Problème de Stokes dans $\mathbb{R}^n$ et espaces de Sobolev avec poids

Frédéric Alliot
ENPC-CERMICS
6-8 Avenue Blaise Pascal
Cité Descartes - Champs Sur Marne
77455 Marne la Vallée Cedex 2
alliot@cermics.enpc.fr

Chérif Amrouche
Université de Technologie de Compiègne
Centre Benjamin Franklin
rue Roger Couttolenc
60206 Compiègne cedex
amrouche@ann.jussieu.fr

Astract : In this work, we are interested in a few mathematical questions related to fluid flows in exterior domains that for the sake of simplicity we suppose to be $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. More precisely, we prove some properties of the gradient operator and of solenoidal functions. We then seek for solutions of the stationary Stokes problem (S) with prescribed behaviour at infinity. To this end we use the weighted Sobolev spaces $W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ which are appropriate for such elliptic problems because they satisfy Hardy inequalities. We also consider the case of data in the Hardy space $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$. At last, we precise under wich conditions solutions of problem (S) can be written as convolutions with the fundamental solution of (S) and derive asymptotic properties for such solutions.

On s'intéresse ici au problème de Stokes qui modélise en première approximation des écoulements stationnaires lents de fluides visqueux dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. En considérant $\boldsymbol{u}$ le champ des vitesses du fluide, et π le champ de pression, on aboutit au système :

$$(S) \quad \begin{cases} -\Delta \boldsymbol{u} + \nabla \pi = \boldsymbol{f} \quad \text{dans } \mathbb{R}^n, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{u} = g \quad \text{dans } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Ce problème a été complètement étudié dans les espaces de Sobolev classiques lorsqu'il est posé sur un ouvert borné avec une condition de bord. On peut se référer à ce sujet à l'article [Cat61]. Cependant, si ce cadre fonctionnel est adéquat lorsque le domaine est borné, il ne l'est plus dès que l'on s'intéresse à certains domaines non bornés. En effet, on ne dispose plus pour de tels domaines des inégalités de Poincaré qui sont l'un des ingrédients essentiels de résolution.

D'autre part, le comportement des fonctions à l'infini devient un élément important pour la description du comportement des solutions. Les espaces de Sobolev classiques sont sur ce point aussi trop restrictifs. L'enjeu principal du problème est donc de determiner un cadre fonctionnel qui dispose des propriétés essentielles des espaces de Sobolev, et qui propose un large éventail de comportements à l'infini. On portera un intérêt particulier aux cas où le fluide est au repos à l'infini.

De nombreux auteurs se sont déjà penchés sur le problème de Stokes dans des domaines non bornés et ont introduit divers cadres fonctionnels. H. Kozono et H. Sohr utilisent par exemple les espaces $\hat{H}^{1,p}(\mathbb{R}^n) = \overline{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}^{\|\nabla\ \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}$ et établissent des résultats pour $n/(n-1) < p < n$, (*cf.* [Koz91]), ce qui exclut en particulier le cas de la dimension 2.

Par ailleurs, Galdi et Simader (*cf.* [Gal90], [Gal94b] ou encore [Far93]) utilisent l'espace $D^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ défini comme l'ensemble $\{u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n), D^m u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$ quotienté par les polynômes de degré strictement inférieur à m. On peut dans certains cas décrire le comportement à l'infini de ces fonctions. Cependant, il est fortement lié par construction au degré de régularité m. En revanche, les espaces de Sobolev avec poids introduits initialement par Hanouzet dans [Han71], ou Kudrjavcev dans [Kud59], puis développés notamment par Giroire dans [Gir87], se présentent comme un outil largement efficace et maniable. En effet, les fonctions de ces espaces satisfont des inégalités avec poids de type Poincaré, et ont un comportement à l'infini bien caractérisé. La variété de résultats obtenus pour l'opérateur de Laplace dans $\mathbb{R}^n$ en témoigne (voir par exemple [McO79, Loc83, Amr94b]).

Le travail qui suit a pour double objectif de résoudre le système de Stokes (S) dans les espaces de Sobolev avec poids -ce qui constitue un préliminaire intéressant à l'étude d'écoulements autour d'obstacles- et d'étudier les propriétés de certains opérateurs de convolution dans ce même cadre fonctionnel. Après une présentation des espaces de Sobolev avec poids, nous développons dans la seconde partie des résultats concernant les opérateurs gradient et divergence. On poursuit par des résultats qui s'inscrivent dans la continuité des travaux de V. Girault et A. Sequeira [Gir91] qui résolvent (S) en dimension 2 et 3 dans le cas hilbertien $p = 2$, ainsi que de M. Specovius-Neugebauer (*cf.* [Spe94]) dont nous améliorons certains résultats - moins de valeurs de p exclues grâce à l'introduction des poids logarithmiques ainsi que plus de résultats de régularité. Plus précisément, nous prouvons l'existence, l'unicité, et la régularité des solutions du problème de Stokes en le ramenant à deux équations de Poisson découplées sur les inconnues $\boldsymbol{u}$ et π. On montre enfin comment on peut aborder le cas $p = 1$ en utilisant l'espace de Hardy $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$.

La convolution par la solution élémentaire est souvent utilisée pour construire des solutions d'équations aux dérivées partielles. On se propose donc de déterminer dans quels cas on peut écrire explicitement sous forme de convolution les solutions exhibées auparavant. En particulier, ces développements montrent combien il convient d'être prudent vis-à-vis de certains passages à la limite. On utilise pour ceci la théorie des opérateurs intégraux singuliers de Calderòn-Zygmund. Ces résultats peuvent être comparés à ceux obtenus pour les potentiels de Riesz dans [Amr94a]. D'autre part, ces résultats permettent d'obtenir des développements asymptotiques des solutions du problème de Stokes.

1 Notations et cadre fonctionnel

Tout au long de ce travail, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et p un réel dans l'intervalle $]1, +\infty[$. On note $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ son dual. A tout réel $p \in \ ]1, +\infty[$, on associe son conjugué p' par la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On rappelle que $L^p(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des fonctions mesurables telles que $\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p d\boldsymbol{x} < \infty$ qui, muni de la norme $||u||_{L^p(\mathbb{R}^n)} = (\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p d\boldsymbol{x})^{1/p}$, est un espace de Banach dont le dual est $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Pour tout entier naturel m, $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ désignera comme de coutume l'espace de Sobolev $\{v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n); \forall \lambda \in \mathbb{N}^n, |\lambda| \leq m, \partial^\lambda v \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$. Tous ces espaces seront munis de leurs normes naturelles. On utilisera sans les rappeler leurs propriétés classiques; on pourra à ce sujet se reporter à [Ada75].

On note $\mathcal{P}_l$ (resp. $\mathcal{P}_l^\Delta$) l'espace des polynômes (resp. polynômes harmoniques) sur $\mathbb{R}^n$ de degré inférieur ou égal à l . On convient que $\mathcal{P}_l = \mathcal{P}_l^\Delta = \{0\}$ si $l < 0$. D'autre part, pour tout sous-espace fermé Y d'un espace de Banach X, on note X/Y l'espace quotient de X par Y et le polaire de Y dans le dual X' de X :

$$X' \perp Y = \{f \in X', \forall v \in Y, < f, v >= 0\}.$$

On écrira , dans le but d'alléger les notations, toutes les fonctions et distributions vectorielles à n composantes ainsi que les espaces qui s'y rapportent en gras. Par exemple, pour $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)$, on comprendra $(f_1, \ldots, f_n) \in (L^p(\mathbb{R}^n))^n$. Enfin, on convient que l'ensemble noté $\{1, \ldots, k\}$ est vide lorsque l'entier k est négatif ou nul.

Afin de définir les espaces de Sobolev avec poids qui nous intéressent, on introduit les deux fonctions poids :

$$\rho(\boldsymbol{x}) = (1 + |\boldsymbol{x}|^2)^{1/2},$$
$$\lg\ \rho(\boldsymbol{x}) = \ln(2 + |\boldsymbol{x}|^2).$$

Définition 1.1 Soient $m \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in]1, +\infty[$. On définit l'entier

$$k = k(m, n, p, \alpha) = \begin{cases} -1 \ \text{ si } \ n/p + \alpha \notin \{1, \ldots, m\}, \\ m - n/p - \alpha \text{ sinon,} \end{cases}$$

et l'espace

$$\begin{aligned} W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n) = \{ \quad & u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n); \forall \lambda \in \mathbb{N}^n \\ & 0 \leq |\lambda| \leq k,\ \rho^{\alpha - m + |\lambda|}(lg\ \rho)^{-1} \partial^\lambda u \in L^p(\mathbb{R}^n), \\ & k + 1 \leq |\lambda| \leq m,\ \rho^{\alpha - m + |\lambda|} \partial^\lambda u \in L^p(\mathbb{R}^n)\ \}, \end{aligned}$$

muni d'une stucture d'espace de Banach par la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)} = (\sum_{|\lambda|=0}^{k} \|\frac{\rho^{\alpha-m+|\lambda|}}{\lg \rho}\partial^\lambda u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{|\lambda|=k+1}^{m} \|\rho^{\alpha-m+|\lambda|}\partial^\lambda u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)})^{1/p}.$$

Comme dans [Han71] ou [Gir87], on peut prouver que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$, de sorte que le dual de $W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ noté $W^{-m,p'}_{-\alpha}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de distributions. On définit aussi la semi-norme :

$$\mid u \mid_{W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)} = (\sum_{|\lambda|=m} \|\rho^\alpha \partial^\lambda u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)})^{1/p}.$$

On notera que la présence du poids logarithmique n'intervient que pour des exposants dits critiques *i.e.* qui vérifient $n/p+\alpha \in \{1,\dots,m\}$. Leur introduction (voir également [Ler74]) est indispensable pour prolonger certains résultats obtenus dans les cas non-critiques.

