

Note sur le calcul de solutions du modèle LWR avec condition initiale $K > K_{max}$

J.P. LEBACQUE ¹

Janvier 1997

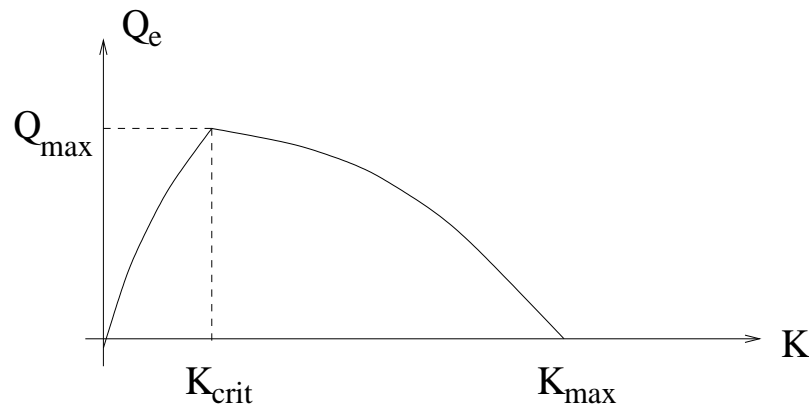
1 Introduction

Le modèle macroscopique du premier ordre d'écoulement du trafic de Lighthill-Whitham-Richards [LW 55], [RI 56] (dénomé LWR dans la suite) s'écrit:

$$(1) \quad \frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} Q_e(K, x) = 0$$

où:

- x, t désignent la position et la vitesse,
- K désigne la concentration, fonction de x et de t ,
- $Q_e(K, x)$ désigne la fonction débit d'équilibre. Comme fonction de la concentration, celle-ci traduit le *diagramme fondamental*; la fonction $Q_e(\cdot, x)$ doit être concave différentiable par morceaux, conformément à l'illustration ci-après. Q_e contient implicitement tous les aspects comportementaux du modèle. Q_e doit également dépendre de la position, puisqu'aussi bien la géométrie des infrastructures que le comportement des usagers peuvent en dépendre. Cette dépendance peut admettre des discontinuités, comme souligné dans [LE 95-96] et pourra dans la majorité des cas être considérée comme constante par morceaux.



¹ Adresse: CERMICS-ENPC, 6 et 8 avenue Blaise Pascal, Cite Descartes - Champs-sur-Marne, 77455 MARNE-LA-VALLEE Cedex 2, FRANCE
téléphone: +33 1 64 15 35 81, Fax: +33 1 64 15 35 86
email: lebacque@cermics.enpc.fr

Pour des conditions initiales à t_0 , $K(t_0) \stackrel{def}{=} K(., t_0)$, comprises entre 0 et K_{max} , i.e.

$$0 \leq K(x, t_0) \leq K_{max}(x) \quad (\forall x) \quad ,$$

la solution entropique de (1), $K(., t)$ satisfait aux mêmes inégalités à tout instant ultérieur:

$$0 \leq K(., t) \leq K_{max}(.) \quad (\forall t \geq t_0) \quad .$$

Par monotonie du schéma de Godunov, il en est de même des solutions discrétisées de (1) obtenues au moyen de ce schéma, tel qu'il est décrit dans [LE 95-96]. En d'autres termes, et contrairement à ce qui se passe pour les modèles du second ordre comme celui de Payne [PAY 71], l'obtention de solutions satisfaisant à $K > K_{max}$ est en principe exclue.

Il peut donc paraître paradoxal et sans objet de s'intéresser à des solutions de (1) satisfaisant à $K > K_{max}$ à un instant donné. En vérité la recherche de telles solutions ne peut être pertinente que dans des contextes très particuliers, impliquant une discontinuité temporelle de la loi d'équilibre Débit-Concentration Q_e . En toute rigueur, on devrait donc considérer la fonction d'équilibre comme une fonction du temps t en plus des variables K et x : $Q_e(K, x, t)$. A ce titre, la présente note doit être considérée comme un prolongement du rapport [LE 95-96] auquel il est du reste abondamment fait référence dans la suite de la présente note. Le dépassement de la concentration maximale ne peut résulter d'aucun autre mécanisme dans le modèle LWR, lorsque l'on se restreint aux solutions entropiques de ce modèle ainsi que cela a été rappelé plus haut. La situation de trafic typique se traduisant par une discontinuité temporelle de la loi d'équilibre Débit-Concentration est celle d'un incident avec restriction de capacité de stockage. Pour la modélisation des incidents et leur classification dans le cadre des modèles LWR on se reportera à [MO 97] et [BLLM 96]. Le plan de la note est le suivant. Après un bref rappel des principes de résolution qui s'appliquent lorsque $K > K_{max}$, on décrira les solutions du problème de Riemann lorsque l'une de ses données satisfait à $K > K_{max}$, puis on décrira à titre d'illustration la solution analytique obtenue dans le cas d'un incident avec restriction de la capacité de stockage. On vérifiera aussi que le schéma de Godunov reste pertinent dans ces conditions, à condition d'utiliser pour le flux de Godunov l'expression suivante:

$$(2) \quad \text{flux} = \text{Min}[\text{Offre aval}, \text{Demande amont}] \quad ,$$

introduite dans [LE 95-96].

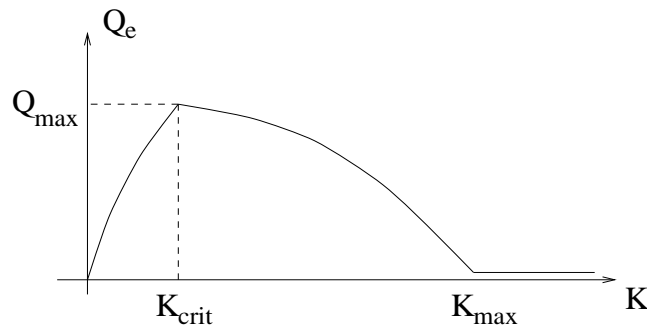
2 Principes de la résolution du problème de Riemann, offre et demande de trafic.

