

***COMPARAISON DE DEUX METHODES DE
VOLUMES FINIS EN ELECTROMAGNETISME***

Jean-Pierre Cioni, Malika Remaki

N° 3166

Mai 1997

THÈME 4


*Rapport
de recherche*

COMPARAISON DE DEUX METHODES DE VOLUMES FINIS EN ELECTROMAGNETISME

Jean-Pierre Cioni, Malika Remaki

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet CAIMAN

Rapport de recherche n° 3166 — Mai 1997 — 28 pages

Résumé : Nous présentons dans ce rapport une comparaison de deux méthodes de volumes finis dans le domaine temporel appliquées à la résolution des équations de Maxwell. Les deux formulations diffèrent essentiellement dans la définition des volumes finis en maillages non structurés qui sont soit centrés aux noeuds ou bien centrés sur les éléments. Deux types de gradients sont également étudiés pour la deuxième formulation et diverses expériences numériques bidimensionnelles sont présentées afin de valider et comparer les différentes approches proposées.

Mots-clé : Electromagnétisme - Equations de Maxwell - Volumes finis - Eléments finis - Schémas décentrés.

Comparison between two finite volume methods in computational electromagnetics

Abstract: This report deals with a comparison between two time-domain finite volume methods which are used to solve the set of Maxwell equations with unstructured meshes. The two formulations mainly differ in the definition of the finite volumes which can be as well node centered as element centered. Two type of gradients are also proposed concerning the element centered approach and various 2D numerical applications are presented in order to test and compare the several approaches.

Key-words: Electromagnetism -Maxwell equations - Finite volumes - Finite elements - Accurate schemes.

Table des matières

1	Introduction	4
2	Système de Maxwell	5
2.1	Formulation conservative et hyperbolicité	5
2.2	Ondes en dimension deux d'espace	6
3	Approximation numérique	7
3.1	Présentation des deux méthodes de volumes finis	7
3.2	Formulation faible et flux décentré d'ordre un	8
3.3	Schémas d'ordre supérieur	10
3.3.1	Calcul des gradients par interpolation linéaire sur le maillage initial . .	10
3.3.2	Calcul des gradients par interpolation linéaire sur un maillage dual . . .	11
3.4	Traitement des conditions aux limites	12
3.5	Intégration en temps	15
4	Expériences numériques	16
4.1	Validation de la formulation VFCE	16
4.2	Comparaison des formulations VFCN et VFCE	16
4.3	Comparaison des deux méthodes de calcul du gradient	20
5	Conclusion	25
	Annexe	25
	Bibliographie	27

1 Introduction

Il est maintenant devenu relativement classique de considérer les équations de Maxwell instationnaires en tant que système conservatif hyperbolique [3, 18, 19]. L'utilisation de volumes finis pour la résolution numérique est alors naturelle et permet d'obtenir des schémas explicites en temps y compris pour des maillages non structurés de type éléments finis. De plus, des schémas numériques précis à la fois en temps et en espace ainsi qu'adaptés à divers dispositifs et matériaux peuvent être construits en utilisant le caractère hyperbolique du système.

La méthode des volumes finis requiert dans un premier temps une partition du domaine de calcul qui est issue du maillage initial constitué d'éléments finis. Le choix du type de volumes de contrôle n'est pas unique en maillage non structuré et l'on peut en distinguer classiquement au moins deux : les volumes finis centrés aux noeuds du maillage (notés VFCN et constitués de polygones ou polyèdres centrés aux noeuds) et les volumes finis centrés aux éléments (notés VFCE et qui sont les éléments du maillage initial). Nous disposons actuellement de la formulation VFCN pour la résolution des équations de Maxwell et celle-ci a été validée pour de nombreux dispositifs [3, 4, 6, 8]. D'autre part, des résultats théoriques ont été établis en ce qui concerne la précision et la stabilité des schémas numériques employés [9, 10].

L'intérêt du développement d'une formulation centrée aux éléments est essentiellement d'ordre géométrique, puisqu'elle permet de considérer beaucoup plus naturellement (en comparaison avec la formulation VFCN) des couches de matériaux différents ou des surfaces métalliques par exemple. Plusieurs codes numériques en formulation VFCE ont été développés à ce jour en électromagnétisme (cf. [1] en ce qui concerne la France) et les schémas employés sont généralement d'ordre deux en espace et en temps. Nous renvoyons d'autre part le lecteur à [2] pour des résultats théoriques au sujet de la formulation VFCE.

Dans ce rapport, nous proposons des schémas d'ordre élevé à la fois en temps et en espace pour la formulation VFCE. D'autre part, l'originalité de ce travail consiste en des comparaisons d'ordre qualitatif et quantitatif des deux formulations VFCE et VFCN sur un ensemble d'applications numériques bidimensionnelles. En effet, les deux approches n'ont pas à notre connaissance été réellement confrontées. Bien que les différences doivent s'accroître avec la complexité des dispositifs étudiés, nous avons dans un premier temps axé nos comparaisons autour d'applications assez simples afin de tester les schémas d'ordre élevé (utilisés initialement en formulation VFCN) et les conditions aux limites qui ont été prises en compte différemment. Ce rapport constitue donc le premier volet de la comparaison des deux méthodes de volumes finis.

2 Système de Maxwell

2.1 Formulation conservative et hyperbolicité

En l'absence de charges et de courants, le système de Maxwell peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{Q}_t + \mathbf{F}_1(\mathbf{Q})_x + \mathbf{F}_2(\mathbf{Q})_y + \mathbf{F}_3(\mathbf{Q})_z = 0 , \quad (1)$$

avec :

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \\ D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_1(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -D_z/\varepsilon \\ D_y/\varepsilon \\ 0 \\ B_z/\mu \\ -B_y/\mu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_2(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} D_z/\varepsilon \\ 0 \\ -D_x/\varepsilon \\ -B_z/\mu \\ 0 \\ B_x/\mu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_3(\mathbf{Q}) = \begin{pmatrix} -D_y/\varepsilon \\ D_x/\varepsilon \\ 0 \\ B_y/\mu \\ -B_x/\mu \\ 0 \end{pmatrix},$$

soit sous forme condensée :

$$\mathbf{Q}_t + \vec{\nabla} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = 0 , \quad (2)$$

avec $\mathbf{F}(\mathbf{Q}) = {}^t(\mathbf{F}_1(\mathbf{Q}); \mathbf{F}_2(\mathbf{Q}); \mathbf{F}_3(\mathbf{Q}))$.

Cette formulation conservative s'exprime donc en fonction de l'induction magnétique $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ et du déplacement électrique $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$. On note ε la permittivité du milieu et μ la perméabilité magnétique. Nous ne considérons ici que des matériaux isotropes et homogènes (ε et μ sont constants).

Le système (2) est hyperbolique. En effet, considérons la combinaison linéaire de flux suivante :

$$\mathcal{F}(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Q}) ,$$

où $\boldsymbol{\eta} = {}^t(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ est un vecteur non nul quelconque de \mathbb{R}^3 . La matrice jacobienne \mathcal{A} définie par :

$$\mathcal{A}(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{F}'(\mathbf{Q}) = \eta_1 \mathcal{A}_1 + \eta_2 \mathcal{A}_2 + \eta_3 \mathcal{A}_3 \quad , \quad (\mathcal{A}_i)_{i=1, \dots, 3} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}} \mathbf{F}_i(\mathbf{Q}) ,$$

est diagonalisable pour tout vecteur $\boldsymbol{\eta}$ non nul de \mathbb{R}^3 et pour tout vecteur \mathbf{Q} de \mathbb{R}^6 . Ses trois valeurs propres réelles de multiplicité double sont données par :

$$\lambda_1 = c \|\boldsymbol{\eta}\| , \quad \lambda_2 = -c \|\boldsymbol{\eta}\| , \quad \lambda_3 = 0 , \quad (3)$$

où $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$ désigne la vitesse de la lumière dans le milieu de propagation.

Ces propriétés du système de Maxwell sont à la base des méthodes de volumes finis et des schémas numériques que nous allons présenter.

2.2 Ondes en dimension deux d'espace

En dimension deux d'espace, les équations de Maxwell peuvent être découplées en deux systèmes de trois équations analogues associés aux ondes transverses magnétiques (TM) et aux ondes transverses électriques (TE) [15]. Nous avons choisi ici la direction suivant l'axe O_z comme direction privilégiée et le champ électromagnétique ne dépend que des deux variables d'espace x et y . La polarisation de l'onde précise alors la direction des champs de vecteurs.

Pour les ondes transverses magnétiques TM_z ($\mathbf{H} \cdot \mathbf{z} = 0$), on a $\mathbf{B} = {}^t(B_x, B_y, 0)$ et $\mathbf{D} = {}^t(0, 0, D_z)$ en coordonnées cartésiennes. Seules les composantes non nulles des inductions électrique et magnétique sont considérées. La formulation conservative bidimensionnelle en champ total et associée aux ondes transverses magnétiques s'écrit :

$$\mathbf{Q}_t + \mathbf{F}(\mathbf{Q})_x + \mathbf{G}(\mathbf{Q})_y = 0, \quad (4)$$

avec $\mathbf{Q} = {}^t(Q_1, Q_2, Q_3) = {}^t(B_x, B_y, D_z)$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -Q_3/\varepsilon \\ -Q_2/\mu \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{Q}) = \begin{Bmatrix} Q_3/\varepsilon \\ 0 \\ Q_1/\mu \end{Bmatrix}.$$

Pour les ondes transverses électriques TE_z ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{z} = 0$), le système conservatif garde la même forme que celle du cas TM_z . Nous nous intéresserons donc par la suite uniquement au cas transverse magnétique et l'on renvoie le lecteur à l'annexe 5.1 pour la forme explicite du système associé à la polarisation TE .