Dans le but d'étudier le problème (S) à données dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, nous introduisons l'espace de Hardy $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^1(\mathbb{R}^n), \forall j = 1,\dots,n, R_j u \in L^1(\mathbb{R}^n)\},$$

où les tranformées de Riesz R_j sont définies par :

$$R_j(f) = c_n \text{v.p. } (f * \frac{x_j}{|x|^{n+1}}),\ j = 1,\dots,n.$$

1.1 Propriétés fondamentales des espaces $W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$

Les propriétés suivantes sont démontrées par exemple dans [Amr94b]. Les fonctions de $W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ sont des distributions tempérées, qui peuvent être dans certains cas des polynômes. En effet, si on pose $j = j(m,n,p,\alpha) = [m-(n/p+\alpha)]$, où $[s]$ désigne la partie entière du réel s, alors $\mathcal{P}_j$ est le plus grand espace de polynômes contenu dans $W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$. Contrairement aux espaces de Sobolev classiques, les espaces avec poids ne forment pas une famille d'espaces emboités. Cependant, on a les injections continues suivantes :

$$W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n) \subset W^{m-1,p}_{\alpha-1}(\mathbb{R}^n) \text{ ssi } m>0,\ n/p+\alpha \neq 1 \text{ ou } m \leq 0,\ n/p'-\alpha \neq 0, \tag{1.1}$$

et l'opérateur ∂^λ est continu de $W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ dans $W^{m-|\lambda|,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$. En outre, les propriétés locales de $W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ sont identiques à celles des espaces classiques $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

La propriété fondamentale qui suit (*cf.* [Amr94b]) découle d'une inégalité généralisée de Hardy. Elle permet notamment de caractériser les distributions de $W^{m,p}_\alpha(\mathbb{R}^n)$ au moyen de leur dérivée d'ordre le plus élevé.

Théorème 1.2 *Soient $m \geq 1$ un entier et α un réel quelconque. Alors, il existe une constante $C = C(m, n, p, \alpha) > 0$, telle que*

$$\forall u \in W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n), \| u \|_{W_\alpha^{m,p}/\mathcal{P}_{j'}} \leq C | u |_{W_\alpha^{m,p}}.$$

où $j' = \min(j, m-1)$. En particulier, la semi-norme $| \, . \, |_{W_\alpha^{m,p}}$ définit une norme équivalente à la norme de l'espace quotient $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{j'}$.

Dans certains cas il est possible de mieux caractériser le comportement à l'infini des fonctions de $W_\alpha^{m,p}(\mathbb{R}^n)$. A titre d'exemple, on a,

Lemme 1.3 *Soient $p > n, \alpha \in \mathbb{R}$ tels que $n/p + \alpha \neq 1$. Pour toute fonction $u \in W_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, et $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $|\boldsymbol{x}| > 1$, on a*

$$|u(\boldsymbol{x})| \leq C|\boldsymbol{x}|^{1-n/p-\alpha}\|u\|_{W_\alpha^{1,p}} \quad et \quad |\boldsymbol{x}|^{\alpha+n/p-1}|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})| \overset{|\boldsymbol{x}|\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de u.

Preuve : On traite tout d'abord le cas $\alpha = 0$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ à support dans la boule de rayon 1 centrée en 0 et égale à 1 sur la boule de rayon 1/2 centrée en 0. L'estimation proposée est triviale pour $u\varphi$. D'autre part, on montre aisément que $\nabla(u(1-\varphi)) \in L^p(\mathbb{R}^n), p > n$, de sorte que, grâce aux injections de Sobolev, on a

$$|u(\boldsymbol{x})(1-\varphi(\boldsymbol{x})) - u(\boldsymbol{y})(1-\varphi(\boldsymbol{y}))| \leq C\|\nabla(u(1-\varphi))\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{1-n/p},$$

ce qui permet de conclure en choisissant $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$. Pour traiter le cas général, il suffit de remarquer que si $u \in W_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ et $n/p + \alpha \neq 1$ alors, $\rho^\alpha u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Pour la seconde propriété, on considère une suite $\boldsymbol{u}_n \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n)$ approximant $\boldsymbol{u}$ dans $\mathbf{W}_\alpha^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Il découle de la première inégalité que

$$\sup_{|\boldsymbol{x}|>1} ||\boldsymbol{x}|^{\alpha+n/p-1}u(\boldsymbol{x}) - |\boldsymbol{x}|^{\alpha+n/p-1}u_n(\boldsymbol{x})| \leq C\|\nabla(u-u_n)\|_{W_\alpha^{1,p}}.$$

Par conséquent, en dehors de la boule unité, $|\boldsymbol{x}|^{\alpha+n/p-1}u$ est limite uniforme de fonctions à support compact et tend donc vers 0 à l'infini. ♢

1.2 Equation de Poisson dans $\mathbb{R}^n$

Les résultats suivants (*cf.* [Amr94b]) sont fondamentaux tant pour l'étude de la régularité que celle du comportement à l'infini des solutions du problème de Stokes. Par souci de concision, on se limite aux cas où α est entier, mais on dispose de résultats similaires pour α réel.

Théorème 1.4 *Soient m, l des entiers naturels et $p \in \ ]1, +\infty[$. Les opérateurs de Laplace suivants sont des isomorphismes :*

$$\Delta \ : \ W^{1,p}_{-l}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}^{\Delta}_{[l+1-n/p]} \to W^{-1,p}_{-l}(\mathbb{R}^n) \quad si\ l > 0 \ et \ n/p \notin \{1, \dots, l\}, \tag{1.2}$$

$$\Delta \ : \ W^{1+m,p}_{m}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[1-n/p]} \to W^{-1+m,p}_{m}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[1-n/p']} \ si \ n/p' \neq 1 \ ou \ m = 0. \tag{1.3}$$

Théorème 1.5 *Soient m et l deux entiers strictement positifs. Les opérateurs de Laplace suivants sont des isomorphismes :*

$$\Delta \ : \ W^{1+m,p}_{-l+m}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}^{\Delta}_{[l+1-n/p]} \to W^{-1+m,p}_{-l+m}(\mathbb{R}^n) \quad si \ n/p \notin \{1, \dots, l-m\}, \tag{1.4}$$

$$\Delta \ : \ W^{m+1,p}_{m+l}(\mathbb{R}^n) \to W^{m-1,p}_{l+m}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}^{\Delta}_{[l+1-n/p']} \quad si \ n/p' \notin \{1, \dots, l+1\}. \tag{1.5}$$

Remarque 1.6 Les isomorphismes précédents n'ont pas lieu pour certaines valeurs de p. Considérons par exemple une fonction $u \in W^{2,n'}_1(\mathbb{R}^n)$; il est alors clair que $\Delta u \in W^{0,n'}_1(\mathbb{R}^n)$. D'autre part, $W^{2,n'}_1(\mathbb{R}^n) \subset W^{1,n'}_0(\mathbb{R}^n)$, donc $\Delta u \in W^{0,n'}_1(\mathbb{R}^n) \cap W^{-1,n'}_0(\mathbb{R}^n)$. Cependant, comme $W^{0,n'}_1(\mathbb{R}^n)$ ne s'injecte pas dans $W^{-1,n'}_0(\mathbb{R}^n)$, l'opérateur

$$\Delta \ : W^{2,n'}_1(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[1-n/n']} \to W^{0,n'}_1(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{R},$$

ne peut être surjectif et *a fortiori* un isomorphisme. En revanche, si l'on introduit l'espace $X^{0,n'}_1(\mathbb{R}^n) = W^{0,n'}_1(\mathbb{R}^n) \cap W^{-1,n'}_0(\mathbb{R}^n)$, on peut alors prouver que

$$\Delta : W^{2,n'}_1(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[1-n/n']} \to X^{0,n'}_1(\mathbb{R}^n) \perp \mathbb{R}$$

est un isomorphisme.

