i ème saut vérifie cette propriété, il faut que $H(T_k^1, Z_k^1) = 1$. Donc

$$Q_t \leq \mathbb{E} \left(\int_{\mathbb{R}_+ \times [0, 1]^3} H(s, z_1) M^1(ds dz_1 dz_2 dz_3) \right) \quad (2.3)$$

On note $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t)$ la tribu \mathcal{F}_t prévisible. $H(s, z_1)$ est $\mathcal{P}(\mathcal{F}_t) \otimes \mathcal{B}([0, 1]^3)$ mesurable. Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\int_{\mathbb{R}_+ \times [0, 1]^3} H(s, z_1) M^1(ds dz_1 dz_2 dz_3) \right) &= \mathbb{E} \left(\int_{\mathbb{R}_+ \times [0, 1]^3} H(s, z_1) \lambda ds dz_1 dz_2 dz_3 \right) \\ &= \lambda \int_0^t \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\{\max(u(s, Y_1^N(s)), \rho_1(X^N(s))) > 0\}} \frac{|u(s, Y_1^N(s)) - \rho_1(X^N(s))|}{\max(u(s, Y_1^N(s)), \rho_1(X^N(s)))} \right) ds \end{aligned}$$

Avec (2.3), on en déduit

$$Q_t \leq \lambda \int_0^t \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\{\max(u(s, Y_1^N(s)), \rho_1(X^N(s))) > 0\}} \frac{|u(s, Y_1^N(s)) - \rho_1(X^N(s))|}{\max(u(s, Y_1^N(s)), \rho_1(X^N(s)))} \right) ds$$

$$\text{Or } \forall a, b, c \geq 0, \mathbf{1}_{\{\max(a, b) > 0\}} \frac{|a - b|}{\max(a, b)} \leq \mathbf{1}_{\{a=0\}} + \mathbf{1}_{\{a>0\}} \frac{|a - c|}{a} + \mathbf{1}_{\{\max(b, c) > 0\}} \frac{|b - c|}{\max(b, c)}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } Q_t &\leq \lambda \int_0^t \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\{u(s, Y_1^N(s)) = 0\}} \right) ds + \lambda \int_0^t \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\{u(s, Y_1^N(s)) > 0\}} \frac{|u(s, Y_1^N(s)) - \rho_1(Y^N(s))|}{u(s, Y_1^N(s))} \right) ds \\ &\quad + \lambda \int_0^t \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\{\max(\rho_1(X^N(s)), \rho_1(Y^N(s))) > 0\}} \frac{|\rho_1(X^N(s)) - \rho_1(Y^N(s))|}{\max(\rho_1(X^N(s)), \rho_1(Y^N(s)))} \right) ds \end{aligned} \quad (2.4)$$

Comme $Y_1^N(s)$ suit la loi de densité $u(s, y)$, le premier terme du second membre de (2.4) est nul.

Etape 2

Cette seconde étape est consacrée à la majoration du second et du troisième terme de (2.4).

$$\text{Majoration de } A_s = \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\{u(s, Y_1^N(s)) > 0\}} \frac{|u(s, Y_1^N(s)) - \rho_1(Y^N(s))|}{u(s, Y_1^N(s))} \right)$$

Nous travaillons directement dans le cadre L^1 au lieu de passer dans L^2 comme le font Perthame et Pulvirenti.

$$\begin{aligned} A_s &\leq \int_{\mathbb{R}^{Nd}} |u(s, y_1) - \rho_1(y_1, \dots, y_n)| dy_1 u(s, y_2) dy_2 \dots u(s, y_N) dy_N \\ &\leq \int_{D^c} u(s, y_1) dy_1 + \int_D \left| u(s, y_1) - \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta(y_1)} u(s, z) dz \right| dy_1 \\ &\quad + \frac{1}{|\Delta|} \int_{D \times \mathbb{R}^{(N-1)d}} \left| \frac{1}{N-1} \sum_{k=2}^N \left(\mathbf{1}_{\Delta(y_1)}(y_k) - \int_{\Delta(y_1)} u(s, z) dz \right) \right| dy_1 u(s, y_2) dy_2 \dots u(s, y_N) dy_N \end{aligned} \quad (2.5)$$

On note A_s^2 et A_s^3 le second et le troisième terme du second membre. L'hypothèse (2.1) va nous permettre de contrôler A_s^2 . Soit Γ l'hypercube de \mathbb{R}^d de volume $2^d |\Delta|$ centré en 0.