Le caractère hyperbolique des systèmes de Maxwell bidimensionnels TM et TE se montre de la même façon que pour le système de Maxwell tridimensionnel. D'autre part, la matrice jacobienne pour le système TM devient :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \eta_2/\varepsilon \\ 0 & 0 & -\eta_1/\varepsilon \\ \eta_2/\mu & -\eta_1/\mu & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Les valeurs propres, au nombre de trois maintenant et distinctes, restent identiques à celles du système complet (cf . Eq. (3)). Dorénavant, nous nous restreindrons aux problèmes bidimensionnels de propagation d'onde qui sont régis par les équations (4).

3 Approximation numérique

3.1 Présentation des deux méthodes de volumes finis

Le système de Maxwell en régime transitoire que nous étudions ici est linéaire, hyperbolique et conservatif en la variable Q . Ceci justifie l'approximation numérique basée sur des schémas décentrés que nous avons choisie, parfaitement adaptés et développés à l'origine pour la résolution numérique de tels systèmes. Le choix des volumes finis est en particulier dicté par la possibilité d'obtenir des schémas conservatifs explicites, y compris pour des maillages tridimensionnels non structurés de type éléments finis [3]. Il est également possible de définir des schémas d'ordre élevé pour ce type de méthode [9, 10].

L'idée de base de ces méthodes est de diviser le domaine spatial considéré en cellules appelées volumes finis et de former les équations discrètes à partir de la formulation faible du système de lois de conservation, écrite pour chaque cellule.

A partir d'un même maillage bidimensionnel de type éléments finis triangulaires, plusieurs choix sont alors possibles pour la définition des cellules, tout en gardant le même type de schémas numériques pour la résolution des équations.

Une méthode de volumes finis (que l'on notera VFCN par la suite) a été préalablement développée pour des volumes de contrôles constitués de polygones centrés autour des noeuds du maillage en dimension deux (fig. 1), et de polyèdres en dimension trois. Cette approche a notamment été validée en dimensions deux et trois d'espace pour les équations de Maxwell [3, 4, 5, 6].

Une autre possibilité est de prendre comme volumes de contrôle les éléments du maillage, plus précisément des triangles pour le cas bidimensionnel considéré (fig. 2). Les volumes finis sont alors dits centrés aux éléments et nous référencerons dans la suite par VFCE cette deuxième approche, qui a été proposée initialement par Durlofsky, Osher et Engquist pour les équations d'advection et de Burgers [12].

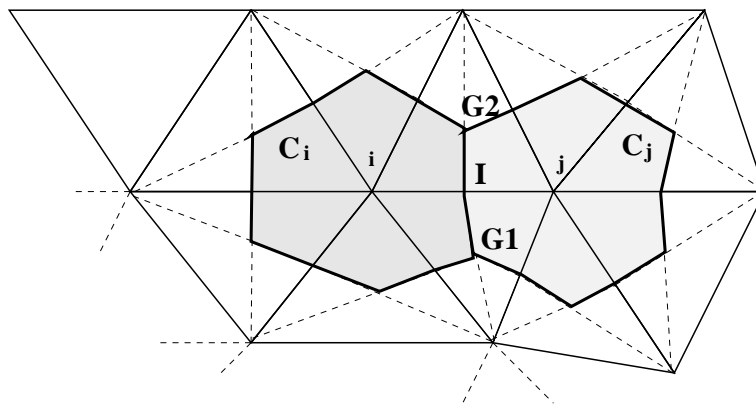


FIG. 1 – Cellule d'intégration C_i (méthode VFCN).

Remarque 3.1 L'interface entre deux cellules pour la méthode VFCN est une réunion de deux segments $[I, IG1]$ et $[I, IG2]$ (cf. fig. 1). En revanche, pour la méthode VFCE, les interfaces entre deux triangles (ou cellules) sont des segments de la triangulation (fig. 2).

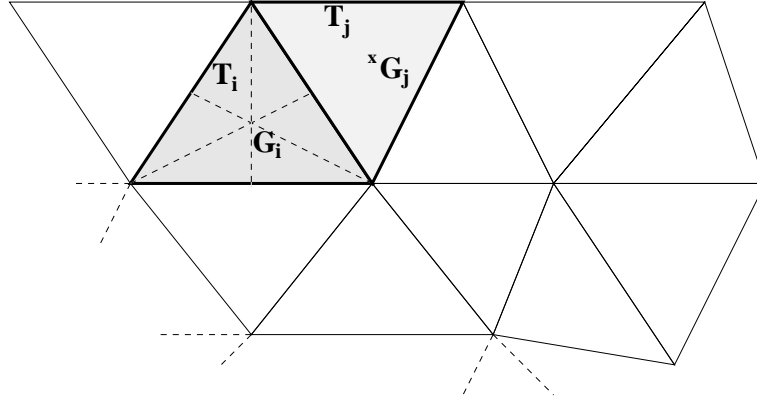


FIG. 2 – Cellule d'intégration T_i (méthode VFCE).

Les parties relatives aux schémas numériques sont très similaires pour les deux méthodes. Nous avons donc choisi de présenter ici la méthode VFCE en mettant en valeur ses particularités et différences par rapport à VFCN ainsi que les différents choix possibles inhérents à cette seconde approche (en ce qui concerne les conditions aux limites et le calcul des gradients par exemple). Nous renvoyons d'autre part le lecteur à [3, 7] pour plus de détails concernant la méthode de volumes finis centrés aux noeuds VFCN.

3.2 Formulation faible et flux décentré d'ordre un

Formulation faible

Soit une discrétisation par éléments finis P1 du domaine de calcul bidimensionnel Ω donnée par : $\Omega = \bigcup_{i=1}^{nt} T_i$, où T_i est un triangle et nt le nombre d'éléments.

Une formulation faible est obtenue en intégrant le système (4) sur chaque volume de contrôle ou triangle T_i en prenant comme fonctions test les fonctions caractéristiques des cellules. En supposant la dérivée partielle \mathbf{Q}_t constante en espace sur T_i , on obtient en utilisant une formule de Green, l'équation pour chaque triangle du maillage :

$$\text{Aire}(T_i) (\mathbf{Q}_t)_i + \int_{\partial T_i} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\sigma = 0, \quad (6)$$

où $\boldsymbol{\nu}$ est la normale unitaire extérieure à ∂T_i .

Le terme intégral dans l'équation (6) peut alors être décomposé en une somme de flux internes et de termes de bord :

$$\text{Aire}(T_i) (\mathbf{Q}_t)_i + \sum_{j=1}^3 \Phi_{ij} + \text{termes de bord} = 0, \quad (7)$$

où Φ_{ij} est une approximation que nous allons définir du flux interne $\int_{\partial T_i \cap \partial T_j} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\sigma$.

Flux décentré d'ordre un

Nous allons maintenant présenter la manière dont nous avons discrétisé les flux internes. Ce terme intégral est évalué comme suit :

$$\Phi_{ij} = \widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{Q}_h) \cdot \boldsymbol{\eta} ,$$

où $\boldsymbol{\eta} = {}^t(\eta_1, \eta_2) = \int_{\partial T_i \cap \partial T_j} \boldsymbol{\nu} d\sigma$ et $\widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{Q}_h)$ est une valeur approchée de $\mathbf{F}(\mathbf{Q}_h)$ le long de l'interface $\partial T_i \cap \partial T_j$. Nous nous sommes ainsi ramenés à l'évaluation de flux dans la direction de la normale $\boldsymbol{\eta}$ et donc à un problème monodimensionnel. On introduit alors une fonction de flux numérique Φ dépendant des deux états $\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_h(T_i)$ et $\mathbf{Q}_j = \mathbf{Q}_h(T_j)$ de part et d'autre de l'interface $\partial T_i \cap \partial T_j$:

$$\Phi_{ij} = \Phi(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_j) .$$

Définition 3.1 Soient $\mathbf{F} = {}^t(\mathbf{F}(\mathbf{Q}) ; \mathbf{G}(\mathbf{Q}))$ et \mathcal{A} définis respectivement par (4) et (5). Le flux numérique Φ est dit décentré s'il vérifie :

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{u}) + \mathbf{F}(\mathbf{v})}{2} \cdot \boldsymbol{\eta} - \frac{1}{2} |\mathcal{A}| (\mathbf{v} - \mathbf{u}) + O(|\mathbf{v} - \mathbf{u}|) ,$$

pour deux états voisins \mathbf{u} et \mathbf{v} .

Ceci est une extension directe de la définition du schéma décentré monodimensionnel de Lax, Harten et Van Leer (cf. [13, 17]) que nous avons appliquée au système de Maxwell.

Remarque 3.2 Dans le cas présent, le système étudié est linéaire et la matrice jacobienne \mathcal{A} ne dépend pas des variables \mathbf{u} et \mathbf{v} . Le terme en $O(|\mathbf{v} - \mathbf{u}|)$ est donc nul. D'autre part, le schéma est linéaire.

Il résulte de la linéarité du système de Maxwell que tous les flux décentrés d'ordre un sont identiques; il n'y a donc pas de choix parmi les schémas décentrés pour résoudre numériquement les équations de Maxwell en milieu homogène. Ils se réduisent tous en fait à un schéma ICR (Isaacson-Courant-Rees) vectoriel. On trouvera dans l'annexe 5.2 le flux Φ_{ij} explicité dans le cas du système de Maxwell bidimensionnel. D'autre part, nous renvoyons le lecteur à [2] pour des résultats de convergence de schémas décentrés d'ordre un pour la formulation VFCE.