Ces deux théorèmes permettent d'obtenir d'autres isomorphismes par dualité. Par exemple, si $n/p \notin \{1, \dots, l\}$, l'adjoint Δ^* de l'isomorphisme :

$$\Delta \ : \ W^{1,p}_{-l}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}^{\Delta}_{[l+1-n/p]} \to W^{-1,p}_{-l}(\mathbb{R}^n),$$

est un isomorphisme de $W^{1,p'}_{l}(\mathbb{R}^n)$ dans $W^{-1,p'}_{l}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}^{\Delta}_{[l+1-n/p]}$. Mais si $u \in W^{1,p'}_{l}(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, alors

$$< u, \Delta\varphi >_{W^{1,p'}_{l} \times W^{-1,p}_{-l}} = \ < \Delta u, \varphi >_{W^{-1,p'}_{l} \times W^{1,p}_{-l}},$$

de sorte que $\Delta^* = \Delta$ par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $W^{1,p}_{-l}(\mathbb{R}^n)$. On utilisera par la suite sans démonstration supplémentaire les résultats duaux tels que celui prouvé ci-dessus.

Les résultats précédents ne s'appliquent pas dans le cas où $p = 1$. Cependant, si l'on considère des données dans l'espace $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$, on peut construire des solutions du problème de Laplace dans des espaces de Sobolev avec poids. On utilise pour cela le théorème 1.4 et l'injection continue de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ dans $W_0^{-1,n'}(\mathbb{R}^n)\perp\mathbb{R}$. De plus, la continuité des tranformées de Riesz de $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ et le fait que pour $u \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$, $R_j R_k(\Delta u) = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}$ permettent d'obtenir de la régularité supplémentaire sur la solution.

Théorème 1.7 *Soit $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$, il existe une unique fonction $u \in W_0^{1,n'}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[1-n/n']}$ telle que,*

$$-\Delta u = f.$$

De plus, D^2u appartient à $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ et il existe $C > 0$, dépendant seulement de n telle que

$$\|u\|_{W_0^{1,n'}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[1-n/n']}} + \|D^2u\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Remarque 1.8 On peut en fait montrer que ∇u appartient à l'espace de Lorentz $\mathbf{L}^{n',1}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{L}^{n'}(\mathbb{R}^n)$. C'est à dire qu'en notant $mes(A)$ la mesure de Lebesgue du borélien A, on a pour $i = 1, \ldots, n$:

$$\int_0^{+\infty} (mes(\{|\partial_i u| > t\}))^{1/n'} dt < +\infty.$$

2 Quelques propriétés des opérateurs gradient et divergence

Cette section décrit certaines propriétés des opérateurs gradient et divergence dans les espaces de Sobolev avec poids. On appliquera en particulier celles-ci pour établir certains résultats de densité pour les fonctions à divergence nulle. On définit à cet effet l'espace,

$$\boldsymbol{\mathcal{V}} = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n),\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0\}\ .$$

Dans [Amr94b], il est prouvé que si u est une distribution dont le gradient appartient à $L^p(\mathbb{R}^n)$, alors il existe une constante $\lambda(u)$ telle que $u + \lambda(u) \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Si $p < n$, cette constante est unique, tandis que si $p \geq n$, elle est arbitraire et peut être choisie égale à 0. Nous étendons ce type de propriété à des distributions moins régulières dans le lemme qui suit.

Lemme 2.1 *Soient l un entier naturel non nul et p tel que $n/p \notin \{1, \ldots, l\}$. Alors, pour toute distribution g telle que ∇g appartient à $\mathbf{W}_{-l}^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$, il existe une constante K telle que $g + K$ appartienne à $W_{-l}^{0,p}(\mathbb{R}^n)$. De plus, K est unique dès que $n/p < l$.*

Preuve : Considérons une telle distribution g, alors $\Delta g = \mathrm{div}\,(\nabla g)$ est élément de $W_{-l}^{-2,p}(\mathbb{R}^n)$. Supposons dans un premier temps que $l > 1$. Grâce à (1.5), il existe une distribution u dans $W_{-l}^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ telle que,

$$\Delta u = \Delta g. \tag{2.1}$$

Cependant, g n'étant pas nécéssairement tempérée, on ne peut pas conclure que la différence $u - g$ est un polynôme harmonique. En revanche, la relation (2.1) implique que $(\nabla u - \nabla g)$ est harmonique et tempérée, puisqu'élément de $\mathbf{W}^{-1,p}_{-l}(\mathbb{R}^n)$. Par conséquent, il existe un polynôme $\boldsymbol{\lambda}$ de $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\Delta}_{[l-1-n/p]}$ tel que,

$$\nabla g = \nabla u + \boldsymbol{\lambda}.$$

D'autre part, cette égalité impose que le polynôme $\boldsymbol{\lambda}$ soit le gradient d'un polymôme μ appartenant à $\mathcal{P}_{[l-n/p]}$ et donc à $W^{0,p}_{-l}(\mathbb{R}^n)$. La fonction $v = u + \mu$ appartient alors à $W^{0,p}_{-l}(\mathbb{R}^n)$ et vérifie $\nabla g = \nabla v$, ce qui montre que g et v diffèrent d'une constante.

Lorsque $l = 1$, la démonstration est identique à l'exception de la première étape. En effet, on dispose pour résoudre (2.1) de l'isomorphisme :

$$\Delta \ : \ W^{0,p}_{-1}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[1-n/p]} \ \rightarrow \ W^{-2,p}_{-1}(\mathbb{R}^n)\perp\mathcal{P}_{[1-n/p']}.$$

Lorsque $p' < n$, on peut appliquer à la lettre le raisonnement précédent; en revanche, si $p' \geq n$ on doit s'assurer que

$$< \Delta g, 1 >_{W^{-2,p}_{-1} \times W^{2,p'}_{1}} = 0.$$

Pour cela, il suffit de vérifier que pour tout φ appartenant à $W^{2,p'}_{1}(\mathbb{R}^n)$, on a l'égalité :

$$- < \Delta q, \varphi >_{W^{-2,p}_{-1} \times W^{2,p'}_{1}} = \ < \nabla q, \nabla \varphi >_{\mathbf{W}^{-1,p}_{-1} \times \mathbf{W}^{1,p'}_{1}} .$$

C'est évidemment le cas si φ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, et par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $W^{2,p'}_{1}(\mathbb{R}^n)$ la relation a lieu si φ appartient à $W^{2,p'}_{1}(\mathbb{R}^n)\diamondsuit$

La proposition qui suit s'attache à démontrer certains isomorphismes relatifs à l' opérateur divergence dans certains espaces avec poids. En particulier, les propriétés obtenues par dualité pour l'opérateur gradient peuvent être considérées comme des versions simplifiées du théorème de de Rham ([DeR60]). On introduit auparavant l'espace,

$$\mathbf{V}^{m,p}_{\alpha} = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}^{m,p}_{\alpha}(\mathbb{R}^n); \ \ \mathrm{div}\, \boldsymbol{u} = 0\}.$$

Proposition 2.2 *Soient $l \in \mathbb{N}$ et $p \in \ ]1, \infty[$. Les opérateurs suivants sont des isomorphismes :*

$$\mathrm{div} \ : \ \mathbf{W}^{1,p'}_{-l}(\mathbb{R}^n)/\mathbf{V}^{1,p'}_{-l} \rightarrow W^{0,p'}_{-l}(\mathbb{R}^n) \ \text{si } n/p' \notin \{1, \ldots, l\}, \tag{2.2}$$

$$\mathrm{div} \ : \ \mathbf{W}^{1,p'}_{l}(\mathbb{R}^n)/\mathbf{V}^{1,p'}_{l} \rightarrow W^{0,p'}_{l}(\mathbb{R}^n) \ \text{si } n/p > l, \tag{2.3}$$

$$\mathrm{div} \ : \ \mathbf{W}^{1,p'}_{l}(\mathbb{R}^n)/\mathbf{V}^{1,p'}_{l} \rightarrow W^{0,p'}_{l}(\mathbb{R}^n)\perp\mathbb{R} \ \text{si } n/p \notin \{1, \ldots, l\} \text{ et } n/p < l. \tag{2.4}$$

Preuve : Ces opérateurs sont clairement injectifs et continus, on a donc seulement à prouver qu'ils sont aussi surjectifs. Dans les deux premiers cas, on construit des inverses explicites de ces opérateurs en posant $(\operatorname{div})^{-1} = \nabla(\Delta^{-1})$. En effet, appliquons (1.3), (1.4) ou (1.5) avec $m = 1$, on obtient alors les isomorphismes :

$$\Delta : W^{2,p'}_{-l}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}^{\Delta}_{[2+l-n/p']} \to W^{0,p'}_{-l}(\mathbb{R}^n), \text{ si } n/p' \notin \{1, \dots, l\},$$

$$\Delta : W^{2,p'}_{l}(\mathbb{R}^n) \to W^{0,p'}_{l}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}^{\Delta}_{[l-n/p]}, \text{ si } n/p \notin \{1, \dots, l\},$$

desquels on déduit respectivement (2.2) et (2.3).