2.1 Principes du calcul analytique.

Le fait de considérer la possibilité $K > K_{max}$ implique que l'on prolonge la loi d'équilibre Débit-Concentration Q_e par

$$Q_e(K, x) \stackrel{def}{=} 0 \quad \text{si } K > K_{max} \quad .$$

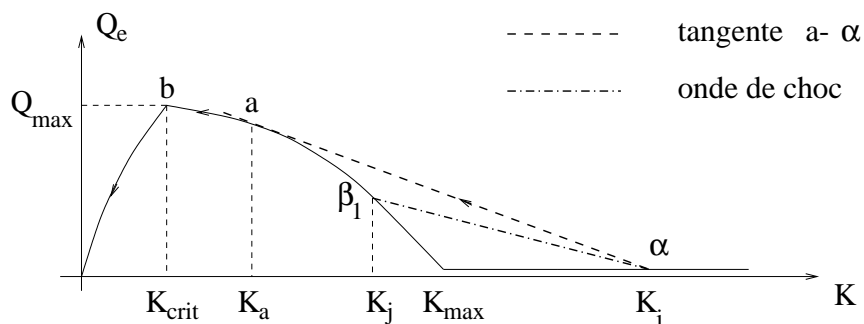
Ce prolongement est illustré ci-après:



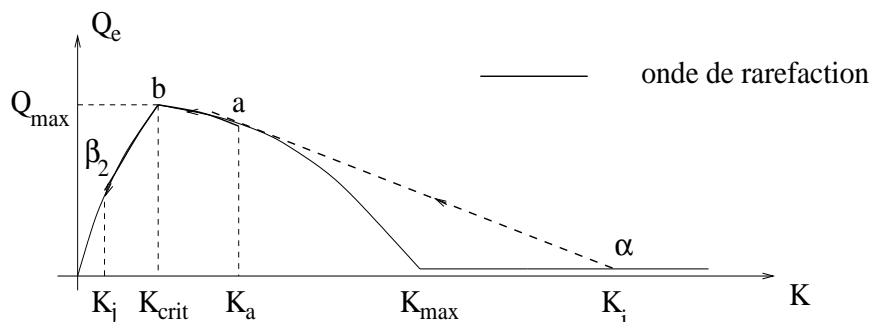
On notera que ce prolongement ne modifie en rien la définition des fonctions d'équilibre d'offre et de demande telles qu'elles sont introduites dans [LE 95-96]. Par contre, la loi d'équilibre Débit-Concentration ainsi définie n'est pas concave, ce qui modifie de manière sensible le calcul des solutions analytiques. Pour une description générale des modifications qui peuvent résulter de la non-concavité de la fonction flux pour le calcul analytique des solutions d'une équation de conservation, et plus précisément des solutions du problème de Riemann associé, on se reportera à la section II.6 de [GR 91].

D'une façon générale, dans le cas du problème de Riemann classique (Q_e indépendant de la position x) associé au modèle LWR (1), ou bien dans le cas d'une discontinuité initiale, lorsque l'une des conditions initiales satisfait à $K_i > K_{max}$, on doit considérer le diagramme fondamental prolongé, et on note K_j l'autre condition initiale. Soient α et β les points correspondants à K_i et K_j sur le diagramme fondamental, et a le point défini par la condition que la tangente à la courbe représentative de Q_e passe par α , ainsi que cela est illustré ci-après. On note K_a la concentration associée à ce point. Ce point a peut le cas échéant être confondu avec le point b associé à la concentration critique (et au débit maximum), à condition que K_i soit suffisamment grande et que $\frac{\partial Q_e}{\partial K}$ soit discontinue en $K = K_{crit}$.

Il importe de distinguer deux cas. Le premier cas est celui où le trafic accélère et où par conséquent la concentration K égale $K_i > K_{max}$ en amont de la discontinuité (prise comme origine) et K_j en aval de la discontinuité. Le second cas est celui d'une décélération du trafic, la concentration passant de K_j en amont de la discontinuité à $K_i > K_{max}$ en aval de celle-ci.

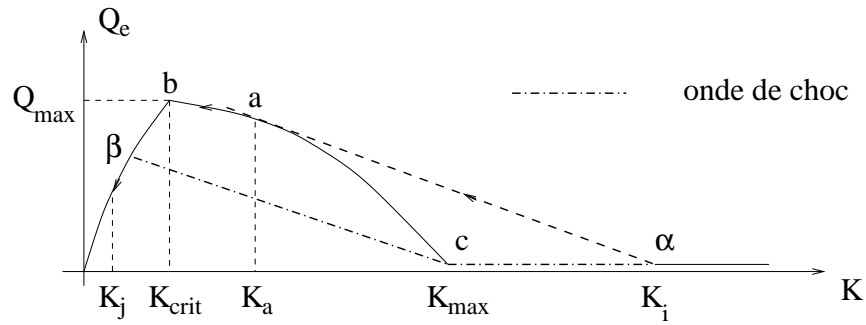


Problème de Riemann, accélération du trafic. La règle du calcul est la suivante. Si β est situé à droite de a , soit β_1 , i.e. la concentration K_j est surcritique et $K_j \geq K_a$, la solution entropique comporte initialement une onde de choc $\alpha \rightarrow \beta_1$ (figure ci-dessus). Si β est situé à gauche de a , soit β_2 , i.e. $K_j \leq K_a$, ce qui inclut le cas où K_j est souscritique et celui où K_j est légèrement surcritique, la solution initiale comporte une onde de choc $\alpha \rightarrow a$ et une onde de raréfaction (i.e. éventail) $a \rightarrow b \rightarrow \beta_2$.



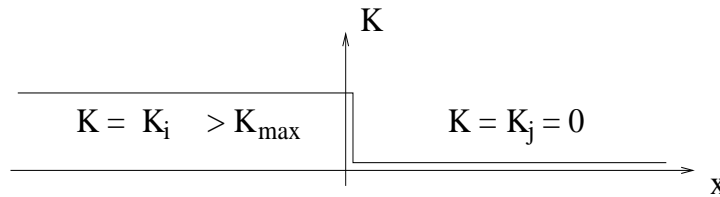
Problème de Riemann, décélération du trafic. La règle du calcul est la suivante. Quelle que soit la position de β , la solution est constituée d'une onde de choc $\beta \rightarrow c$, où c désigne le

point représentatif de K_{max} sur le diagramme fondamental, et d'une onde de choc $c \rightarrow \alpha$, ainsi que cela est illustré par la figure ci-après.