Remarque 3.3 Les schémas d'ordre un étant identiques en milieu homogène, on peut donc utiliser indifféremment un solveur de Riemann ou la définition (3.1) pour calculer les flux internes. En revanche, seul le solveur de Riemann permet de construire le schéma adéquat en milieu hétérogène¹ vérifiant les conditions de saut des composantes tangentielles [8, 14].

Remarque 3.4 Ce schéma d'ordre un est similaire pour les méthodes VFCN et VFCE mais les flux sont échangés à travers des interfaces de cellules différentes (cf. figs 1 et 2).

Ces schémas conservatifs ne sont que d'ordre un en espace et nous allons maintenant décrire comment obtenir des schémas d'ordre supérieur à partir de la fonction de flux numérique Φ .

1. la jacobienne dépend alors des caractéristiques du milieu

3.3 Schémas d'ordre supérieur

Nous construisons maintenant un schéma d'ordre trois en espace en utilisant l'extension de la méthode MUSCL (Monotonic Upwind Schemes for Conservation Laws) de Van Leer aux éléments finis [13, 20]. Nous allons procéder de manière identique à ce qui a été fait pour la méthode VFCN [3].

Une manière d'obtenir un schéma d'ordre supérieur est d'augmenter le degré de l'interpolation dans une cellule et d'évaluer les flux à l'aide de valeurs extrapolées \mathbf{Q}_{ij} et \mathbf{Q}_{ji} à l'interface $\partial T_i \cap \partial T_j$. Cette extension nécessite l'évaluation du gradient de la solution sur chaque cellule. On notera que l'obtention de schémas d'ordre supérieur est assez directe par cette méthode puisque seule une modification des arguments de la fonction Φ est à réaliser par rapport au flux d'ordre un.

La fonction de flux d'ordre supérieur s'écrit :

$$\begin{cases} \Phi_{ij} = \Phi(\mathbf{Q}_{ij}, \mathbf{Q}_{ji}), \\ \mathbf{Q}_{ij} = \mathbf{Q}_i + \vec{\nabla} \mathbf{Q}_{T_i}(G_i) \cdot \overline{\mathbf{G}_i \mathbf{G}_{ij}}^{\rightarrow}, \\ \mathbf{Q}_{ji} = \mathbf{Q}_j + \vec{\nabla} \mathbf{Q}_{T_j}(G_j) \cdot \overline{\mathbf{G}_j \mathbf{G}_{ij}}^{\rightarrow}, \end{cases} \quad (8)$$

où G_i et G_j sont les centres de gravité des triangles T_i et T_j , et G_{ij} le point milieu de l'arête $\partial T_i \cap \partial T_j$.

Pour des raisons de précision et de stabilité [11], nous calculons en fait les nouvelles valeurs aux interfaces des cellules en introduisant un paramètre de décentrage et les schémas résultants sont connus sous le nom de β -schémas.

Ces valeurs interpolées sont calculées de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_{ij} = \mathbf{Q}_i + \frac{1}{2} \{ (1 - 2\beta)(\mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_i) + 4\beta \vec{\nabla} \mathbf{Q}_{T_i}(G_i) \cdot \overline{\mathbf{G}_i \mathbf{G}_{ij}}^{\rightarrow} \} \\ \mathbf{Q}_{ji} = \mathbf{Q}_j - \frac{1}{2} \{ (1 - 2\beta)(\mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_i) + 4\beta \vec{\nabla} \mathbf{Q}_{T_j}(G_j) \cdot \overline{\mathbf{G}_j \mathbf{G}_{ij}}^{\rightarrow} \} \end{cases}, \quad \beta \in (0, 1), \quad (9)$$

où $\vec{\nabla} \mathbf{Q}_{T_i}$ est un gradient de la solution sur le triangle T_i qui reste encore à définir.

Finalement, nous prenons $\beta = \frac{1}{3}$ comme paramètre de décentrage afin d'obtenir un schéma d'ordre trois en espace dans le cas de maillages structurés qui minimise la dispersion numérique. L'ordre trois de ce schéma a notamment été montré pour le système de Maxwell bidimensionnel [10], dans le cadre de la méthode VFCN et en utilisant des gradients qui sont des moyennes de gradients de Galerkin aux noeuds du maillage.

Dans la deuxième approche VFCE, diverses possibilités existent pour la définition des gradients et nous proposons ici d'en tester et comparer deux d'entre elles.

3.3.1 Calcul des gradients par interpolation linéaire sur le maillage initial

Nous proposons ici d'utiliser les fonctions linéaires sur chaque triangle du maillage. Il nous faut cependant définir dans un premier temps des valeurs aux noeuds du maillage puisque nous ne disposons que de valeurs constantes par triangles avec la méthode VFCE.

Les valeurs aux noeuds sont calculées à l'aide d'une moyenne pondérée par les aires des triangles :

$$\mathbf{Q}(S_i) = \frac{1}{\sum_{j, S_i \in T_j} Aire(T_j)} \sum_{j, S_i \in T_j} Aire(T_j) \mathbf{Q}|_{T_j},$$

où $\{S_i, i = 1, ns\}$ est l'ensemble des noeuds du maillage et $\mathbf{Q}|_{T_j}$ la valeur constante de la solution au barycentre de la cellule T_j .

A partir de l'interpolation linéaire sur les triangles, on obtient alors les gradients $\vec{\nabla} \mathbf{Q}_{T_i}$ constants par triangle :

$$\vec{\nabla} \mathbf{Q}_{T_i} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{Q}(S_i^k) {}^t \vec{\nabla} p_i^k. \quad (10)$$

où S_i^k ($k = 1, 3$), sont les trois sommets du triangle T_i et p_i^k ($k = 1, 3$), les fonctions de base linéaires associées aux trois points, définies localement sur T_i . Cette définition des gradients a été utilisée en particulier dans [18]. Comme cette définition utilise les gradients de Galerkin définis à partir des valeurs de la solution aux noeuds, on référencera par la suite cette définition par (GN) .

3.3.2 Calcul des gradients par interpolation linéaire sur un maillage dual

La première approche proposée pour le calcul des gradients de la solution sur les cellules triangulaires comporte cependant quelques inconvénients. La formule (10) réalise en effet une moyenne faisant intervenir de nombreuses valeurs autour de la cellule considérée. On se retrouve confronté notamment à des problèmes de définition des champs aux noeuds du maillage en milieu hétérogène, où certaines composantes des champs sont discontinues à travers les arêtes.

On cherche donc, à partir de valeurs données aux barycentres des triangles, à définir des gradients faisant intervenir uniquement les valeurs adjacentes à une cellule donnée. Nous avons repris ici une idée de Durlinsky, Osher et Engquist qui proposent un schéma d'ordre deux en maillage triangulaire. Dans cette étude, nous avons adapté au système de Maxwell bidimensionnel et au β -schéma cette idée initialement proposée pour l'équation d'advection linéaire et l'équation de Burgers. Nous allons maintenant rappeler brièvement la définition des gradients proposés et l'on pourra se référer à [12] pour de plus amples détails.

Trois interpolations linéaires associées à des triangles peuvent être définies sur $T_i = (ABC)$. Les trois candidats sont repérés sur la figure 3 par L_1, L_2 et L_3 .

Les gradients sur le triangle $L_1 = (i i_1 i_2)$ sont alors calculés classiquement à partir de l'interpolation linéaire :

$$\vec{\nabla} \mathbf{Q}_{L_1} = \mathbf{Q}|_{T_i} {}^t \vec{\nabla} p_1^i(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^2 \mathbf{Q}|_{T_k} {}^t \vec{\nabla} p_1^k(\mathbf{x}),$$

où p_1^k est la fonction de base linéaire définie localement sur le triangle L_1 et associée au noeud i_k (la fonction p_1^i étant associée au noeud i). On obtient des formules tout à fait analogues pour les triangles L_2 et L_3 avec une permutation circulaire de l'indice k .

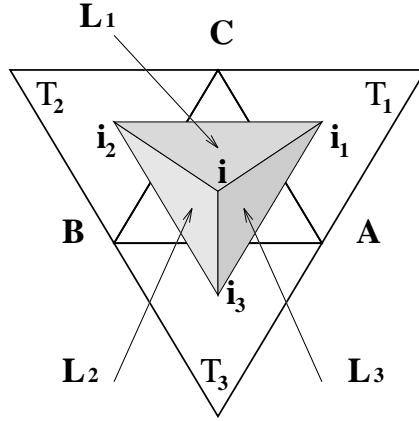


FIG. 3 – Interpolations possibles sur (ABC) .

On propose donc de calculer le gradient sur le triangle $T_i = (ABC)$ comme suit :

$$\vec{\nabla} Q_{T_i} = \frac{1}{\sum_{j=1}^3 \text{Aire}(L_j)} \sum_{j=1}^3 \text{Aire}(L_j) \vec{\nabla} Q_{L_j},$$

où $\{L_j, j = 1, 3\}$ est l'ensemble des trois candidats possibles (cf. fig 3). Nous avons supposé dans cette section que les trois points constituant chaque triangle L_j ne sont pas alignés. Comme cette définition utilise les gradients de Galerkin définis à partir des valeurs de la solution aux barycentres des triangles, on référencera par la suite cette définition par (GB) .