En revanche pour montrer la surjectivité de (2.4), la construction précédente ne fonctionne plus du fait des conditions d'orthogonalité qui apparaissent pour définir l'inverse du laplacien. On va donc prouver le résultat sur l'opérateur gradient correspondant dont on constate aisément qu'il est injectif et continu. Pour prouver sa surjectivité, on note tout d'abord que toute distribution $\boldsymbol{f}$ de $\mathbf{W}^{-1,p}_{-l}(\mathbb{R}^n) \perp \mathbf{V}^{1,p'}_{l}$ est orthogonale aux fonctions de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ et vérifie donc l'hypothèse du théorème de de Rham. Il existe donc une distribution g telle que $\nabla g = \boldsymbol{f}$. Il suffit alors d'appliquer le lemme 2.1 à g pour conclure. $\diamondsuit$

Ces isomorphismes peuvent encore être formulés sous forme de conditions "Inf-Sup" grâce à un résultat de Babuzka et Brezzi (*cf.* [Bab73, Bre74]). Le corollaire suivant en est l'illustration.

Corollaire 2.3 *Pour tout entier naturel l et $p \in \,]1, \infty[$, il existe une constante C strictement positive telle que :*

$$\inf_{\substack{\psi \in W^{0,p}_{l} \\ \psi \neq 0}} \sup_{\substack{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1,p'}_{-l} \\ \boldsymbol{\varphi} \neq 0}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \psi(\boldsymbol{x}).\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}}{\|\psi\|_{W^{0,p}_{l}} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{W}^{1,p'}_{-l}}} \geq C \quad si \quad n/p' \notin \{1, \dots, l\}, \tag{2.5}$$

$$\inf_{\substack{\psi \in W^{0,p}_{-l} \\ \psi \neq 0}} \sup_{\substack{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1,p'}_{l} \\ \boldsymbol{\varphi} \neq 0}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \psi(\boldsymbol{x}).\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}}{\|\psi\|_{W^{0,p}_{-l}} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{W}^{1,p'}_{l}}} \geq C \quad si \quad n/p > l, \tag{2.6}$$

$$\inf_{\substack{\psi \in W^{0,p}_{-l}/\mathbb{R} \\ \psi \neq 0}} \sup_{\substack{\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{W}^{1,p'}_{l} \\ \boldsymbol{\varphi} \neq 0}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \psi(\boldsymbol{x}).\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}}{\|\psi\|_{W^{0,p}_{-l}/\mathbb{R}} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathbf{W}^{1,p'}_{l}}} \geq C \quad si \quad n/p < l \ et \ n/p \notin \{1, \dots, l\}. \tag{2.7}$$

Preuve : C'est une conséquence directe de la proposition 2.2 et du résultat suivant dû à Babuzka et Brezzi. Soient X, M deux espaces de Banach réflexifs, a une forme bilinéaire sur $X \times M$, et les opérateurs linéaires $A : X \to M'$ et $A^* : M \to X'$ définis pour tout $(v, w) \in X \times M$ par $a(v, w) = \, < Av, w >_{M' \times M} = \, < v, A^* w >_{X \times X'}$.
On pose $N = Ker A$. Les trois assertions suivantes sont alors équivalentes :

i) A est un isomorphisme de X/N dans M'.

ii)A^* est un isomorphisme de M dans $X'\perp N$.

iii) Il existe une constante $C > 0$ telle que,

$$\inf_{\substack{w\in M\\ w\neq 0}} \sup_{\substack{v\in X\\ v\neq 0}} \frac{a(v,w)}{\|v\|_X \|w\|_M} \geq C.$$

On se contentera d'établir (2.5), un raisonnement similaire étant valable pour (2.6) et (2.7). En effet, en posant $X = \mathbf{W}^{1,p'}_{-l}(\mathbb{R}^n)$, $M = W^{0,p}_l(\mathbb{R}^n)$ et $a(v, \boldsymbol{w}) = \int_{\mathbb{R}^n} v \operatorname{div} \boldsymbol{w} d\boldsymbol{x}$, on obtient si $n/p' \notin \{1, \ldots, l\}$ l'équivalence de la propriété (2.2) avec la condition (2.5). $\diamondsuit$

Nous poursuivons cette section par des résultats de densité concernant les fonctions à divergence nulle. Des résultats similaires sont prouvés dans [Gir92] pour le cas hilbertien tridimensionnel.

Proposition 2.4 *Soit l un entier naturel non nul. Si $n/p' \notin \{1, \ldots, l\}$, alors $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ est dense dans $\mathbf{V}^{1,p}_l$.*

Preuve : Il suffit de montrer que toute forme linéaire continue sur $\mathbf{V}^{1,p}_l$ qui s'annule sur $\boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbb{R}^n)$ est identiquement nulle. Considérons donc $\mathbf{T} \in (\mathbf{V}^{1,p}_l)'$ telle que

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}, \quad < \mathbf{T}, \boldsymbol{\varphi} > \quad = 0.$$

Comme $\mathbf{V}^{1,p}_l$ est un sous-espace fermé de $\mathbf{W}^{1,p}_l(\mathbb{R}^n)$, le théorème de Hahn-Banach affirme que l'on peut prolonger $\mathbf{T}$ en une distribution $\widetilde{\mathbf{T}}$ appartenant à $\mathbf{W}^{-1,p'}_{-l}(\mathbb{R}^n)$. D'après le théorème de deRham, il existe donc une distribution q telle que $\widetilde{\mathbf{T}} = \nabla q$. De plus, q satisfait les hypothèses du lemme 2.1; par conséquent, il existe une constante K telle que $q+K$ appartient à $W^{0,p'}_{-l}(\mathbb{R}^n)$. Alors pour toute fonction $\boldsymbol{\chi}$ de $\mathbf{V}^{1,p}_l$,

$$\begin{aligned} < \mathbf{T}, \boldsymbol{\chi} > \quad &= < \widetilde{\mathbf{T}}, \boldsymbol{\chi} > \\ &= < \nabla q, \boldsymbol{\chi} >_{\mathbf{W}^{-1,p'}_{-l} \times \mathbf{W}^{1,p}_l} \\ &= - < q + K, \operatorname{div} \boldsymbol{\chi} >_{W^{0,p'}_{-l} \times W^{0,p}_l} = 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve la nullité de $\mathbf{T}$. $\diamondsuit$

La technique précédente ne fonctionne pas dans le cas où l est un entier négatif. Pourtant, le résultat reste vrai si $n/p \notin \{1, \ldots, -l\}$. On introduit par conséquent des outils différents. En particulier, si on veut approcher directement les éléments de $\mathbf{V}^{1,p}_l$ par des fonctions de $\boldsymbol{\mathcal{V}}$, on doit disposer d'une technique de troncature préservant la nullité de la divergence. A cet effet, nous introduisons des opérateurs différentiels (voir [Gob71]) qui vérifient certaines propriétés du rotationnel en dimension 2 et 3.

Définition 2.5 L'opérateur $\operatorname{rot}_k(D_k)$ avec $D_k = (\partial_1, \ldots, \partial_k)$ est défini par la matrice rectangle $k(k-1)/2 \times k$ construite selon la récurrence suivante :

i) $\operatorname{rot}_2(D_2) = (-\partial_2 \;\; \partial_1)$

ii) Pour tout $k > 2$, la matrice de $\operatorname{rot}_k(D_k)$ est donnée par :

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
0 & \ldots & \ldots & 0 & -\partial_k & \partial_{k-1} \\
\vdots & & 0 & \cdot & 0 & \vdots \\
\vdots & 0 & (-1)^i\partial_k & 0 & \vdots & (-1)^{i+1}\partial_{k-i} \\
0 & \cdot & 0 & & \vdots & \vdots \\
(-1)^{k-1}\partial_k & 0 & \ldots & \ldots & 0 & (-1)^k\partial_1 \\
\hline
 & & & & & 0 \\
 & & \operatorname{rot}_{k-1}(D_{k-1}) & & & \vdots \\
 & & & & & 0
\end{array}\right)$$

où i désigne le numéro de ligne du coefficient concerné.

Lorsque k est précisément égal à la dimension n, l'opérateur $\operatorname{rot}_n(D_n)$ et son transposé $\operatorname{rot}^*_n(D_n)$ vérifient d'intéressantes propriétés que nous détaillons dans la proposition qui suit.

Proposition 2.6 *On a les relations :*

$$\operatorname{div} \operatorname{rot}^*_n(D_n) = 0 \quad et \quad \operatorname{rot}^*_n(D_n) \operatorname{rot}_n(D_n) = -\Delta I_n + \nabla \operatorname{div}. \tag{2.8}$$

Remarque 2.7 Lorsque $n = 2$ ou 3, cette définition et les propriétés précédentes coïncident avec ceux du rotationnel classique.