2.2 Calcul de l'offre et de la demande locales, pour $K > K_{max}$.

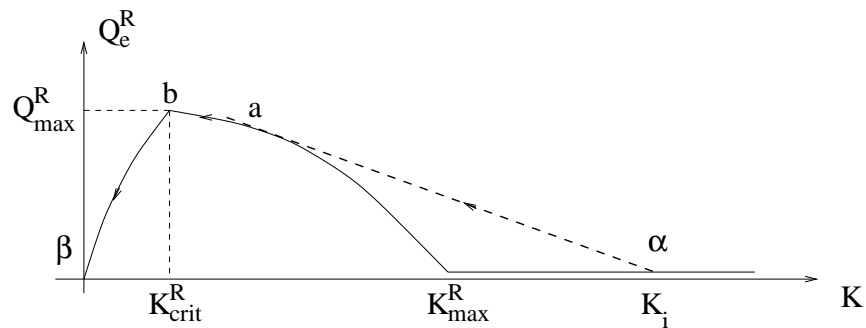
Cette méthode est illustrée par le calcul de l'offre et de la demande locales de trafic pour des concentrations supérieures à K_{max} . Rappelons que la demande locale de trafic en un point x est le plus grand débit sortant possible en ce point, et l'offre locale de trafic en un point x est le plus grand débit entrant possible en ce point. Pour calculer la demande locale $\Delta_e(K_i, x)$ pour $K_i > K_{max}(x-)$, on considère le problème de Riemann suivant:



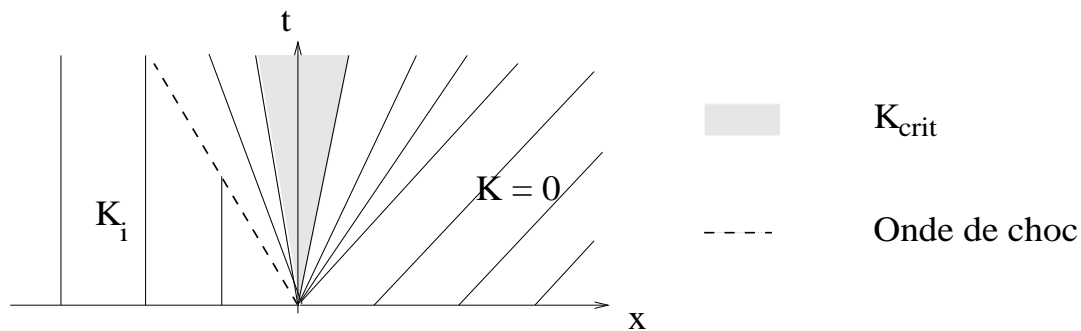
On prendra pour fonction d'équilibre Q_e^R pour ce problème la fonction $Q_e(\cdot, x-)$, soit:

$$Q_e^R(\cdot, y) \stackrel{def}{=} Q_e(\cdot, x-) \quad (\forall y) \quad .$$

La solution de ce problème est illustrée par le diagramme fondamental suivant:



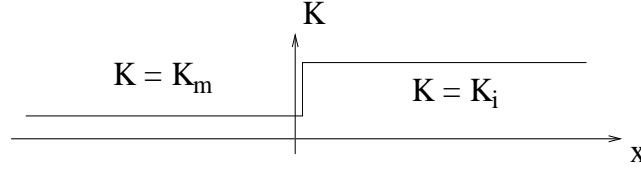
et par le diagramme de caractéristiques suivant:



Il en résulte trivialement que

$$(3) \quad \Delta_e(K, x) = Q_{max}(x-) \quad \text{si } K > K_{max}(x-) \quad .$$

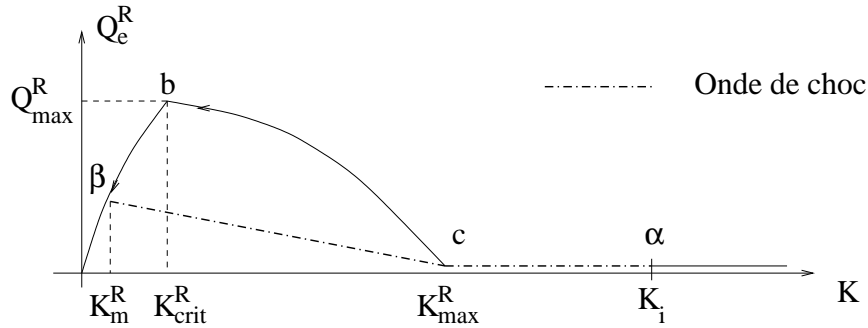
Déterminons maintenant l'offre locale de trafic $\Omega_e(K_i, x)$ pour $K_i > K_{max}(x-)$. Pour cela nous allons considérer le problème de Riemann défini par les conditions initiales suivantes:



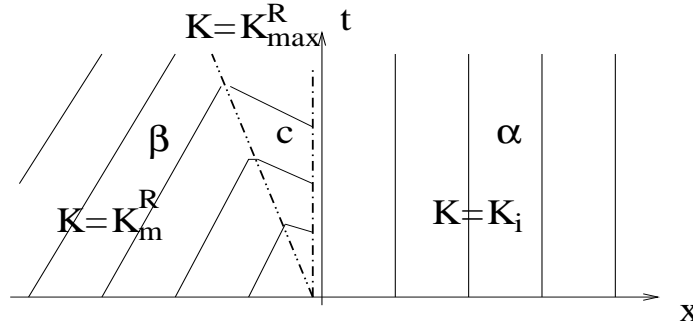
On prendra pour fonction d'équilibre Q_e^R pour ce problème la fonction $Q_e(\cdot, x+)$, soit:

$$Q_e^R(\cdot, y) \stackrel{def}{=} Q_e(\cdot, x+) \quad (\forall y) \quad .$$

Comme conséquence triviale de la règle de calcul énoncée plus haut, la solution est composée de deux ondes de choc stationnaires $\beta \rightarrow c$ et $c \rightarrow \alpha$:



ce qui est illustré par le diagramme de caractéristiques suivant:



Il en résulte trivialement que

$$(4) \quad \Omega_e(K, x) = 0 \quad \text{si } K > K_{max}(x+) \quad .$$

3 Résolution du problème de Riemann généralisé, avec une condition initiale $K_i > K_{max}$.

3.1 Rappels, notations.

Le problème de Riemann généralisé est caractérisé par le fait que la fonction $x \rightarrow Q_e(\cdot, x)$ n'est pas nécessairement constante, mais peut admettre deux valeurs, en amont et en aval de la discontinuité à l'origine: $Q_e(\cdot, m)$ et $Q_e(\cdot, v)$. Les symboles m et v représentent respectivement des

quantités relatives à l'amont et à l'aval de la discontinuité. On s'efforce de calculer une solution de type entropique, caractérisée à la traversée de la discontinuité par les propriétés suivantes (voir [LE 95-96]):

- conservation du débit,
- conservation de l'état du trafic (sur- ou souscritique) et donc du signe de la pente des caractéristiques, pour ce qui est de la réfraction de celles-ci,
- maximisation du débit (en cas d'existence de solutions multiples, notamment en cas d'accélération du trafic),
- invariance dans le plan (x, t) de la solution (autosimilarité).