3.4 Traitement des conditions aux limites

Pour imposer les conditions aux limites dans un problème en électromagnétisme (et en particulier de diffraction), il est classique de distinguer la frontière de l'objet Γ_b et la frontière artificielle Γ_∞ délimitant le domaine de calcul.

On utilise sur la frontière artificielle Γ_∞ des conditions absorbantes afin de minimiser l'effet des ondes parasites dues à la troncature du domaine de propagation. En particulier, nous avons utilisé ici sur Γ_∞ un décentrage d'ordre un, ce qui permet de garder le même type d'approximation que pour les points internes [7].

Pour un objet métallique parfaitement conducteur, on impose sur Γ_b la condition (en terme de champ électrique total ici) : $\mathbf{n} \wedge \mathbf{E} = 0$. La bonne prise en compte de cette condition aux limites est essentielle pour l'obtention de solutions de qualité. L'utilisation dans la méthode VFCN de cellules centrées aux noeuds nous amène à tronquer les cellules du bord délimitant le domaine de calcul puisque des noeuds sont placés sur le bord du domaine (fig. 4). Nous sommes donc amenés à résoudre des équations aux dérivées partielles sur des semi-ouverts et ce défaut géométrique nous entraîne à faire un traitement qui n'est pas naturel avec l'utilisation de volumes finis et d'échanges de flux.

En revanche, dans l'approche VFCE des volumes finis centrés aux éléments, la même démarche que pour les points internes (échange de flux et techniques de décentrage) peut être

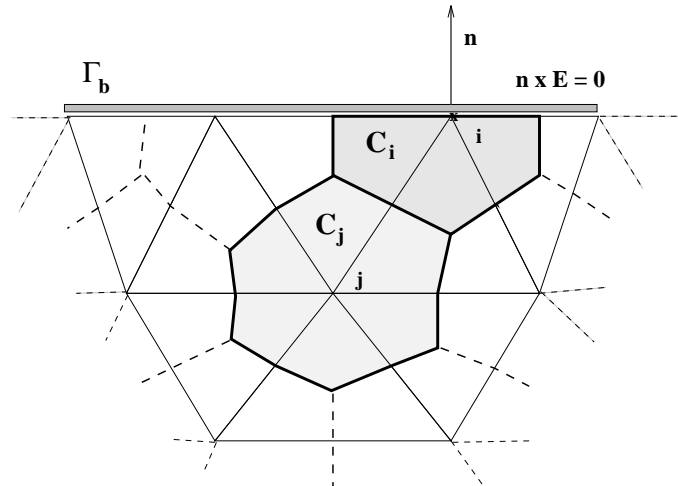


FIG. 4 – Cellule d’intégration C_i au bord (méthode VFCN).

développée pour ce type de conditions aux limites. Les cellules internes et au bord sont en effet identiques (fig. 5).

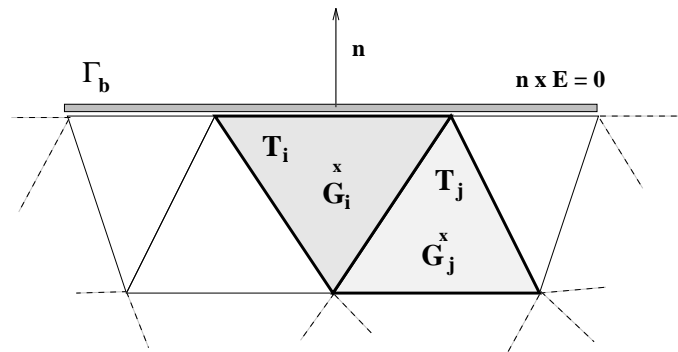


FIG. 5 – Cellule d’intégration T_i au bord (méthode VFCE).

Nous proposons donc pour la méthode VFCE de calculer les flux associés à la condition aux limites $\mathbf{n} \wedge \mathbf{E} = 0$ par l’intermédiaire d’un “demi-problème de Riemann”, nommé ainsi puisque l’état au-delà de la frontière n’est pas connu.

Remarque 3.5 *En ce qui concerne les flux internes, nous rappelons que tous les schémas décentrés d’ordre un sont identiques dans le cadre de notre étude. Nous avons choisi ici de les expliciter à l’aide de la définition de Lax-Harten-Van Leer (cf. def. 3.1). Une autre possibilité est de les présenter comme le résultat de la résolution (ici exacte) d’un problème de Riemann (solveur de Godunov ou solveur de Riemann exact [8, 14, 17]). Dans le cas où les cellules sont internes, les états sont connus de part et d’autre de l’interface.*

On considère maintenant le système de Maxwell dans la direction de la normale au bord Γ_b notée $\mathbf{n} = {}^t(n_1, n_2)$. Le demi-problème de Riemann considéré est alors le problème de Cauchy

et aux limites suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_t + \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \mathcal{A}(\mathbf{Q}) = 0 & , \mathbf{x} \in T_i, t \in [t^n, t^{n+1}] , \\ \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t = t^n) = \mathbf{Q}^n & , \mathbf{x} \in T_i , \\ \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}^{inc}(\mathbf{x}) & , \mathbf{x} \in \Gamma_b \cap \partial T_i . \end{cases} \quad (11)$$

La donnée initiale \mathbf{Q}^n est constante sur le triangle T_i et correspond à la solution des équations de Maxwell au temps t^n . En se plaçant dans la direction de la normale, on peut alors ne considérer qu'un problème monodimensionnel facile à résoudre.

Le champ $\mathbf{E}^{inc} = {}^t(E_1^{inc}, E_2^{inc}, E_3^{inc})$ est une fonction vectorielle donnée et régulière. Dans des problèmes de diffraction, \mathbf{E}^{inc} peut être le champ électrique incident éclairant l'obstacle lorsque les équations sont résolues en champ diffracté. Pour une résolution en champ total, cette fonction vectorielle est nulle.

La solution dans l'espace-temps du demi-problème de Riemann considéré est schématisée sur la figure 6. Elle est composée de deux états constants \mathbf{Q}^n (donnée initiale) et \mathbf{Q}^* qui reste à déterminer pour expliciter les flux aux bords qui s'écrivent :

$$\Phi_b = \mathcal{A}\mathbf{Q}^* .$$

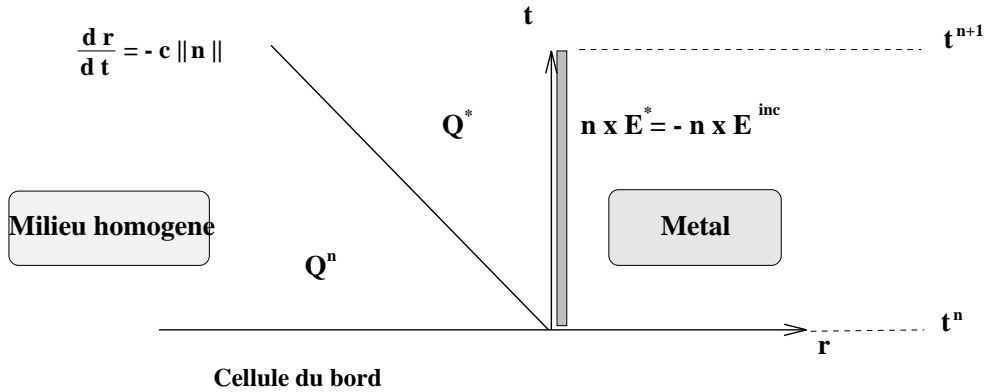


FIG. 6 – Problème de Riemann au bord.

Les deux états \mathbf{Q}^n et \mathbf{Q}^* sont séparés par la droite de discontinuité d'équation $\frac{dr}{dt} = -c \|\mathbf{n}\|$. On pose $\mathbf{Q}^* = {}^t(Q_1^*, Q_2^*, Q_3^*)$ où les composantes sont dans un premier temps celles associées à la polarisation TM . De $\mathbf{E}^{inc} = {}^t(0, 0, E_3^{inc})$, on obtient alors à partir de la condition aux limites l'équation $Q_3^* = -\varepsilon E_3^{inc}$.

D'autre part, on a la relation de saut suivante :

$$\mathcal{A}(\mathbf{Q}^* - \mathbf{Q}^n) = -c \|\mathbf{n}\| (\mathbf{Q}^* - \mathbf{Q}^n) ,$$

qui permet d'expliciter entièrement le flux au bord :

$$\Phi_b = \|\mathbf{n}\| \begin{pmatrix} -(n_2 E_3^{inc}) \\ (n_1 E_3^{inc}) \\ (n_2 Q_1^n - n_1 Q_2^n)/\mu + Q_3^n/\varepsilon + E_3^{inc} \end{pmatrix} .$$

Par un calcul similaire, on obtient dans le cas TE le flux suivant :

$$\Phi_b^{TE} = \|\mathbf{n}\| \begin{pmatrix} -(n_2 Q_3^n)/\mu \\ (n_1 Q_3^n)/\mu \\ -(n_2 E_1^{inc} - n_1 E_2^{inc}) \end{pmatrix} .$$

3.5 Intégration en temps

Après avoir explicité la discrétisation spatiale, on obtient le système semi-discret suivant associé à chaque cellule T_i (les indices sont ici omis) :

$$\mathbf{Q}_\tau + \Psi(\mathbf{Q}) = 0 ,$$

où Ψ représente la discrétisation spatiale.