On établit maintenant certaines propriétés de surjectivité de l'opérateur rot^*_n qui nous permettront de généraliser le résultat de la proposition 2.4 à toutes les valeurs entières de l. La première étape du raisonnement consiste à obtenir ce type de résultats pour des polynômes.

Lemme 2.8 *Soit l un entier positif quelconque. Pour tout polynôme $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_l(\mathbb{R}^n)$, tel que* $\operatorname{div} \boldsymbol{\lambda} = 0$, *il existe un polynôme $\mu \in (\mathcal{P}_{l+1}(\mathbb{R}^n))^{n(n-1)/2}$ qui vérifie l'égalité :*

$$\operatorname{rot}^*_n(D_n)\mu = \boldsymbol{\lambda}.$$

Preuve : On effectue la démonstration par récurrence sur n. On note $\mathcal{I}_j(f)$ la primitive $\int_0^{x_j} f \; dx_j$, de sorte que lorsque $n = 2$, il suffit de prendre $\mu = -\mathcal{I}_2(\boldsymbol{\lambda})$. Supposons maintenant que le résultat soit vrai pour un entier $k \geq 2$ et tout degré l.

Pour résoudre le problème proposé au rang $k+1$ pour un degré maximal valant l_0, on choisit de chercher un champ de vecteurs $\mu \in (\mathcal{P}_{l_0+1}(\mathbb{R}^{k+1}))^{k(k+1)/2}$ dont les $k-1$ premières composantes sont identiquement nulles. En notant $\tilde{\mu} = (\mu_{k+1} \dots , \mu_{k(k+1)/2})$, et en tenant compte de la définition de rot_n^*, on est ramené à résoudre le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{llll} (-1)^k \partial_{k+1}\mu_k + & (\mathrm{rot}_k^*(D_k)\tilde{\mu})_1 & = \boldsymbol{\lambda}_1, & \\ & (\mathrm{rot}_k^*(D_k)\tilde{\mu})_j & = \boldsymbol{\lambda}_j & \forall j \in \{2, \dots , k\}, \\ (-1)^{k+1}\partial_1\mu_k & & = \boldsymbol{\lambda}_{k+1}. & \end{array} \right.$$

En particulier, la dernière équation suggère de poser $\mu_k = (-1)^{k+1}\mathcal{I}_1\boldsymbol{\lambda}_{k+1}$. Les équations restantes s'écrivent alors sous la forme,

$$\mathrm{rot}_k^*(D_k)\tilde{\mu} = \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \tag{2.9}$$

$$\text{où} \quad \left\{ \begin{array}{lll} \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_1 = & \boldsymbol{\lambda}_1 + \mathcal{I}_1\partial_{k+1}\boldsymbol{\lambda}_{k+1}, & \\ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_j = & \boldsymbol{\lambda}_j & \forall j \in \{2, \dots , k\}, \end{array} \right.$$

$$\sum_{i=1}^{k} \partial_k \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_k = 0. \tag{2.10}$$

Cependant, $\tilde{\mu}$ et $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ dépendent de $k+1$ variables. Par conséquent, il existe une unique famille $(\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^0, \dots \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^{l_0})$ de polynômes appartenant à $\boldsymbol{\mathcal{P}}(\mathbb{R}^k)$ telle que

$$\tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \sum_{j=0}^{l_0} \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^j x_{k+1}^j.$$

En introduisant cette décomposition dans (2.10), on déduit pour tout $j \in \{0, \dots , l_0\}$, la nullité de la divergence de $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}^j$. Par hypothèse de récurrence, on peut donc trouver pour tout $j \in \{0, \dots , l_0\}$, un polynôme $\tilde{\mu}^j$ tel que,

$$\mathrm{rot}_k^*(D_k)\tilde{\mu}^j = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}^j.$$

Comme $\mathrm{rot}_k^*(D_k)$ n'agit que sur les k premières variables et par linéarité, $\tilde{\mu} = \sum_{j=0}^{l_0} \tilde{\mu}^j x_{k+1}^j$ vérifie effectivement (2.9) et permet donc de conclure la démonstration. $\diamondsuit$

On revient maintenant plus spécifiquement aux espaces de Sobolev avec poids pour donner le résultat de surjectivité suivant.

Proposition 2.9 *Soit l un entier naturel et p tel que $n/p \notin \{1, \dots , l\}$. Pour toute distribution $\boldsymbol{u}$ appartenant à $\mathbf{V}_{-l}^{1,p}$, il existe une distribution φ dans $(W_{-l}^{2,p}(\mathbb{R}^n))^{n(n-1)/2}$ telle que,*

$$\mathrm{rot}_n^*(D_n)\varphi = \boldsymbol{u}.$$

Preuve : Par hypothèse $\mathrm{rot}_n(D_n)\boldsymbol{u}$ appartient à $(W^{0,p}_{-l}(\mathbb{R}^n))^{n(n-1)/2}$. Il existe d'après les théorèmes 1.4 et 1.5 une fonction $\psi \in (W^{2,p}_{-l}(\mathbb{R}^n))^{n(n-1)/2}$ tel que,

$$-\Delta\psi = \mathrm{rot}_n(D_n)\boldsymbol{u}.$$

En appliquant l'opérateur $\mathrm{rot}^*_n(D_n)$ à cette équation, on obtient,

$$-\mathrm{rot}^*_n(D_n)\Delta\psi = \mathrm{rot}^*_n(D_n)\,\mathrm{rot}_n(D_n)\boldsymbol{u},$$

ce qui s'écrit encore d'après (2.8),

$$-\Delta(\mathrm{rot}^*_n(D_n)\psi - \boldsymbol{u}) = 0.$$

Autrement dit, la fonction $\boldsymbol{\lambda} = \mathrm{rot}^*_n(D_n)\psi - \boldsymbol{u}$ est un polynôme de $\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\Delta}_{[l+1-n/p]}$ qui de plus est à divergence nulle. D'après le lemme 2.8, il existe un polynôme $\mu \in (\mathcal{P}_{[l+2-n/p]}(\mathbb{R}^n))^{n(n-1)/2}$ tel que $\boldsymbol{\lambda} = \mathrm{rot}^*_n(D_n)\mu$. En particulier, $\psi + \mu$ appartient à $(W^{2,p}_{-l}(\mathbb{R}^n))^{n(n-1)/2}$ et

$$\mathrm{rot}^*_n(D_n)(\psi + \mu) = \boldsymbol{u}. \quad \diamondsuit$$

On est maintenant en mesure de compléter la proposition 2.4.

Théorème 2.10 *Soit l un entier quelconque.*
Si $n/p' \notin \{1, \ldots, l\}$ et $n/p \notin \{1, \ldots, -l\}$, alors $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ est dense dans $\mathbf{V}^{1,p}_l$.

Preuve : Le cas $l > 0$ a déjà été traité dans la proposition 2.4. On s'intéresse donc seulement au cas $l \leq 0$. Soit $\boldsymbol{\theta}$ une fonction de $\mathbf{V}^{1,p}_{-l}$ avec $l \geq 0$. D'après la proposition 2.9, il existe une distribution φ dans $(W^{2,p}_{-l}(\mathbb{R}^n))^{n(n-1)/2}$ telle que,

$$\mathrm{rot}^*_n(D_n)\varphi = \boldsymbol{\theta}.$$

On considère maintenant une fonction a appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, prenant ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ et valant identiquement 1 sur la boule unité de $\mathbb{R}^n$. Pour tout réel R strictement positif, on pose :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \ a_R(\boldsymbol{x}) = a(\boldsymbol{x}/R).$$

On montre aisément que la suite $\varphi_R = \varphi a_R$ converge, lorsque R tend vers l'infini, vers φ dans $(W^{2,p}_{-l}(\mathbb{R}^n))^{n(n-1)/2}$. En particulier, $\boldsymbol{\theta}_R = \mathrm{rot}^*_n\varphi_R$ converge vers $\boldsymbol{\theta} = \mathrm{rot}^*_n\varphi$ dans $\mathbf{W}^{1,p}_{-l}(\mathbb{R}^n)$. Fixons donc $\varepsilon > 0$. On sait, d'après ce qui précède, qu'il existe un réel R_0 tel que

$$\|\boldsymbol{\theta}_{R_0} - \boldsymbol{\theta}\|_{W^{1,p}_{-l}(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon/2.$$

D'autre part, comme $\boldsymbol{\theta}_{R_0}$ est à support compact, elle appartient à l'espace de Sobolev classique $\mathbf{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Considérons donc une suite de noyaux régularisants $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$; alors

$$\rho_k * \boldsymbol{\theta}_{R_0} \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{\theta}_{R_0} \quad \text{dans} \quad \mathbf{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

De plus, $\rho_k * \boldsymbol{\theta}_{R_0}$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $\operatorname{div}(\rho_k * \boldsymbol{\theta}_{R_0}) = \rho_k * (\operatorname{div} \boldsymbol{\theta}_{R_0}) = 0$. Par conséquent, il existe un entier k_0 tel que l'on ait simultanément,

$$\rho_{k_0} * \boldsymbol{\theta}_{R_0} \in \boldsymbol{\mathcal{V}} \text{ et } \|\boldsymbol{\theta}_{R_0} - \rho_{k_0} * \boldsymbol{\theta}_{R_0}\|_{W^{1,p}_{-l}(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon/2,$$

Ce qui permet de conclure la démonstration par simple inégalité triangulaire. $\diamondsuit$

Nous concluons cette section par une variante du résultat de de Rham qui est une conséquence directe du théorème 2.10 et de la proposition 2.2 .