Les difficultés principales sont observées en cas d'accélération du trafic. Dans ce cas, c'est la valeur du débit au droit de la singularité dont la valeur (maximale) permet de construire la solution de part-et-d'autre de la singularité, par les règles usuelles lorsque la concentration est inférieure à la concentration maximale, et les règles énoncées plus haut (sous-section 2.1) sinon. Les solutions du problème de Riemann généralisé seront décrites par leurs diagrammes de caractéristiques. La classification des différents cas possibles sera effectuée:

1. selon que $K_i > K_{max}$ soit la condition initiale amont ou aval du problème,
2. selon les valeurs respectives des offre aval et demande amont à l'origine (i.e. la singularité).

Compte tenu de ce qui précède, le débit à l'origine (qui sera précisé dans chaque cas) est constant dans le temps (après l'instant initial) par autosimilarité, et borné supérieurement par

$$\text{Min} [\text{Offre aval}, \text{Demande amont}] \quad .$$

On vérifiera à chaque fois qu'il est égal à cette borne, ce qui déterminera la solution de manière unique.

Précisons quelques notations:

- m, v représentent l'amont et l'aval de la singularité,
- $Q_e(., m), Q_e(., v)$ désignent le débit d'équilibre en amont et en aval de la singularité,
- $Q_{m,max}, Q_{v,max}$ désignent les débits maximaux en amont et en aval de la singularité,
- $K_{m,max}, K_{v,max}$ désignent les concentrations maximales en amont et en aval de la singularité,
- $K_{m,crit}, K_{v,crit}$ désignent les concentrations critiques en amont et en aval de la singularité,
- K_m, K_v désignent les concentrations initiales en amont et en aval de la singularité,
- $Q_m = Q_e(K_m, m), Q_v = Q_e(K_v, v)$ désignent les débits initiaux en amont et en aval de la singularité.
- Δ_m, Ω_v désignent la demande initiale amont et l'offre initiale aval,

Ces dernières quantités sont calculées par les formules:

$$(5) \quad \begin{aligned} \Omega_v &= \Omega_e(K_v, v) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} Q_{v,max} & \text{si } K_v \leq K_{v,crit} \\ Q_e(K_v, v) & \text{sinon,} \end{cases} \\ \Delta_m &= \Delta_e(K_m, m) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} Q_e(K_m, m) & \text{si } K_v \leq K_{m,crit} \\ Q_{m,max} & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Les fonctions Ω_e et Δ_e ainsi définies sont les fonctions *d'offre et de demande d'équilibre*. Notons Q_0 le débit à l'origine après l'instant initial (constant). Il doit satisfaire à:

$$0 \leq Q_0 \leq \text{Min}[\Omega_v, \Delta_m] \quad .$$

Passons maintenant à la résolution.

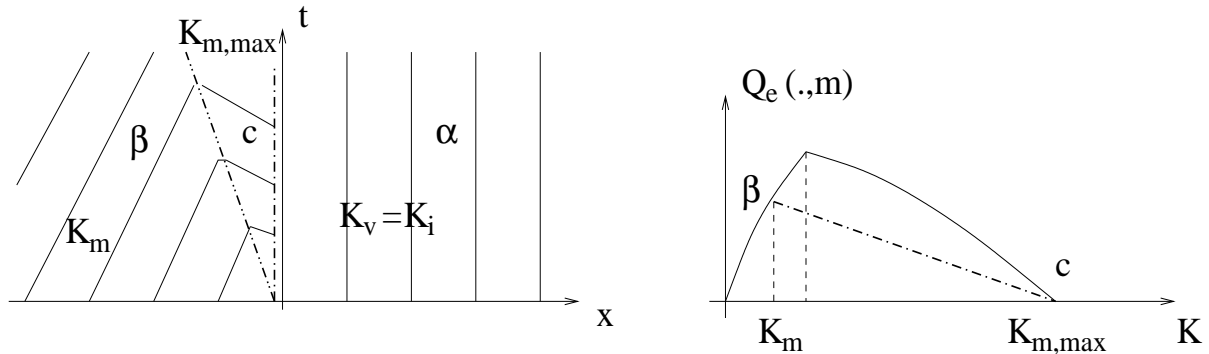
3.2 Cas $K_v = K_i > K_{v,max}$

Alors, $\Omega_v = 0$ et donc:

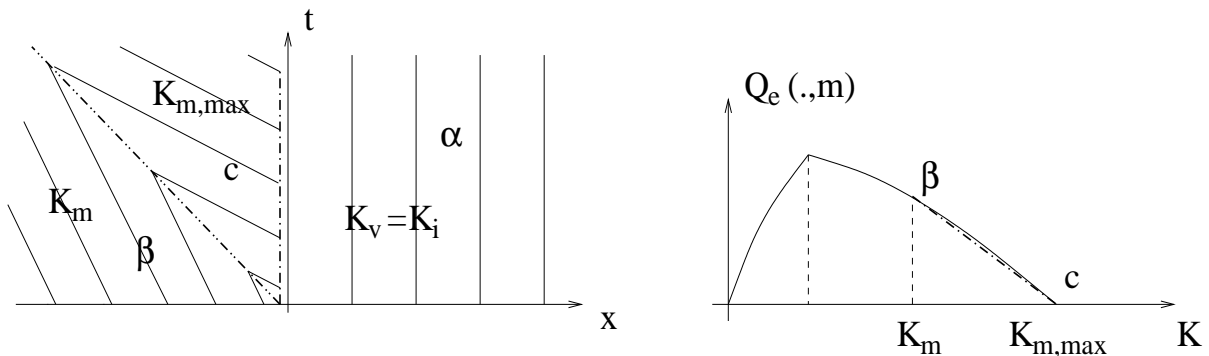
$$0 = Q_0 = \text{Min}[\Omega_v, \Delta_m] \quad (= 0) \quad .$$

Il en résulte que $K = K_{m,max}$ en amont de la singularité, en application des règles de calcul rappelées dans la section 3.1. D'où les solutions, décrites ci-après par leurs diagrammes de caractéristiques et leurs diagrammes fondamentaux amonts (i.e. relatifs à $Q_e(.,m)$).