Les problèmes instationnaires nécessitent une intégration en temps très précise. La manière la plus simple de construire des schémas précis en temps est d'utiliser une méthode explicite de Runge-Kutta multi-pas. On obtient finalement pour un schéma à k pas :

$$\begin{cases} \mathbf{Q}^0 = \mathbf{Q}^n , \\ \mathbf{Q}^l = \mathbf{Q}^0 - \frac{\Delta t}{(k+1-l)} \Psi(\mathbf{Q}^{l-1}) \quad l = 1, 2, \dots, k , \\ \mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^k . \end{cases}$$

où Δt est le pas de discrétisation en temps. Comme le système de Maxwell est linéaire, le schéma explicite à trois pas ($k = 3$) est d'ordre trois en temps. Associé au β -schéma en espace, le schéma ainsi construit est à la fois d'ordre trois en espace et d'ordre trois en temps [11]. Le lecteur trouvera également des détails complémentaires sur la stabilité du β -schéma pour le système de Maxwell et la formulation VFCN dans [9].

4 Expériences numériques

4.1 Validation de la formulation VFCE

Evolution d'un mode dans une cavité carrée

On considère une cavité métallique carrée de côté $a = 1 m$. Les expressions analytiques des modes de résonance sont connus pour cette géométrie [16] et nous proposons ici de suivre l'évolution en temps du mode (1,1) pour le cas transverse magnétique. Cette expérience académique nous permet de valider le β -schéma appliqué à la formulation VFCE et le traitement des conditions aux limites de métal parfait avec le solveur de Riemann exact.

Nous avons pris comme donnée initiale l'expression analytique du mode (1,1) au temps $t = 0$. Les erreurs en norme $\| \cdot \|_2$ des composantes de la solution numérique par rapport à la solution exacte ont ensuite été calculées après un temps $t = 5 ns$. Le schéma utilisé pour l'approche VFCE est un β -schéma en espace avec $\beta=1/3$, et un schéma de Runge-Kutta à trois pas pour l'intégration en temps.

On note E1, E2 et E3 les erreurs associées aux composantes H_x , H_y et E_z . Nous avons reporté dans le tableau 1 ces erreurs en fonction du pas d'espace pour un ensemble de trois grilles régulières (maillages en triangles). Nous rappelons que les calculs ont été effectués pour une même condition CFL, d'où une variation du nombre d'itérations en temps suivant la grille pour atteindre le temps requis.

grille	E1	E2	E3	itérations
20×20	$3.2 \cdot 10^{-5}$	$3.2 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-5}$	58
40×40	$3.2 \cdot 10^{-6}$	$3.2 \cdot 10^{-6}$	$1.7 \cdot 10^{-6}$	117
80×80	$4.0 \cdot 10^{-7}$	$4.0 \cdot 10^{-7}$	$2.0 \cdot 10^{-7}$	234

TAB. 1 – Erreur en norme $\| \cdot \|_2$ en fonction du pas d'espace (formulation VFCE).

Les comparaisons avec la solution exacte se révèlent très satisfaisantes et l'on peut également remarquer que pour ce cas test, l'erreur est divisée par au moins huit en divisant le pas d'espace par deux. Il semble donc que l'on retrouve les mêmes caractéristiques que celles du schéma en formulation VFCN. En effet, les résultats théoriques obtenus dans [9] montrent que ce schéma est d'ordre trois en grilles structurées pour la formulation VFCN.

4.2 Comparaison des formulations VFCN et VFCE

Il existe différentes façons de comparer des méthodes et nous avons ici retenu comme critère de base l'utilisation de maillages identiques. Deux types de cas test seront étudiés : un calcul de spectre de résonance et un calcul de SER (Surface Equivalente Radar). D'autre part, nous avons utilisé pour les deux formulations VFCE et VFCN d'ordre supérieur les gradients définis à partir des valeurs aux noeuds du maillage (gradients GN).

Calcul de modes de résonance

Nous proposons maintenant de calculer le spectre de résonance de la même cavité carrée métallique. Cette expérience est également intéressante puisque les solutions exactes sont connues [16].

Dans un premier temps, le champ électromagnétique est initialisé par une gaussienne centrée en un point de la cavité et après une évolution transitoire de la solution, on effectue une transformée de Fourier de la solution pour obtenir le spectre. Nous avons reporté sur la figure 7 le spectre du champ total E_z en fonction de la fréquence. Il a été obtenu après 2364 itérations en temps pour les deux méthodes (même pas de temps et un maillage qui correspond à environ 28 points par longueur d'onde pour la première fréquence qui est égale à 0.2121 GHz). Les flèches verticales représentent les fréquences de résonance exactes de la cavité. Sur les dix premiers modes, la plupart sont capturés par les deux méthodes. Cependant on peut remarquer que la formulation VFCE est plus précise dans la bande de hautes fréquences du spectre étudié.

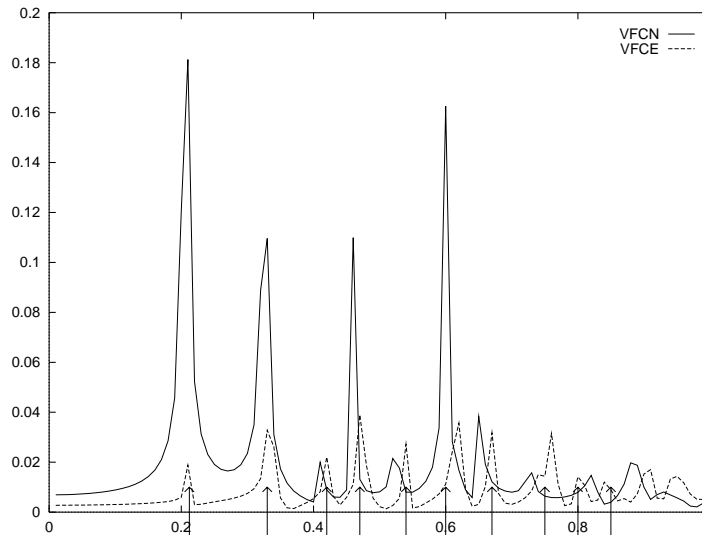


FIG. 7 – Spectre de résonance de la cavité carrée.

Calcul de SER

Ce cas test consiste à éclairer un disque de rayon $R = 2.5 m$ par une onde plane monochromatique de longueur d'onde $\lambda = (2 * \pi) / k = 3 m$. Le maillage utilisé est composé de 6016 noeuds et la discrétisation spatiale correspond environ à 14 points par longueur d'onde.

Le champ électrique diffracté E_z après convergence vers l'état périodique est représenté pour les deux méthodes sur la figure 8. Les deux approches ont reproduit des résultats très similaires.

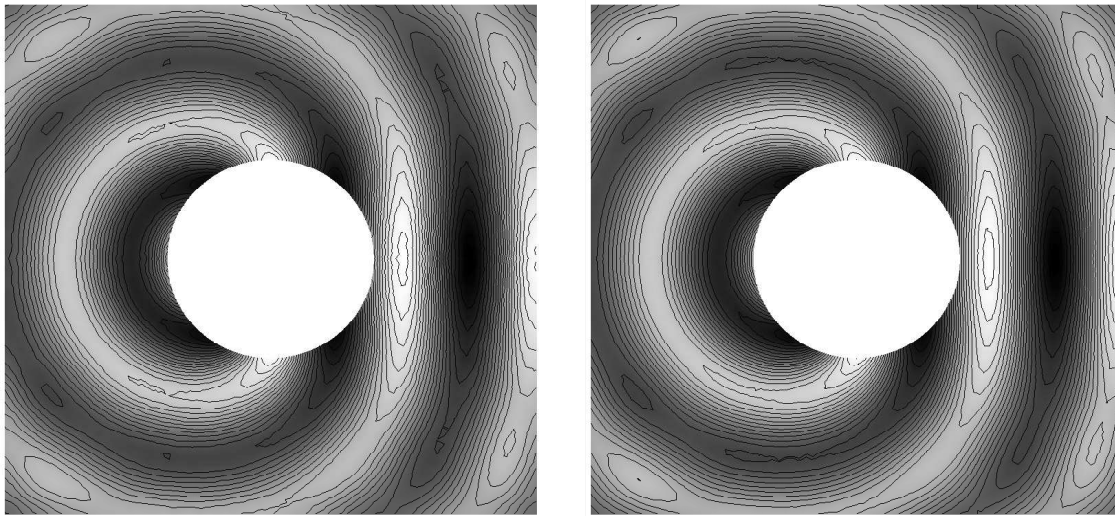


FIG. 8 – Champ diffracté E_z (méthode VFCE à gauche, VFCN à droite).

A l'aide d'une transformée de Fourier en temps et d'une formule de rayonnement des champs, on obtient le diagramme de SER. Il représente l'intensité du champ diffracté à l'infini dans le domaine fréquentiel, cette quantité étant repérée en coordonnées polaires (angles de 0 à 360°). Nous avons reporté sur la figure 9 les diagrammes de SER relatifs à la solution exacte et aux solutions approchées obtenues par les deux formulations. On peut remarquer que les solutions numériques se comparent bien à la solution exacte et qu'elles sont de même qualité. Ensuite, nous avons calculé l'écho radar (à $\theta = 0$) en fonction de la fréquence (à maillage fixé). Les deux méthodes donnent des résultats comparables jusqu'à $k \cdot R = 15$ (environ 14 points par longueur d'onde), mais la méthode VFCE s'avère plus précise sur l'ensemble des fréquences étudiées (figure 10). En effet, la méthode VFCN ne donne plus de résultats significatifs à partir de $k \cdot R = 30$ (environ 7 points par longueur d'onde), alors que la formulation VFCE permet d'atteindre $k \cdot R = 50$.