Théorème 2.11 *Soit l un entier quelconque et p tel que $n/p' \notin \{1,\ldots,l\}$ et $n/p \notin \{1,\ldots,-l\}$. Alors, pour toute distribution $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^{-1,p}_{l}(\mathbb{R}^n)$ satisfaisant,*

$$\forall \boldsymbol{\varphi} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}(\mathbb{R}^n), \quad < \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} >= 0,$$

il existe une distribution $g \in W^{0,p}_{l}(\mathbb{R}^n)$, unique à une constante additive près, telle que $\nabla g = \boldsymbol{f}$.

3 Problème de Stokes dans $\mathbb{R}^n$

L'objectif de cette section est d'établir des résultats d'existence, d'unicité et de régularité du problème de Stokes (S). On notera T l'opérateur correspondant :

$$T : (\boldsymbol{u}, \pi) \longrightarrow (-\Delta \boldsymbol{u} + \nabla \pi, -\operatorname{div} \boldsymbol{u}). \tag{3.1}$$

Dans un premier temps, on montre que l'on peut découpler la vitesse $\boldsymbol{u}$ et la pression π dans le système de Stokes et se ramener essentiellement à deux équations de Poisson. On donne ensuite une application de cette procédure à des données appartenant à des espaces avec poids.

3.1 Existence et unicité pour le problème de Stokes dans $\mathbb{R}^n$

Intéressons nous tout d'abord au noyau de l'opérateur T lorsque celui-ci est défini sur l'espace des distributions tempérées $\boldsymbol{\mathcal{S}}' \times \mathcal{S}'$. Soit $(\boldsymbol{u}, \pi)$ un élément de ce noyau. En prenant la divergence de la première équation de (S), on déduit que π est une distribution tempérée harmonique *i.e.* un polynôme harmonique. En particulier, $\Delta \boldsymbol{u}$ est un polynôme harmonique, *i.e.* $\boldsymbol{u}$ est une distribution temperée biharmonique, donc un polynôme. On introduit alors pour tout entier k l'espace défini par [Gir92] :

$$S_k = \{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_k \times \mathcal{P}^{\Delta}_{k-1};\, \operatorname{div} \boldsymbol{\lambda} = 0, -\Delta\boldsymbol{\lambda} + \nabla\mu = \mathbf{0}\}.$$

On notera que conformément à la convention choisie pour les espaces $\mathcal{P}_k$, $S_k = \{(\mathbf{0}, 0)\}$ lorsque $k < 0$ et $S_0 = \mathbb{R}^n \times \{0\}$. Pour tout entier k, S_k est un sous-espace de dimension finie du noyau de T dans $\boldsymbol{\mathcal{S}}' \times \mathcal{S}'$. On a donc immédiatement le résultat d'unicité suivant :

Lemme 3.1 *Quels que soient les entiers m, l avec $m \geq 0$, le noyau de T lorsqu'il est défini sur $\mathbf{W}^{m+1,p}_{m+l}(\mathbb{R}^n) \times W^{m,p}_{m+l}(\mathbb{R}^n)$ est égal $S_{[-l+1-n/p]}$*

On s'intéresse maintenant aux questions d'existence de solutions. Soit $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \boldsymbol{\mathcal{S}}' \times \mathcal{S}'$ une solution du problème de Stokes (S). En prenant la divergence de la première équation, on constate que $(\boldsymbol{u}, \pi)$ vérifie le système découplé d'équations de Poisson :

$$(S') \quad \begin{cases} \Delta\pi = \operatorname{div} \boldsymbol{f} + \Delta g, \\ \Delta\boldsymbol{u} = \nabla\pi - \boldsymbol{f}. \end{cases}$$

Cependant, les problèmes (S') et (S) ne sont pas équivalents. En effet, si $(\boldsymbol{v}, \tau)$ vérifie (S'), on a seulement :

$$\begin{cases} -\Delta\boldsymbol{v} + \nabla\tau = \boldsymbol{f} \quad \text{dans } \boldsymbol{\mathcal{S}}'(\mathbb{R}^n), \\ \Delta \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \Delta g \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

En particulier, $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = g + \mu$ où μ est un polynôme harmonique. Le lemme suivant prouvé dans [Gir92] lorsque $n = 3$ permet de modifier $\boldsymbol{v}$ de sorte à retrouver une solution du problème initial (S).

Lemme 3.2 *Pour tout entier naturel k,* $\mathcal{P}^{\Delta}_k = \operatorname{div}(\boldsymbol{\mathcal{P}}^{\Delta}_{k+1})$.

Preuve : Si $k = 0$, c'est évident.

Si $k = 1$, on associe à x_i le polynôme $\boldsymbol{\lambda}_i = (\lambda_{ij}) = (\frac{\delta_{ij}}{2}(x_j^2 - x_{j+1}^2))$ -les indices seront ici compris modulo n-. Il est clair que $\operatorname{div} \boldsymbol{\lambda}_i = x_i$ et $\Delta\boldsymbol{\lambda}_i = 0$. D'où le résultat par linéarité. Supposons maintenant que $k \geq 2$ et soit $\mu \in \mathcal{P}^{\Delta}_k$. Alors μ se décompose en sa partie de degré 1, notée μ_1 et un polynôme μ_2 tel que $\nabla\mu_2(0) = \mathbf{0}$ et $\mu_2(0) = 0$. On notera que μ_1 et μ_2 sont harmoniques. Par linéarité et grâce au cas $k = 1$, il suffit de prouver le résultat pour μ_2. En utilisant les notations du lemme 2.8, on vérifie aisément que

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{n}(\mathcal{I}_j(\mu_2)),$$

est une solution du problème. $\diamondsuit$

En appliquant ce lemme à $\mu = \operatorname{div} \boldsymbol{v} - g$, il vient $\mu = \operatorname{div} \boldsymbol{\lambda}$ avec $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\Delta}_{k+1}$. Le couple $(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\lambda}, \tau)$ satisfait alors le problème de Stokes (S). On applique maintenant ce raisonnement en utilisant des isomorphismes du laplacien de la section 1.

3.2 Application aux espaces avec poids

On se contente dans un premier temps de construire des solutions dans $\mathbf{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n)$. Remarquons tout d'abord que si $(\boldsymbol{v}, \pi)$ appartient à $\mathbf{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n)$ alors $-\Delta \boldsymbol{v} + \nabla \pi$ appartient à $\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$. De plus, si $\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_{[1-n/p']}$ alors,

$$< -\Delta \boldsymbol{v} + \nabla \pi, \boldsymbol{\lambda} >_{\mathbf{W}_0^{-1,p} \times \mathbf{W}_0^{1,p'}} = \ < \nabla \boldsymbol{v}, \nabla \boldsymbol{\lambda} >_{L^p \times L^{p'}} - < \pi, \operatorname{div} \boldsymbol{\lambda} >_{L^p \times L^{p'}} = 0.$$

Il est donc raisonnable d'établir le résultat suivant.

Théorème 3.3 *Soit* $(\boldsymbol{f}, g)$ *appartenant à* $\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n)$*, satisfaisant la condition de compatibilité :*

$$\forall \boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_{[1-n/p']}, \quad < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\lambda} >_{\mathbf{W}_0^{-1,p} \times \mathbf{W}_0^{1,p'}} = 0, \tag{3.2}$$

alors le problème (S) *associé possède une solution unique* $(\boldsymbol{u}, \pi) \in (\mathbf{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\boldsymbol{\mathcal{P}}_{[1-n/p]}) \times L^p(\mathbb{R}^n)$*. De plus, on a l'estimation :*

$$\inf_{\boldsymbol{\lambda} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}[1-n/p]} \| \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\lambda} \|_{\mathbf{W}_0^{1,p}} + \| \pi \|_{L^p} \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_0^{-1,p}} + \| g \|_{L^p}),$$

où $C > 0$ *est une constante ne dépendant que de* p *et* n*. Ce qui est équivalent à dire que l'opérateur de Stokes,*

$$T : (\mathbf{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n))/S_{[1-n/p]} \rightarrow (\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n)) \perp S_{[1-n/p']} \tag{3.3}$$

est un isomorphisme.