$$\begin{aligned} A_s^2 &\leq \frac{1}{|\Delta|} \int_D \int_{\Delta(x)} |u(s, x) - u(s, z)| dz dx \leq \frac{1}{|\Delta|} \int_D \int_{\Gamma} |u(s, x) - u(s, x + y)| dy dx \\ &\leq \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Gamma} \|u(s, \cdot) - u(s, \cdot + y)\|_{L^1} dy \end{aligned}$$

En utilisant (2.1) et la Remarque 1.2, on en déduit

$$A_s^2 \leq \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Gamma} K |y| dy \leq \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Gamma} K \sqrt{d} |\Delta|^{\frac{1}{d}} dy \leq 2^d \sqrt{d} K |\Delta|^{\frac{1}{d}} \quad (2.6)$$

La majoration de A_s^3 repose sur le fait que la variance d'une somme de variables indépendantes est égale à la somme des variances.

$$A_s^3 = \sum_{\Delta} \mathbb{E} \left| \frac{1}{N-1} \sum_{k=2}^N \left(\mathbf{1}_{\Delta}(Y_k^N(s)) - \mathbb{E} \left(\mathbf{1}_{\Delta}(Y_k^N(s)) \right) \right) \right|$$

$$\begin{aligned}
A_s^3 &\leq \sum_{\Delta} \sqrt{\frac{1}{N-1} \mathbb{E} (1_{\Delta}(Y_2^N(s)) - \mathbb{E}(1_{\Delta}(Y_2^N(s))))^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sum_{\Delta} \sqrt{\int_{\Delta} u(s, z) dz \left(1 - \int_{\Delta} u(s, z) dz\right)} \\
&\leq \sqrt{\frac{|D|}{(N-1)|\Delta|}} \sqrt{\sum_{\Delta} \int_{\Delta} u(s, z) dz} \quad \text{par l'inégalité de Schwarz} \\
&\leq \sqrt{\frac{|D|}{(N-1)|\Delta|}}
\end{aligned}$$

Avec les inégalités (2.5) et (2.6), on obtient

$$A_s \leq \sqrt{\frac{|D|}{(N-1)|\Delta|}} + 2^d \sqrt{d} K |\Delta|^{\frac{1}{d}} + \int_{D^c} u(s, z) dz \quad (2.7)$$

Majoration de B_s = $\mathbb{E} \left(1_{\{\max(\rho_1(X^N(s)), \rho_1(Y^N(s))) > 0\}} \frac{|\rho_1(X^N(s)) - \rho_1(Y^N(s))|}{\max(\rho_1(X^N(s)), \rho_1(Y^N(s)))} \right)$

Pour $y^N = (y_1^N, \dots, y_N^N) \in \mathbb{R}^{Nd}$, on note $n_{\Delta}(y^N) = \sum_{i=1}^N 1_{\Delta}(y_i^N)$. Pour alléger les formules, on omettra de préciser la dépendance en temps des processus (on notera Y^N au lieu de $Y^N(s)$).

$$\begin{aligned}
B_s &\leq \mathbb{E} \left(1_{\{X_1^N \neq Y_1^N\}} \right) \\
&\quad + \sum_{\Delta} \mathbb{E} \left(1_{\Delta}(X_1^N) 1_{\Delta}(Y_1^N) 1_{\{\max(n_{\Delta}(X^N), n_{\Delta}(Y^N)) > 1\}} \frac{|n_{\Delta}(X^N) - n_{\Delta}(Y^N)|}{\max(n_{\Delta}(X^N), n_{\Delta}(Y^N)) - 1} \right) \quad (2.8)
\end{aligned}$$

Si $X_1^N \neq Y_1^N$, alors les trajectoires de la première particule et de la $(N+1)$ ème particule sur $[0, s]$ sont différentes. Donc le premier terme du second membre est majoré par Q_s . On note B_s^2 le second terme. Sa majoration repose sur l'interchangeabilité des couples (X_i^N, Y_i^N) , $1 \leq i \leq N$.