Coûts CPU

On représente dans le tableau 2 les coûts en temps CPU des méthodes VFCE et VFCN pour le cas test précédent (calcul de SER). On peut remarquer que le temps de calcul ramené à une itération est pratiquement le même pour les deux méthodes. Ceci est tout à fait logique puisque le nombre de flux à évaluer est identique dans les deux cas. Cependant, la formulation VFCE requiert une valeur du nombre CFL inférieure à celle utilisée avec VFCN d'où un coût plus important de la simulation globale.

méthode	VFCE	VFCN
CFL	1	1.3
temps/itération (s)	0.98	0.99
temps global (s)	400	324

TAB. 2 – Coûts en temps CPU.

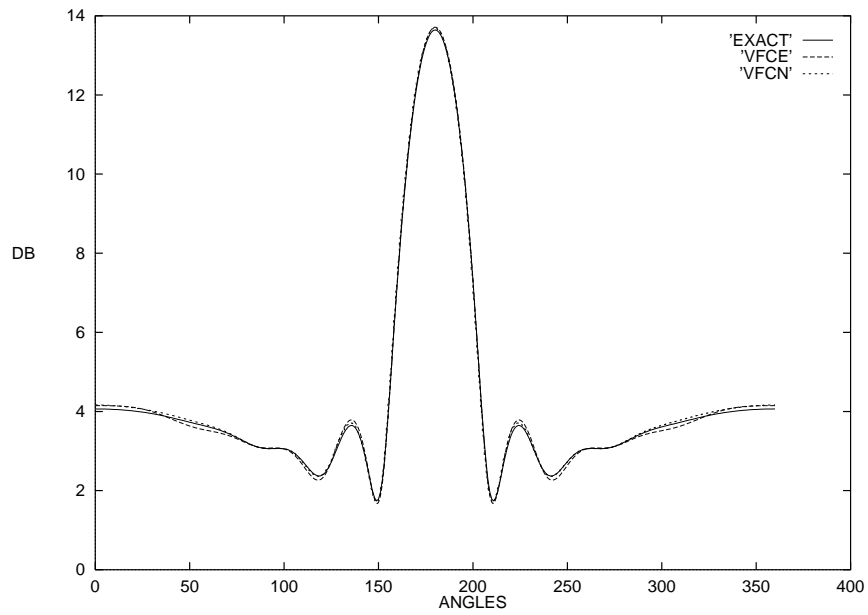


FIG. 9 – Diagrammes de SER du disque pour les méthodes VFCE et VFCN.

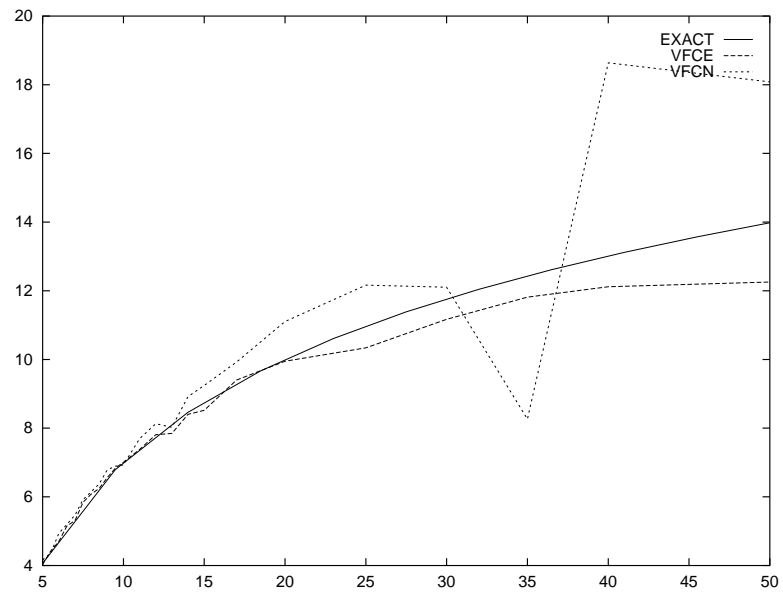


FIG. 10 – Echo radar en fonction de $k \cdot R$ ($\theta = 0$) pour les deux méthodes VFCE et VFCN .

Conclusion

Pour certains calculs comme ceux dits internes (cavités) ou externes (SER), les méthodes VFCN et VFCE donnent des résultats de qualité équivalente pour des maillages identiques. On notera d'autre part que la formulation VFCE est environ deux fois plus coûteuse (à cause de la condition CFL). Elle a cependant l'avantage de traiter des problèmes avec des fréquences deux fois plus grandes que celles tolérées par la méthode VFCN. Ce résultat n'est pas surprenant puisque l'on a environ deux fois plus de degrés de liberté pour la méthode VFCE.

4.3 Comparaison des deux méthodes de calcul du gradient

Dans le cadre de la formulation VFCE, nous avons proposé deux approches pour le calcul des gradients de la solution. Nous n'avons jusqu'à présent utilisé que le gradient GN qui est défini à partir des valeurs de la solution aux sommets du maillage initial. Dans cette section, plusieurs cas tests nous serviront à comparer les deux méthodes de calcul du gradient GN et GB (définition à partir des valeurs aux barycentres).

Calcul d'erreur pour le mode de résonance (1,1)

Nous avons ici repris le cas test associé à la cavité carrée de la section 4.1. La figure 11 représente les coupes (en $y = 0$) des solutions numériques obtenues avec les gradients GN et GB. Les solutions sont données au temps $t = 13,33 \text{ ns}$ (soit 317 itérations du schéma de Runge-Kutta à trois pas) et le nombre CFL a été fixé à 1.

Sur la figure 12, les courbes représentent l'évolution en temps du mode de résonance en un point de la cavité. On remarque que les deux courbes se comparent bien dans les deux cas et approchent bien la solution exacte.

D'autre part, nous avons évalué sur une grille structurée l'erreur en norme $\| \cdot \|_2$ des trois composantes du champ électromagnétique (cf. section 4.1). On note toujours E1, E2 et E3 les erreurs associées aux composantes H_x , H_y et E_z . Le calcul d'erreur a été effectué pour la grille 20×20 au temps $t = 13,33 \text{ ns}$ (cf. Tab. 3).

type de gradient	E1	E2	E3
GN	$3.2 \cdot 10^{-5}$	$3.2 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-5}$
GB	$7.3 \cdot 10^{-5}$	$7.3 \cdot 10^{-5}$	$2.3 \cdot 10^{-5}$

TAB. 3 – Erreur en norme $\| \cdot \|_2$ pour les deux types de gradient.

On remarque que les erreurs calculées sur les trois champs sont faibles quelque soit le type de gradient employé. Cependant, l'erreur est plus faible pour le gradient utilisant les valeurs aux noeuds (GN).

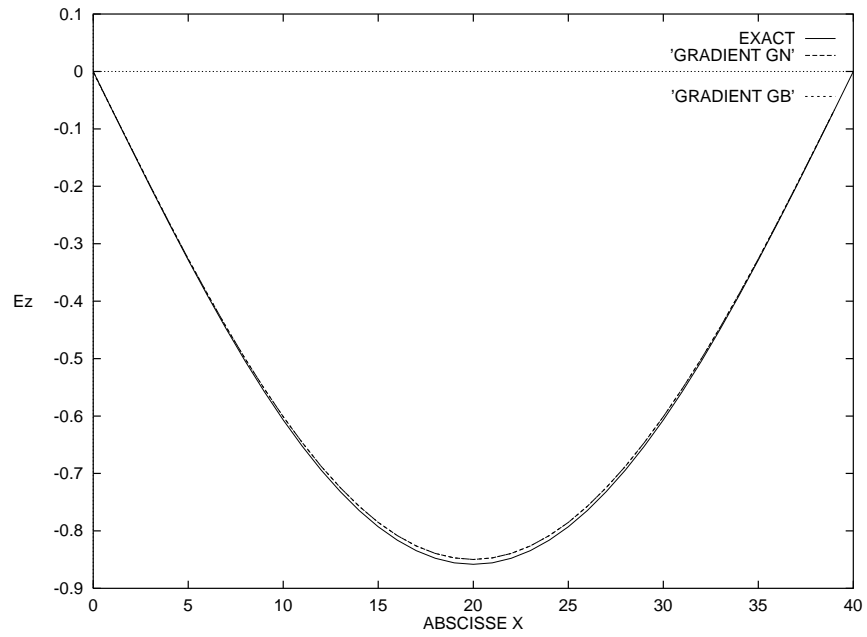


FIG. 11 – Coupe en $y = 0$ pour le mode de résonance (1,1).

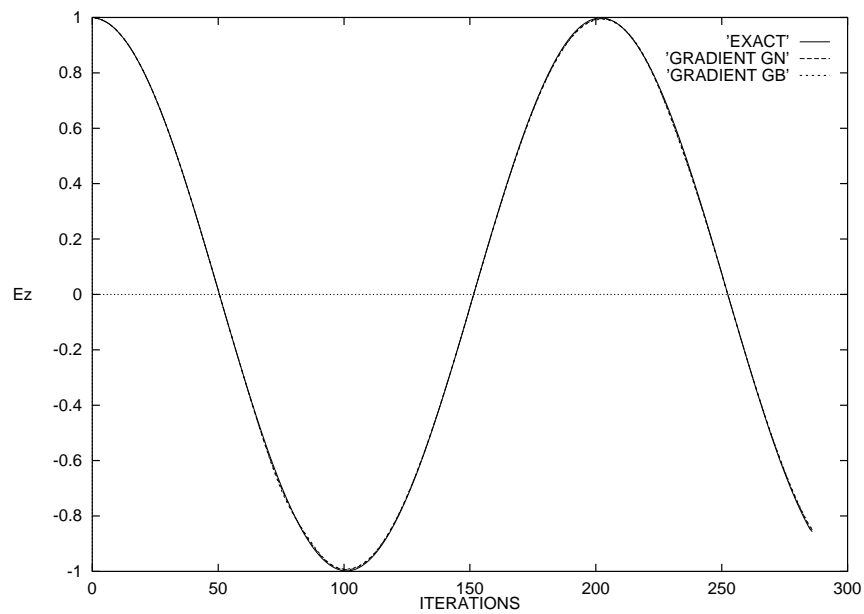


FIG. 12 – Evolution en temps du mode de résonance (1,1).