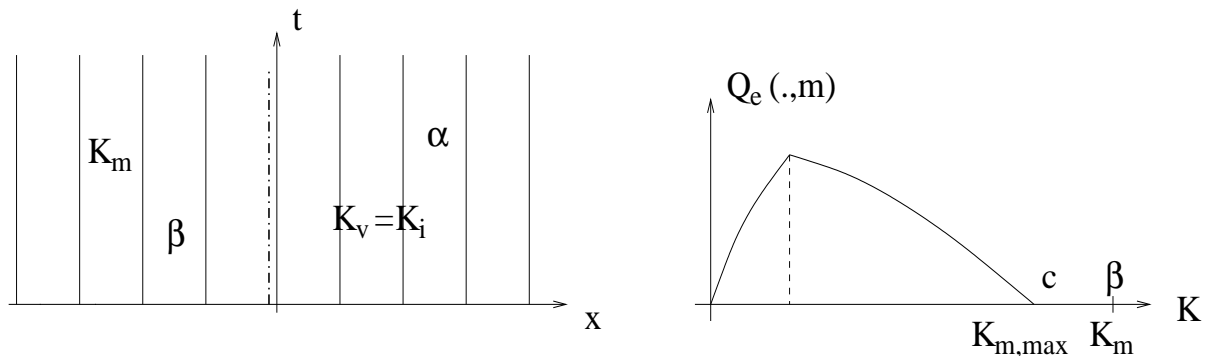
Cas K_m souscritique



Cas K_m surcritique, et $K_m \leq K_{m,max}$



Cas K_m surcritique, et $K_m > K_{m,max}$



3.3 Cas $K_m = K_i > K_{m,max}$

On a alors $\Delta_m = Q_{m,max}$. Il faut donc raisonner sur les valeurs possibles de l'offre Ω_v .

3.3.1 Cas $\Omega_v \geq \Delta_m$

La solution recherchée sera donc caractérisée par $Q_0 = Q_{m,max}$, ce qui implique une accélération de trafic, donc une onde de raréfaction

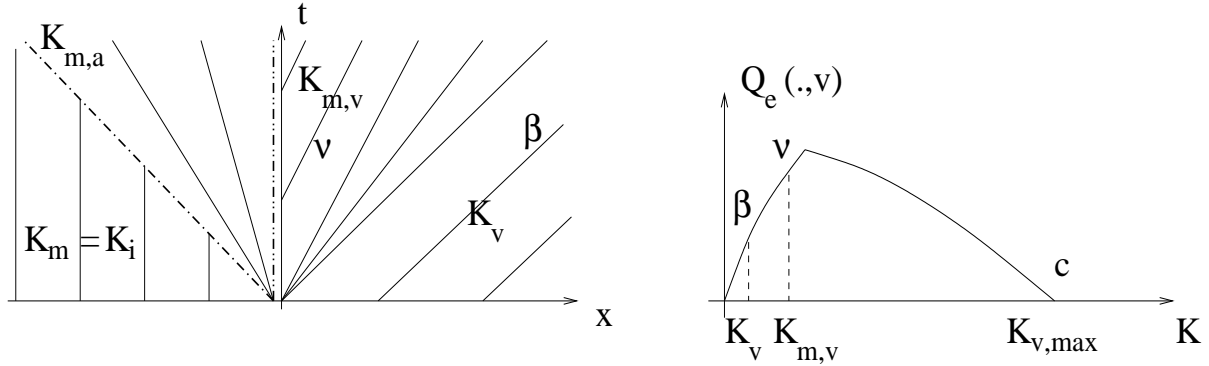
$$K_i \rightarrow K_{m,crit}$$

en amont de la singularité, et une condition aux limites $Q = Q_{m,max}$ en aval de la singularité. Compte tenu de la règle de conservation de l'état du trafic, la concentration en aval de la singularité doit être souscritique, soit $K_{m,v}$ donnée par:

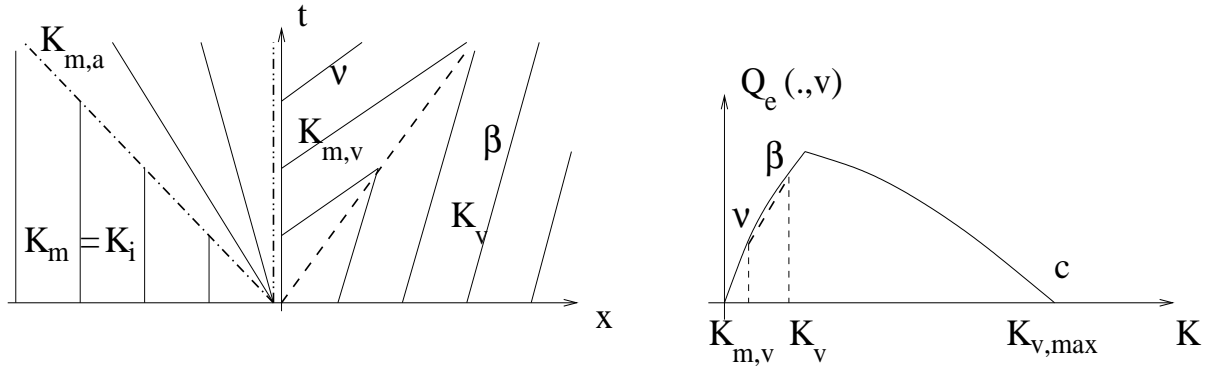
$$K_{m,v} \stackrel{def}{=} Arg [Q_e(\kappa, v) = Q_{m,max} / \kappa \leq K_{v,crit}] \quad .$$

Cette condition complète la condition aux limites $Q = Q_{m,max}$ pour fournir les différentes solutions que voici. Celles-ci sont déterminées de manière unique dans chaque sous-cas, et représentées comme d'habitude par leurs diagrammes de caractéristiques et leurs diagrammes fondamentaux avals (i.e. relatifs à $Q_e(., v)$).