Preuve : L'opérateur T est clairement continu et son injectivité découle du lemme 3.1. S'il est surjectif, c'est alors un isomorphisme. Considérons par conséquent $(\boldsymbol{f}, g)$ appartenant à $(\mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \boldsymbol{\mathcal{P}}_{[1-n/p']}) \times L^p(\mathbb{R}^n)$; alors $\operatorname{div} \boldsymbol{f}$ est dans $W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^n)$. De plus, pour tout polynôme μ de $\mathcal{P}_{[2-n/p']} \subset W_0^{2,p'}(\mathbb{R}^n)$,

$$< \operatorname{div} \boldsymbol{f}, \mu >_{W_0^{-2,p} \times W_0^{2,p'}} = - < \boldsymbol{f}, \nabla \mu >_{\mathbf{W}_0^{-1,p} \times \mathbf{W}_0^{1,p'}} = 0.$$

Autrement dit, $\operatorname{div} \boldsymbol{f}$ appartient à $W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[2-n/p']}$. Le même raisonnement amène à une conclusion identique pour Δg. D'autre part, grâce à (1.4), l'opérateur,

$$\Delta \ : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow W_0^{-2,p}(\mathbb{R}^n) \perp \mathcal{P}_{[2-n/p']},$$

est un isomorphisme. De sorte qu'il existe une unique fonction π dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ vérifiant l'égalité $\Delta(\pi - g) = \operatorname{div} \boldsymbol{f}$. Par ailleurs, pour toute fonction φ appartenant à $W_0^{1,p'}(\mathbb{R}^n)$,

$$< \partial_i \pi, \varphi >_{W_0^{-1,p} \times W_0^{1,p'}} = - < \pi, \partial_i \varphi >_{L^p \times L^{p'}} .$$

Ceci montre en particulier que si $n/p' \leq 1$ alors $< \partial_i \pi, 1 > \; = 0$. En utilisant (1.3) avec $m = 0$, on déduit qu'il existe une solution $\boldsymbol{u}$ dans $\mathbf{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ du système :

$$\Delta \boldsymbol{u} = \nabla \pi - \boldsymbol{f}.$$

Comme on l'a vu, $\operatorname{div} \boldsymbol{u} - g$ est un polynôme harmonique. De plus, comme celui-ci appartient à $L^p(\mathbb{R}^n)$, c'est le polynôme nul. Ainsi $(\boldsymbol{u}, \pi)$ vérifie $T(\boldsymbol{u}, \pi) = (\boldsymbol{f}, -g)$, ce qui prouve la surjectivité de l'opérateur T. $\diamondsuit$

Remarque 3.4 Si les données sont telles que $\Delta g + \operatorname{div} \boldsymbol{f} = 0$, alors la pression π solution dans L^p étant harmonique est donc identiquement nulle. Ceci n'est pas toujours le cas pour d'autres régularités des données; on pourra par exemple voir le cas $\boldsymbol{f} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)$ ci-dessous. En particulier, on notera que cette situation est totalement différente de celle qui prévaut dans les domaines bornés.

Nous allons maintenant établir une famille plus générale d'isomorphismes dans les espaces avec poids qui explicite comment en choisissant des données adéquates, on peut varier le comportement à l'infini des solutions du problème de Stokes. En particulier, on verra comment certaines conditions d'orthogonalité sur les données sont indispensables pour obtenir une bonne décroissance à l'infini des solutions.

Théorème 3.5 *Soient $l \in \mathbb{N}, l \neq 0$ et p tel que $n/p \notin \{1, \ldots, l\}$. Pour tout couple $(\boldsymbol{f}, g)$ dans $\mathbf{W}_{-l}^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \times W_{-l}^{0,p}(\mathbb{R}^n)$, le problème (S) admet une solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ dans $\mathbf{W}_{-l}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times W_{-l}^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ unique à un élément de $S_{[l+1-n/p]}$ près. De plus, on a l'estimation :*

$$\inf_{(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in S_{[l+1-n/p]}} (\| \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\lambda} \|_{\mathbf{W}_{-l}^{1,p}} + \| \pi + \mu \|_{W_{-l}^{0,p}}) \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_{-l}^{-1,p}} + \| g \|_{W_{-l}^{0,p}}),$$

où $C > 0$ est une constante ne dépendant que de n, p, l.

Preuve : Il faut donc prouver que l'opérateur suivant,

$$T \; : \; (\mathbf{W}_{-l}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times W_{-l}^{0,p}(\mathbb{R}^n))/S_{[l+1-n/p]} \longrightarrow \mathbf{W}_{-l}^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \times W_{-l}^{0,p}(\mathbb{R}^n), \tag{3.4}$$

est un isomorphisme. Il suffit de résoudre les équations découplées (S') comme au théorème 3.3, mais en utilisant d'autres isomorphismes du laplacien, en l'ocurrence :

$$\begin{aligned} \Delta \; &: \; W_{-l}^{0,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[l-n/p]}^{\Delta} \to W_{-l}^{-2,p}(\mathbb{R}^n) \\ \Delta \; &: \; W_{-l}^{1,p}(\mathbb{R}^n)/\mathcal{P}_{[l+1-n/p]}^{\Delta} \to W_{-l}^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

qui sont fournis par les théorèmes 1.4 et 1.5. On modifie alors les solutions de (S') obtenues avec un polynôme construit à l'aide du lemme 3.1 pour achever la résolution du problème (S). $\diamondsuit$

On désire maintenant construire des solutions ayant une meilleure décroissance à l'infini. La méthode précédente s'avère alors plus délicate à mettre en oeuvre du fait de l'apparition de conditions de compatibilité spécifiques pour les données. Cependant, en raisonnant par dualité sur les isomorphismes précédents, on obtient les résultats souhaités.

Corollaire 3.6 *Soient $l \in \mathbb{N}, l \neq 0$ et p tel que $n/p' \notin \{1, \dots, l\}$. Pour tout couple $(\boldsymbol{f}, g)$ appartenant à $\mathbf{W}_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \times W_l^{0,p}(\mathbb{R}^n)$ satisfaisant la condition de compatibilité,*

$$\forall (\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in S_{[l+1-n/p']}, \quad < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\lambda} >_{\mathbf{W}_l^{-1,p} \times \mathbf{W}_{-l}^{1,p'}} + < g, \mu >_{W_l^{0,p} \times W_{-l}^{0,p'}} = 0,$$

le problème (S) admet une unique solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times W_l^{0,p}(\mathbb{R}^n)$. De plus, on a l'estimation :

$$\| \boldsymbol{u} \|_{\mathbf{W}_l^{1,p}} + \| \pi \|_{W_l^{0,p}} \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}_l^{-1,p}} + \| g \|_{W_l^{0,p}}),$$

où $C > 0$ est une constante ne dépendant que de p, n, l.

Preuve : On considère l'opérateur de Stokes (3.4) où on change p en p'. En vertu du théorème 3.5, son adjoint

$$T^* \ : \mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times W_l^{0,p}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow (\mathbf{W}_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \times W_l^{0,p}(\mathbb{R}^n)) \perp S_{[l+1-n/p']}$$

est un isomorphisme. Par un argument de densité, on prouve que

$$T^*(\boldsymbol{\chi}, \xi) \ = \ (-\Delta \boldsymbol{\chi} + \nabla \xi, -\operatorname{div} \boldsymbol{\chi}),$$

de sorte que le résultat est démontré. $\diamondsuit$

Remarque 3.7 On notera, en particulier que grâce au lemme 1.3, la solution $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ construite au corollaire précédent satisfait :

$$|\boldsymbol{u}(x)| = o(\rho^{2-n}(x)),$$

si, $n/p' = l + 1$ et $p > n \geq 3$. C'est à dire que $\boldsymbol{u}$ décroit à l'infini plus vite que la solution fondamentale du problème de Stokes. Ce résultat nécéssite naturellement certaines conditions de compatibilité sur les données, en l'occurence, $< f_i, 1 >= 0, \ i = 1, \dots, n$.

Les théorèmes 3.3, 3.5 et 3.6 sont prouvés dans [Spe94] à l'exception des cas où interviennent les poids logarithmiques (*i.e.* $p = n$ ou $p = n'$ dans le Th. 3.3, $n/p = l + 1$ dans le Théorème 3.5, et $n/p' = l + 1$ dans le Théorème 3.6). La méthode utilisée fait aussi intervenir de manière significative les résultats connus sur le laplacien, mais nécéssite l'introduction d'une inconnue auxiliaire et la résolution de trois équations de Poisson dans $\mathbb{R}^n$.