Spectre de résonance

La même expérience que celle présentée à la section 4.2 a été réalisée. Le spectre du champ E_z est représenté sur la figure 13 et les deux courbes associées aux gradients GN et GB sont très proches.

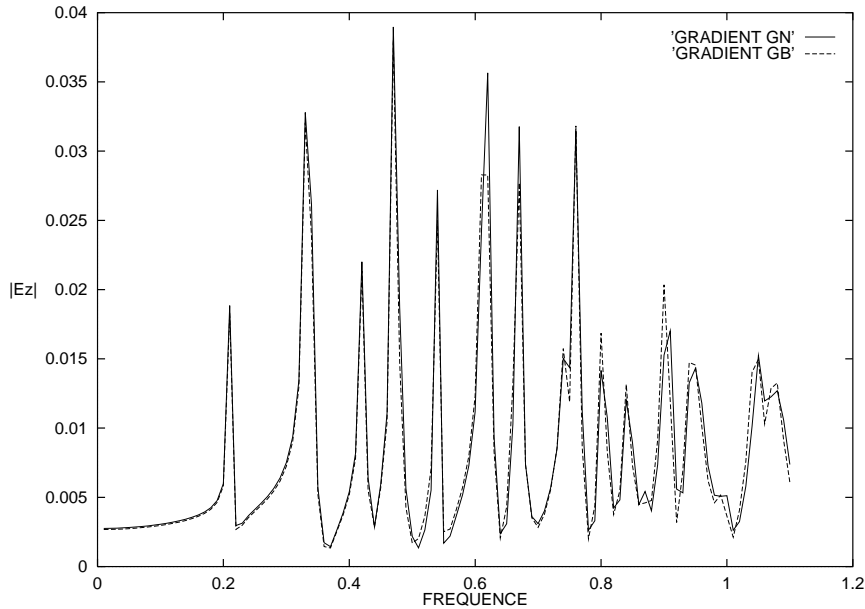


FIG. 13 – Spectre de résonance de la cavité carrée.

Calcul de SER

Nous avons ici repris la géométrie du disque définie dans la section 4.2 et l'on a calculé le diagramme de SER. La figure 14 représente les courbes obtenues par la méthode VFCE en utilisant les deux méthodes de calcul du gradient. Toutes deux se comparent bien à la solution exacte.

On peut noter également le peu de différences entre les deux gradients sur les isovaleurs du champ électrique pour une régularité C_∞ de l'onde incidente (fig. 15).

Diffraction par une impulsion

On s'intéresse maintenant à la simulation de la diffraction par une impulsion sur le disque. L'onde incidente illumine le côté droit de l'obstacle et elle est obtenue après troncature d'une onde plane, en prenant le signal sur une demi-longueur d'onde pour une fréquence de 0.1 GHz et nul sinon. On notera que la composante E_z associée à cette impulsion est de classe C_0 sur \mathbb{R} contrairement à la figure 15.

La figure 16 représente les isovaleurs du champ total E_z après un temps de simulation $t = 3,33 \text{ ns}$. Les isovaleurs associées aux deux gradients sont de même qualité.

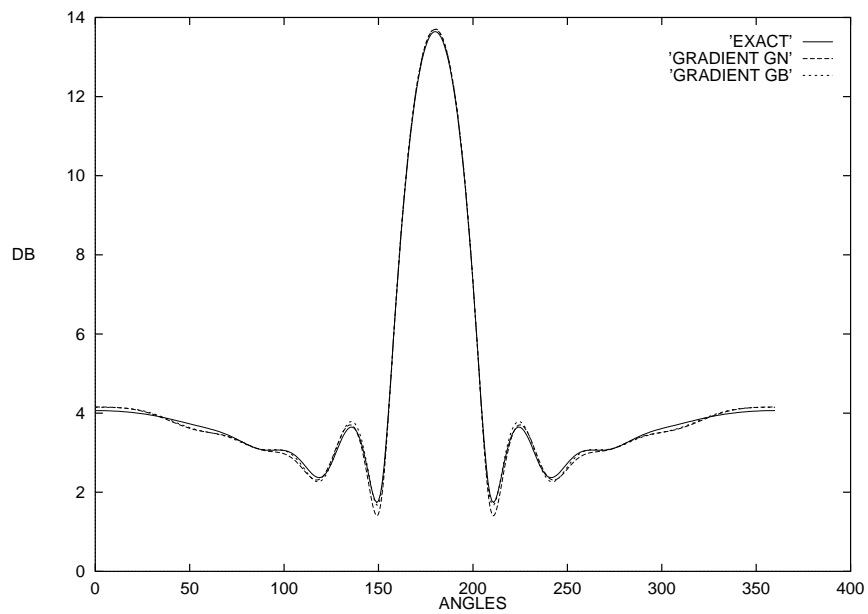


FIG. 14 – Diagramme de SER du disque.

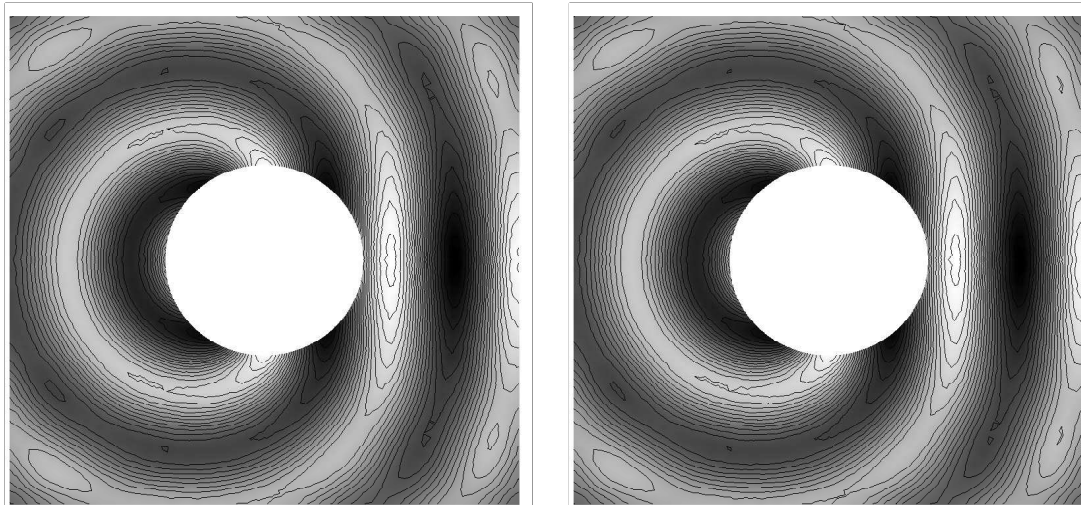


FIG. 15 – Champ total E_z pour une onde plane (gradients GN à gauche, GB à droite).

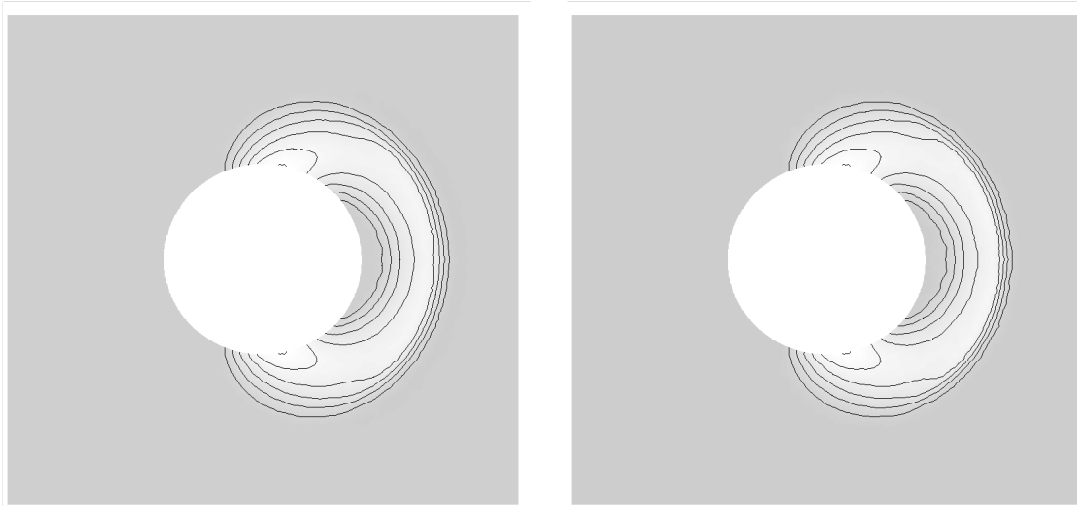


FIG. 16 – Champ total E_z pour une impulsion (gradients GN à gauche, GB à droite).