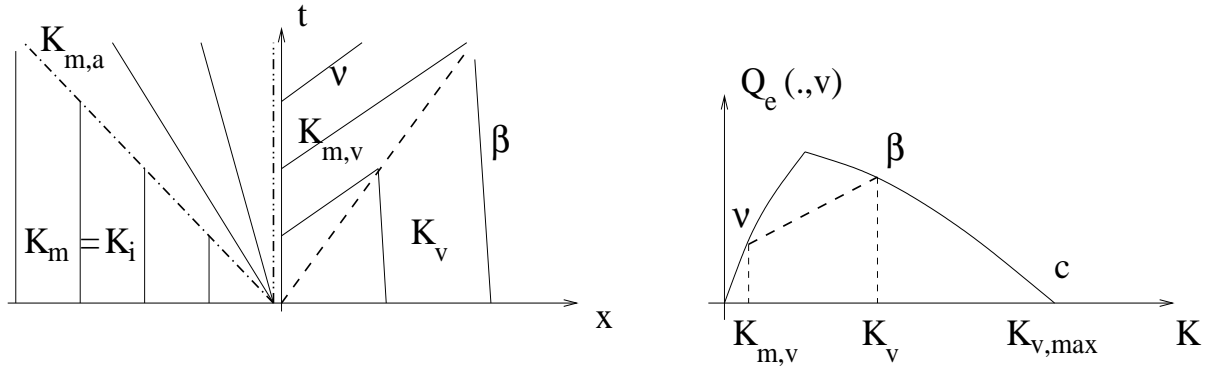
Sous-cas K_v souscritique, et $K_v \leq K_{m,v}$.



Sous-cas K_v souscritique, et $K_v \geq K_{m,v}$.



Sous-cas K_v surcritique.



3.3.2 Cas $\Omega_v \leq \Delta_m$

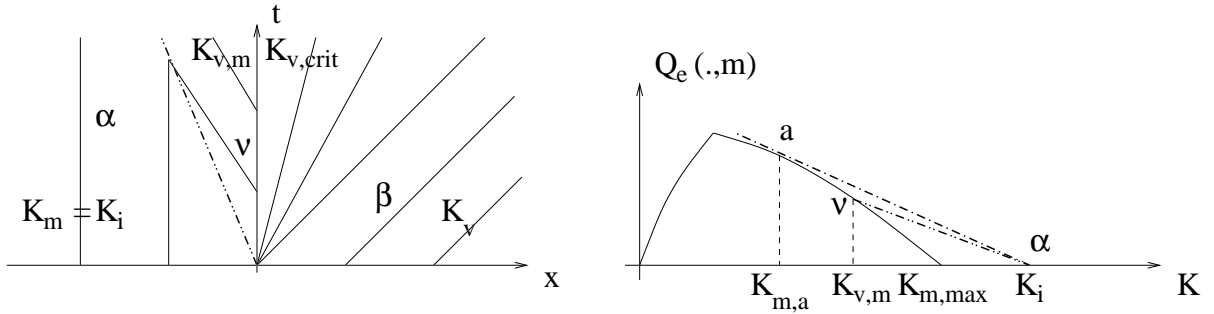
La solution recherchée sera donc caractérisée par $Q_0 = \Omega_v$, ce qui conduit à considérer deux sous-cas, selon que K_v est sur- ou souscritique.

Sous-cas K_v souscritique. Si $K_v \leq K_{v,crit}$, alors $\Omega_v = Q_{v,max}$ et on doit rechercher une solution telle que $Q = \Omega_v = Q_{v,max}$ à l'origine, comportant une onde d'accélération (i.e. raréfaction) à droite de l'origine, et une condition aux limites $K = K_{v,m}$ à gauche de l'origine, avec $K_{v,m}$ donnée par :

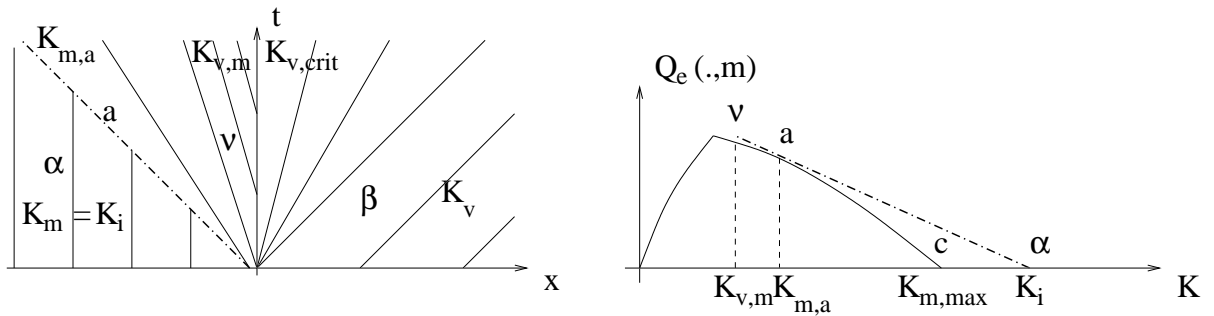
$$K_{v,m} \stackrel{def}{=} \text{Arg} [Q_e(\kappa, m) = \Omega_v / \kappa \geq K_{m,crit}] .$$

Deux types de solutions en résultent, selon les valeurs relatives de $K_{v,m}$ et de $K_{m,a}$.