$$\begin{aligned}
B_s^2 &= \frac{1}{N} \sum_{\Delta} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^N 1_{\Delta}(X_i^N) 1_{\Delta}(Y_i^N) 1_{\{\max(n_{\Delta}(X^N), n_{\Delta}(Y^N)) > 1\}} \frac{|n_{\Delta}(X^N) - n_{\Delta}(Y^N)|}{\max(n_{\Delta}(X^N), n_{\Delta}(Y^N)) - 1} \right) \\
&\leq \frac{1}{N} \sum_{\Delta} \mathbb{E} \left(1_{\{\max(n_{\Delta}(X^N), n_{\Delta}(Y^N)) > 1\}} \frac{\min(n_{\Delta}(X^N), n_{\Delta}(Y^N))}{\max(n_{\Delta}(X^N), n_{\Delta}(Y^N)) - 1} |n_{\Delta}(X^N) - n_{\Delta}(Y^N)| \right) \\
&\leq \frac{1}{N} \sum_{\Delta} \mathbb{E} \left(|n_{\Delta}(X^N) - n_{\Delta}(Y^N)| \right) \\
&\leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E} \left(\sum_{\Delta} |1_{\Delta}(X_i^N) - 1_{\Delta}(Y_i^N)| \right) \\
&\leq \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E} \left(1_{\{X_i^N \neq Y_i^N\}} \right) \leq 2Q_s
\end{aligned}$$

L'inégalité (2.8) fournit alors

$$B_s \leq 3Q_s \quad (2.9)$$

Conclusion

En regroupant (2.9) et (2.7) dans (2.4), on obtient

$$Q_t \leq \lambda \left(\left(\sqrt{\frac{|D|}{(N-1)|\Delta|}} + 2^d \sqrt{d} K |\Delta|^{\frac{1}{d}} \right) t + \int_0^t \int_{D^c} u(s, z) dz ds \right) + 3\lambda \int_0^t Q_s ds$$

D'après le lemme de Gronwall,

$$Q_t \leq \lambda \left(\left(\sqrt{\frac{|D|}{(N-1)|\Delta|}} + 2^d \sqrt{d} K |\Delta|^{\frac{1}{d}} \right) t + \int_0^t \int_{D^c} u(s, z) dz ds \right) e^{3\lambda t} \quad (2.10)$$

Soit $k \leq N$. Comme $P_k^{N, D, \Delta}$ et $P^{\otimes k}$ sont les lois respectives de $(X_1^N, V_1^N, \dots, X_k^N, V_k^N)$ et de $(Y_1^N, W_1^N, \dots, Y_k^N, W_k^N)$, la norme de variation de leur différence est inférieure au double de la probabilité pour que les deux processus diffèrent sur $[0, T]$. Avec (2.10), on en déduit (2.2). ■

Remarque 2.3 *En nous limitant au tore $T^d \simeq [0, 1]^d$ pour les positions des particules, comme le font Perthame et Pulvirenti [2], et en prenant $D = T^d$, nous aurions obtenu à la place de (2.2) une majoration en $2k\lambda \left(\sqrt{\frac{1}{(N-1)|\Delta|}} + 2^d \sqrt{d} K |\Delta|^{\frac{1}{d}} \right) T e^{3\lambda T}$ que l'on peut comparer avec leur résultat en $Ck\lambda e^{6\lambda T} \sqrt{|\Delta|^{\frac{1}{d}} + \frac{1}{N|\Delta|}}$. Comme $\sqrt{\frac{1}{(N-1)|\Delta|}} + 2^d \sqrt{d} K |\Delta|^{\frac{1}{d}} \leq \sqrt{2 \left(\frac{1}{(N-1)|\Delta|} + 4^d d K^2 |\Delta|^{\frac{2}{d}} \right)}$, notre majoration fournit une meilleure décroissance de la norme de variation avec $|\Delta|$. En outre, elle ne nécessite pas les hypothèses techniques de majoration et de minoration de f_0 faites par Perthame et Pulvirenti.*

Références

- [1] P.A. Meyer. *Probabilités et Potentiel*. Hermann, 1966.
- [2] B. Perthame and M. Pulvirenti. On some large systems of random particles which approximate scalar conservation laws. *Asymt. Anal.*, 10(3):263–278, 1995.
- [3] B. Perthame and E. Tadmor. A kinetic equation with kinetic entropy functions for scalar conservation laws. *Comm. Math. Phys.*, 136:501–517, 1991.
- [4] A.S. Sznitman. Equations de type de Boltzmann spatialement homogènes. *Z. Warsch. Verw. Geb.*, 66:559–592, 1984.