Coûts CPU

Nous avons reporté dans le tableau 4 le coût CPU ramené à une itération des deux types de gradients pour la même application. On peut noter que le gradient GN est trois fois moins coûteux que le gradient GB. Ceci n'est pas surprenant puisque le calcul du gradient GB fait intervenir trois triangles pour chaque cellule T_i .

type de gradient	GN	GB
temps (s)	2.10^{-2}	6.10^{-2}

TAB. 4 – Temps CPU pour les deux types de gradients.

5 Conclusion

Les deux méthodes de volumes finis (VFCE-centrée aux éléments et VFCN-centrée aux noeuds) ont été confrontées sur la base de plusieurs types d'applications numériques, qu'il s'agisse de calculs de surface équivalente radar, de champ diffracté ou de résonance. Des comparaisons à la fois d'ordre quantitatif et qualitatif montrent que les deux méthodes donnent des résultats de bonne qualité. Bien que la formulation VFCN soit moins coûteuse du fait d'une condition CFL moins restrictive, la méthode VFCE présente l'avantage de résoudre des problèmes avec des fréquences plus élevées (à maillage identique).

Il est donc intéressant de poursuivre le développement de l'approche VFCE et de faire des développements spécifiques à cette approche. Elle devrait effectivement permettre de considérer plus naturellement des dispositifs incluant des couches de matériaux ou des surfaces infiniment minces. D'autre part, l'étude des gradients définis à partir de valeurs aux barycentres (GB) constitue une première étape aux spécificités de la formulation VFCE. Elle demande cependant à être complétée par des expériences en milieu hétérogène qui devraient mettre plus à son avantage le gradient GB.

De nouvelles études qui concernent aussi bien les milieux hétérogènes que la dimension trois en espace sont en cours de réalisation.

Annexe

Annexe 5.1 : Forme conservative des équations de Maxwell en polarisation transverse électrique TE_z .

La formulation conservative bidimensionnelle en champ total et associée aux ondes transverses électriques s'écrit :

$$\mathbf{Q}_t + \mathbf{F}(\mathbf{Q})_x + \mathbf{G}(\mathbf{Q})_y = 0 ,$$

et les composantes non nulles du champ électromagnétique sont :

$$\mathbf{Q} = {}^t(-D_x, -D_y, B_z) .$$

On obtient alors :

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -Q_3/\mu \\ -Q_2/\varepsilon \end{Bmatrix} , \quad \mathbf{G}(\mathbf{Q}) = \begin{Bmatrix} Q_3/\mu \\ 0 \\ Q_1/\varepsilon \end{Bmatrix} .$$

On peut remarquer que les flux \mathbf{F} et \mathbf{G} redonnent exactement ceux du cas TM en échangeant seulement ε et μ dans les équations.

Annexe 5.2 : Flux numériques décentrés d'ordre un pour le système de Maxwell.

Soient $\mathbf{F} = {}^t(\mathbf{F}(\mathbf{Q}); \mathbf{G}(\mathbf{Q}))$ et \mathcal{A} définis respectivement par (4) et (5). On pose alors $\mathcal{F}(\mathbf{Q}, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{Q})$.

En milieu homogène, les flux échangés d'une cellule T_j vers une cellule adjacente T_i s'écrivent alors pour le système de Maxwell bidimensionnel :

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} &= \Phi(\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_j, \boldsymbol{\eta}), \\ &= \frac{\mathcal{F}(\mathbf{Q}_i, \boldsymbol{\eta}) + \mathcal{F}(\mathbf{Q}_j, \boldsymbol{\eta})}{2} - \frac{|\mathcal{A}(\boldsymbol{\eta})|}{2} (\mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_i), \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\eta} = {}^t(\eta_1, \eta_2)$ est la normale à l'interface $\partial T_i \cap \partial T_j$ orientée de T_i vers T_j .

En posant maintenant $\xi_1 = \frac{\eta_1}{\|\boldsymbol{\eta}\|}$, $\xi_2 = \frac{\eta_2}{\|\boldsymbol{\eta}\|}$, on obtient :

$$|\mathcal{A}| = c \|\boldsymbol{\eta}\| \begin{pmatrix} (\xi_2)^2 & -\xi_1 \xi_2 & 0 \\ -\xi_1 \xi_2 & (\xi_1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathcal{F} = \|\boldsymbol{\eta}\| \begin{pmatrix} (\xi_2 Q_3)/\varepsilon \\ -(\xi_1 Q_3)/\varepsilon \\ -(\xi_1 Q_2 - \xi_2 Q_1)/\mu \end{pmatrix}.$$

Annexe 5.3 : Matrices de passage pour la diagonalisation du système de Maxwell bidimensionnel.

La matrice \mathcal{A} définie par (5) est diagonalisable dans \mathbb{R} et la matrice de ses valeurs propres associées s'écrit :

$$\Lambda = c \|\boldsymbol{\eta}\| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice \mathcal{A} peut donc se mettre sous la forme $\mathcal{A} = T \Lambda T^{-1}$ avec :

$$T = \begin{pmatrix} \xi_2 & -\xi_2 & \xi_1 \\ -\xi_1 & \xi_1 & \xi_2 \\ Z & Z & 0 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi_2 & -\xi_1 & 1/Z \\ -\xi_2 & \xi_1 & 1/Z \\ 2\xi_1 & 2\xi_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

où $Z = \mu c$ est l'impédance du milieu de propagation et $\boldsymbol{\xi}$ le vecteur défini dans l'annexe 5.2.

Références

- [1] BONNET P. - FERRIERES X. - PALADIAN F. - GRANDO J. - ALLIOT J.C. - FONTAINE J., *Antenna radiation patterns using a finite volume code*, actes de la conférence JINA 96, Nice, (nov. 1996).
- [2] CHAMPIER S., *Convergence de schémas numériques type volumes finis pour la résolution d'équations hyperboliques*, Thèse de l'Université de Saint-Etienne, (1992).
- [3] CIONI J.P., *Résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires par une méthode de volumes finis*, Thèse de doctorat de l'Université de Nice Sophia-Antipolis, (1995).
- [4] CIONI J.P., *Parallelisation of MAXWELL/VF and 3D simulations in electromagnetism using clusters of workstations*, rapport CERMICS No 97-85, (1997).
- [5] CIONI J.P. - FEZOU L. - STEVE H., *A parallel time-domain Maxwell solver using upwind schemes and triangular meshes*, IMPACT in computing in science and engineering, Vol 5, pp. 215-247, (1993).
- [6] ————, *RCS calculations using a parallel time-domain Maxwell solver on nonstructured meshes*, actes de la conférence "Approximations and numerical methods for the solution of the Maxwell equations" et du workshop "Joint US-Europe workshop on numerical methods for solving high frequency electromagnetic problems", Washington, (octobre 1993).
- [7] CIONI J.P. - FEZOU L. - ISSAUTIER D., *High-order upwind schemes for solving time-domain Maxwell equations*, La Recherche Aérospatiale, Vol 5, pp. 319-328, (1994).
- [8] CIONI J.P. - FEZOU L. - ANNE L. - POUPAUD F., *A parallel FVTD Maxwell solver using 3D unstructured meshes*, actes de la conférence ACES 97, Monterey (US), (à paraître, mars 1997).
- [9] DEPEYRE S., *Stability analysis for finite volume schemes on rectangular and triangular meshes applied to the two-dimensional Maxwell system*, rapport CERMICS No 95-40, (1995).
- [10] DEPEYRE S. - ISSAUTIER D., *Application aux schémas volumes finis d'une méthode de pénalisation des contraintes pour le système de Maxwell*, rapport CERMICS No 95-39, (1995).
- [11] DESIDERI J.A. - GOUDJO A. - SELMIN V., *Third order numerical schemes for hyperbolic problems*, rapport INRIA No 607, (1987).
- [12] DURLOFSKY L.J. - OSHER S. - ENGQUIST B., *Triangle based TVD scheme for hyperbolic conservation laws*, rapport ICASE No 90-10, janvier 1990.
- [13] FEZOU L. - STOUFFLET B., *A class of implicit upwind schemes for Euler simulations with unstructured meshes*, J. Comp. Phy., vol 84, pp. 174-206, (1989).

- [14] GIMONET G. - CIONI J.P. - FEZOU L. - POUPAUD F., *Approximation numérique des équations de Maxwell en milieu hétérogène monodimensionnel par un solveur de Riemann exact*, rapport CERMICS N° 95-37, (Avril 1995).
- [15] HECHT E. - ZAJAC A., *OPTICS*, Addison-Wesley World Student Series, (1974).
- [16] JACKSON J.D., *Classical Electrodynamics*, seconde édition, John Wiley & Sons, New-York, (1975).
- [17] LAX P.D. - HARTEN A. - VAN LEER B., *On upstream differencing and Godunov type schemes for hyperbolic conservation laws*, SIAM Revue, Vol 25, No 1, (1983).
- [18] LOHNER R. - AMBROSIANO J., *A finite element solver for the Maxwell equation*, GAMNI-SMAI conference on numerical methods for the solution of Maxwell equation, Paris, (1989).
- [19] SHANKAR V. - HALL W.F. - MOHAMMADIAN A.H., *A time-domain differential solver for electromagnetic scattering problem*, *Proceeding on the IEEE*, Vol 77, pp. 709-721, No 5, (1989).
- [20] VAN LEER B., *Towards the ultimate conservative difference schemes V: a second order sequel to Godunov's method*, J. Comp. Phy., Vol 32, (1979).



Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unité de recherche INRIA Rennes, Irista, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
ISSN 0249-6399