1. Cas $K_{v,m} \geq K_{m,a}$:

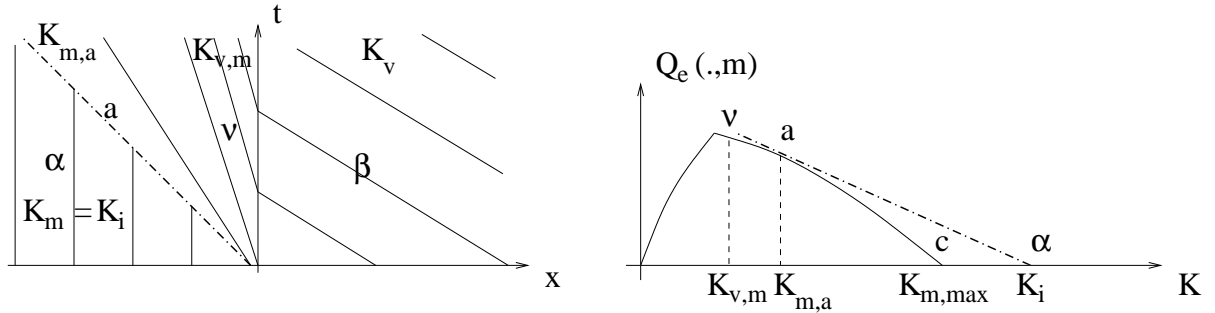


2. Cas $K_{v,m} \leq K_{m,a}$:

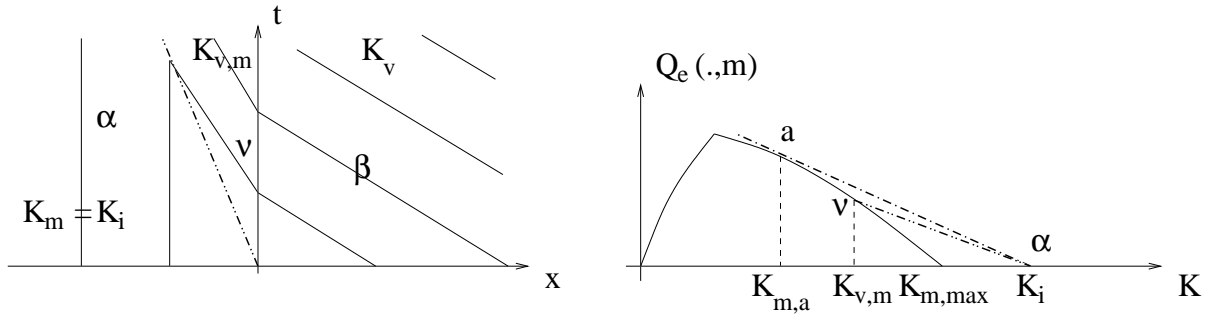


Sous-cas K_v surcritique. Si $K_v \leq K_{v,crit}$, alors $\Omega_v = Q_v = Q_e(K_v, v)$ et le problème se ramène à un simple problème de réfraction de caractéristiques. $K_{v,m}$ étant définie comme ci-dessus, on obtient les solutions suivantes:

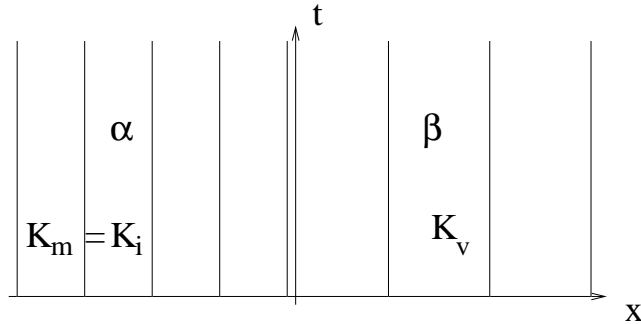
1. Cas $K_{v,m} \leq K_{m,a}$:



2. Cas $K_{m,a} \leq K_{v,m} \leq K_{m,max}$:



3. Cas $K_{v,m} > K_{m,max}$:



3.4 Conclusion.

On a donc montré que la solution du problème de Riemann généralisé conformément aux règles rappelées dans la sous-section 3.1 existe et est unique, et maximise le débit à l'origine, suivant la formule:

$$(6) \quad Q_0 = \text{Min} [\Omega_e(K_v, v), \Delta_e(K_m, m)] \quad .$$

4 Applications.

4.1 Application au schéma de Godunov.

On se réfère dans cette section au schéma de Godunov tel qu'il est défini dans [LE 95-96]. Rappelons l'idée de ce schéma en quelques mots. Si l'on considère par exemple la discrétisation du modèle LWR sur un axe, on discrétise celui-ci en cellules ou segments $(s) = [x_{s-1}, x_s]$ de longueur l_s , et on discrétise le temps en intervalles $[t\Delta t, (t+1)\Delta t]$. La concentration $K(., t\Delta t)$ est approximée par une fonction constante par morceaux $\kappa^t(.)$ qui vaut K_s^t sur chacun des intervalles $(s) = [x_{s-1}, x_s]$. Par ailleurs, on approxime le débit moyen en chacun des points x_s pendant l'intervalle $[t\Delta t, (t+1)\Delta t]$ par Q_s^t , de sorte que:

$$(7) \quad K_s^{t+1} = K_s^t + \frac{\Delta t}{l_s} [Q_{s-1}^t - Q_s^t] \quad ,$$

le schéma étant conservatif. Le débit est calculé en déterminant la solution *exacte* du modèle LWR pendant l'intervalle $[t\Delta t, (t+1)\Delta t]$ en prenant comme condition initiale à l'instant $t\Delta t$ la fonction $\kappa^t(.)$, soit $\tilde{\kappa}^t(x, \tau)$ cette solution. On notera, et ce point est essentiel, que ce calcul se traduit par la résolution, en chaque point x_s , d'un problème de Riemann généralisé, en remplaçant simplement les indices m et v de la section 3 ci-dessus par des indices $s-1$ et s de segments, sous réserve bien sûr d'une condition de type CFL. Il vient:

$$Q_s^t = \int_{t\Delta t}^{(t+1)\Delta t} \tilde{\kappa}^t(x_s, \tau) d\tau \quad ,$$

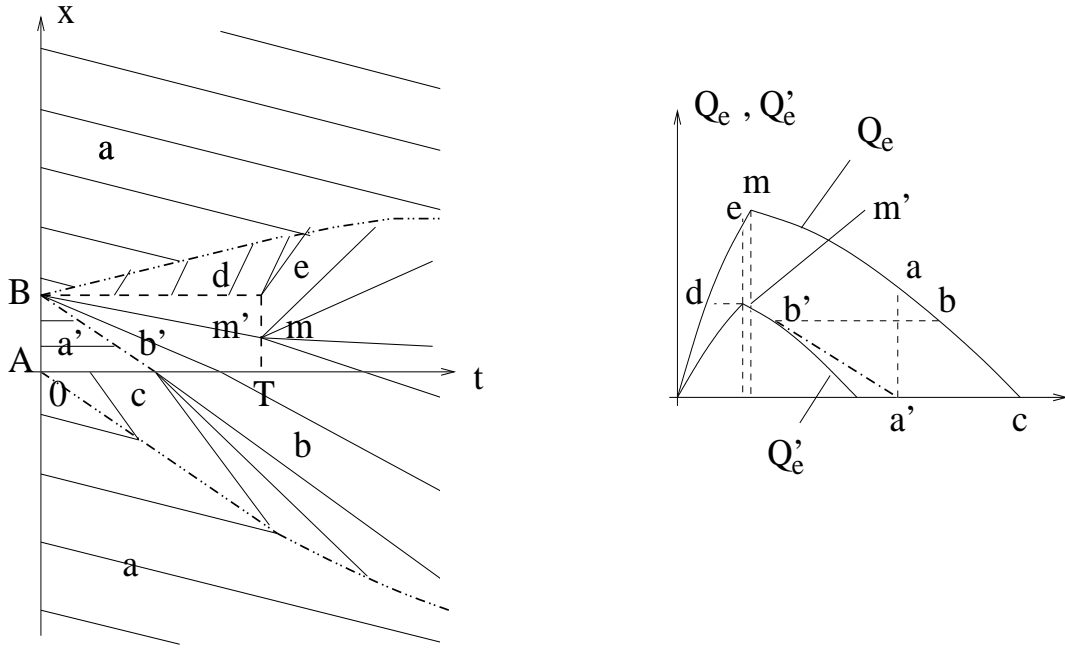
et on peut montrer que:

$$(8) \quad Q_s^t = \text{Min} [\Omega_e(K_{s+1}^t, s+1), \Delta_e(K_s^t, s)]$$

qui est l'analogue de (6). Les fonctions d'équilibre sont définies conformément à (5), remplaçant les indices m et v par $s-1$ et s . La procédure est répétée à chaque pas de temps et se décompose donc en deux phases, projection sur l'ensemble des fonctions constantes par morceaux (équation (7)) et la résolution exacte du modèle LWR (1) avec une solution approchée constante par morceaux comme condition initiale (d'où l'équation (8)). Comme (6) reste valable pour des concentrations supérieures aux concentrations maximales, il en est de même pour (8) qui résulte exactement des mêmes calculs. Par conséquent, le schéma de Godunov mis sous la forme (7) et (8) reste donc valable, même si les concentrations dépassent la concentration maximale.

4.2 Application: calcul analytique de la solution en présence d'un incident.

On se réfère dans cette section à l'analyse effectuée dans [MO 97] (et reprise dans [BLLM 96]) relative à la modélisation d'un incident. Considérons un axe homogène, avec un incident localisé entre les points A et B , et débutant à l'instant 0, se terminant à l'instant T . Dans le rectangle $[0, T] \times [A, B]$ du plan (t, x) , le diagramme fondamental est Q'_e , hors de ce rectangle le diagramme fondamental est Q_e . Les deux relations d'équilibre sont illustrées ci-après. Les arrivées sont uniformes et telles que leur concentration excède la concentration maximale de Q'_e . Le diagramme des caractéristiques résultant est donné ci-après; il se déduit trivialement des règles énoncées dans la sous-section 3.1 pour ce qui est des discontinuités spatiales (points $[0, T] \times \{A\}$ et $[0, T] \times \{B\}$), et de la conservation de la concentration aux discontinuités temporelles (points $\{0\} \times [A, B]$ et $\{T\} \times [A, B]$). Cette dernière règle de conservation résulte directement de (1). On a indiqué sur le diagramme des caractéristiques ci-après un certain nombre de points remarquables dont les correspondants figurent avec le même nom sur les diagrammes fondamentaux, pour permettre la vérification de la construction. L'incident occupe la zone rectangulaire du plan (t, x) limitée par les deux axes et les pointillés. Les pentes des caractéristiques qui avec ce choix d'axes devraient se déduire directement des pentes des tangentes aux courbes représentatives de Q_e et Q'_e ont été légèrement modifiées pour plus de lisibilité.



On notera en particulier les trois éventails (ondes d'accélération). L'onde $d - e$ correspond aux transitions $Q'_e \rightarrow Q_e$ soit à débit $Q = Q'_{max}$ constant, soit à concentration $K = K'_{crit}$ constante. L'onde $c - b$ est associée à une transition $Q'_e \rightarrow Q_e$ à débit constant, avec une discontinuité $a' - b'$ sur Q'_e . Enfin l'onde m est associée à la discontinuité de la dérivée de Q_e pour la concentration critique de cette fonction. Le point m' est associé à concentration constante à m sur le diagramme Q'_e .

5 Conclusion.

La prise en considération de concentrations supérieures à la concentration maximale dans le modèle LWR ne présente donc pas de difficultés essentielles. En ce qui concerne le calcul des solutions analytiques, la seule difficulté réside dans l'existence d'ondes de choc d'accélération, dont nous avons examiné le traitement et l'impact sur la résolution du problème de Riemann généralisé. En ce qui concerne les fonctions d'équilibre d'offre et de demande, leur prolongement s'effectue naturellement, ce qui permet de conserver la formulation des conditions aux limites ainsi que le traitement des discontinuités en termes d'offre et de demande, introduits dans [LE 95-96], dans ce contexte étendu. Enfin, et comme conséquence du traitement des discontinuités, le schéma de Godunov peut être conservé tel quel, le flux de Godunov s'exprimant toujours comme minimum de l'offre aval et de la demande amont.

References

- [BLLM 96] BUISSON, C., LEBACQUE, J.P., LESORT, J.B. MONGEOT, H. *The STRADA model for dynamic assignment*. Proceedings of the 1996 ITS Conference. 1996.
- [DA 95] DAGANZO, C.F. *A finite difference approximation of the kinematic wave model*. Transportation Research 29B, 4: 261-276. 1995.
- [GR 91] GODLEWSKI, E., RAVIART, P.A. *Hyperbolic systems of conservation laws*. SMAI. Ellipses. 1991.

- [LE 95-96] LEBACQUE, J.P. *The Godunov scheme and what it means for first order traffic flow models*.
Rapport CERMICS 95-48, ENPC
Proceedings of the 1996 ISTTT (J.B. Lesort Ed.): 647-677. 1996.
- [LW 55] LIGHTHILL, M.H., WHITHAM, G.B. *On kinematic waves II: A theory of traffic flow on long crowded roads*. Proc. Royal Soc. (Lond.) A 229: 317-345. 1955.
- [MO 97] MONGEOT, H. *Modelling of urban traffic flow dynamics in incident conditions using the first order macroscopic approach*. UTSG 29 Annual Conference . Bournemouth. 1997. (à paraître dans TEC).
- [PAY 71] PAYNE, H.J. *Models of freeway traffic and control*. Simulation Council Proceedings 1: ch 6 . 1971.
- [RI 56] RICHARDS, P.I. *Shock-waves on the highway*. Opns. Res. 4: 42-51. 1956