3.3 Résultats de régularité

Cette partie est destinée à présenter quelques propriétés de régularité des solutions du problème de Stokes. L'intérêt, en particulier, de ces résultats est de montrer que régularité locale et comportement à l'infini des solutions du problème de Stokes sont indépendants. Les preuves étant similaires à celles des théorèmes 3.3 et 3.5, nous nous contenterons d'énoncer les résultats. Le premier est la version régulière du théorème 3.5 tandis que le second est celle du corollaire 3.6.

Théorème 3.8 *Soient m et l deux entiers srictement positifs et p vérifiant simultanément $n/p \notin \{1, \ldots, l-m\}$. Pour tout $(\boldsymbol{f}, g) \in \mathbf{W}^{m-1,p}_{m-l}(\mathbb{R}^n) \times W^{m,p}_{m-l}(\mathbb{R}^n)$, le problème de Stokes (S) admet une solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}^{m+1,p}_{m-l}(\mathbb{R}^n) \times W^{m,p}_{m-l}(\mathbb{R}^n)$ unique à un élément de $S_{[l+1-n/p]}$ près. De plus, on a l'estimation :*

$$\inf_{(\boldsymbol{\lambda},\mu)\in S_{[l+1-n/p]}} (\| \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\lambda} \|_{\mathbf{W}^{m+1,p}_{m-l}} + \| \pi + \mu \|_{W^{m,p}_{m-l}}) \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}^{m-1,p}_{m-l}} + \| g \|_{W^{m,p}_{m-l}}),$$

où $C > 0$ est une constante ne dépendant que de p, n, m, l.

Remarque 3.9 la preuve du cas $p = n', l = 1$ et $m > 1$ est un peu plus délicate du fait qu'elle nécéssite l'utilisation d'un résultat critique sur le laplacien pour résoudre (S').

Théorème 3.10 *Soient m et l deux entiers positifs avec $m > 0$ et p tel que $n/p' \notin \{1, \ldots, l+1\}$. Pour tout couple $(\boldsymbol{f}, g) \in \mathbf{W}^{m-1,p}_{m+l}(\mathbb{R}^n) \times W^{m,p}_{m+l}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant la condition de compatibilité :*

$$\forall(\boldsymbol{\lambda}, \mu) \in S_{[l+1-n/p']}, \quad < \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\lambda} >_{\mathbf{W}^{m-1,p}_{m+l} \times \mathbf{W}^{1-m,p'}_{-m-l}} + < g, \mu >_{W^{m,p}_{m+l} \times W^{-m,p'}_{-m-l}} = 0,$$

le problème de Stokes (S) admet une solution $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}^{m+1,p}_{m+l}(\mathbb{R}^n) \times W^{m,p}_{m+l}(\mathbb{R}^n)$ unique si $l > 0$, et unique à un élément de $S_{[1-n/p]}$ près si $l = 0$. De plus, on a les estimations :

$$\begin{gathered} \| \boldsymbol{u} \|_{\mathbf{W}^{m+1,p}_{m+l}} + \| \pi \|_{W^{m,p}_{m+l}} \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}^{m-1,p}_{m+l}} + \| g \|_{W^{m,p}_{m+l}}) \ \textit{si}\ l > 0, \\ \inf_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^n} \| \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\lambda} \|_{\mathbf{W}^{m+1,p}_{m}} + \| \pi \|_{W^{m,p}_{m}} \leq C(\| \boldsymbol{f} \|_{\mathbf{W}^{m-1,p}_{m}} + \| g \|_{W^{m,p}_{m}}), \ \textit{si}\ l = 0, \end{gathered}$$

où $C > 0$ est une constante ne dépendant que de p, n, m, l.

Remarque 3.11 Grâce à l'espace $X^{0,n'}_1$ introduit dans la remarque 1.6, on peut montrer que l'opérateur suivant est un isomorphisme :

$$T \ : \ (\mathbf{W}^{2,n'}_1 \times W^{1,n'}_1)/S_{[1-n/n']} \longrightarrow (\mathbf{X}^{0,n'}_1 \times W^{1,n'}_1)\perp S_0$$

Les résultats de régularité suivants sont une conséquence des théorèmes 3.3 et 3.8. Ils s'avèrent utiles pour améliorer celle des solutions des équations stationnaires de Navier-Stokes.

Proposition 3.12 *On considère p et q deux réels distincts dans l'intervalle* $]1, +\infty[$.
i) Si $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_0^{-1,q}(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ *avec* $p < q$ *et si* $\boldsymbol{f}$ *vérifie la condition de compatibilité* (3.2), *alors le problème* (S) *admet une solution* $(\boldsymbol{u}, \pi)$ *avec* $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_0^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ *et* $\pi \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$. *En particulier si* $p < n$, *cette solution est unique.*
ii) Si $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap W_0^{1,q}(\mathbb{R}^n)$, *et si* $\boldsymbol{f}$ *vérifie la condition* (3.2), *alors le problème* (S) *admet une solution* $(\boldsymbol{u}, \pi)$ *avec* $\boldsymbol{u} \in \mathbf{W}_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) \cap \mathbf{W}_0^{2,q}(\mathbb{R}^n)$ *et* $\pi \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap W_0^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ *et* $(\boldsymbol{u}, \pi)$ *est unique à un élément de* $S_{[\min(1-n/p, 2-n/q)]}$ *près.*

Dans un travail récent, R. Coifman, P.L. Lions, Y. Meyer et S. Semmes [Coi93] ont montré que le terme non-linéaire $\boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}$ apparaissant dans les équations de Navier-Stokes vérifie de meilleures propriétés de régularité que celles fournies par l'inégalité classique de Hölder. Par exemple, si $\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)$ est à divergence nulle et $\nabla\boldsymbol{u} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ alors, $\boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}$ appartient à $\boldsymbol{\mathcal{H}}^1(\mathbb{R}^n)$. De même, si $\nabla\boldsymbol{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0$, alors $\operatorname{div}(\boldsymbol{u}.\nabla\boldsymbol{u}) \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$. Ces propriétés appliquées aux équations stationnaires de Navier-Stokes permettent une amélioration des régularités connues pour la vitesse et la pression pourvu que des résultats similaires soient obtenus pour le problème (S).

Théorème 3.13 *Soient* $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}^1(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L^{n'}(\mathbb{R}^n)$ *tel que* $\nabla g \in \boldsymbol{\mathcal{H}}^1(\mathbb{R}^n)$. *Alors, le problème* (S) *admet une solution* $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_0^{1,n'}(\mathbb{R}^n) \times L^{n'}(\mathbb{R}^n)$, *unique si* $n \geq 3$ *telle que* $\nabla\pi$ *et* $D^2\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}^1(\mathbb{R}^n)$ *et on a l'estimation :*

$$\|D^2\boldsymbol{u}\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla\pi\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\boldsymbol{f} + \nabla g\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)}.$$

De plus, lorsque $n = 2$, *on a* $\boldsymbol{u} \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^2)$ *et*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)/\mathbb{R}} \leq C\|\boldsymbol{f} + \nabla g\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Preuve : On donne la preuve dans le cas $g = 0$. En fait, il suffit de prouver l'estimation pour $\nabla\pi$. En effet, l'estimation sur $D^2\boldsymbol{u}$ est alors une conséquence du théorème 1.7. Comme $\boldsymbol{\mathcal{H}}^1(\mathbb{R}^n) \subset \mathbf{W}_0^{-1,n'}(\mathbb{R}^n)$, on sait que

$$\Delta\pi = \operatorname{div}\boldsymbol{f} \in W_0^{-2,n'}(\mathbb{R}^n).$$

On ne peut donc pas conclure directement en utilisant un isomorphisme du Laplacien. Cependant, soit $\boldsymbol{f}_m$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ approximant $\mathbf{f}$ dans $\boldsymbol{\mathcal{H}}^1(\mathbb{R}^n)$ (*cf.* [Ste70] pour l'existence d'une telle suite) et soit F la solution élémentaire du laplacien. On pose $\pi_m = F * \operatorname{div}\boldsymbol{f}_m$ et $\boldsymbol{\theta}_m = F * \mathbf{f}_m$. On a alors :

$$\nabla\pi_m = \nabla(F * \operatorname{div}\boldsymbol{f}_m) = \nabla\operatorname{div}\boldsymbol{\theta}_m.$$

Soit $\boldsymbol{\xi}_m \in \mathbf{W}_0^{1,n'}(\mathbb{R}^n)$ une solution donnée par le théorème 1.7 du problème :

$$-\Delta \boldsymbol{\xi}_m = \boldsymbol{f}_m.$$

La différence $\boldsymbol{\theta}_m - \boldsymbol{\xi}_m$ est harmonique, c'est donc un polynôme. De plus, $\boldsymbol{\theta}_m$ décroit à l'infini au moins aussi bien que F. Par conséquent, $\boldsymbol{\theta}_m$ appartient à $\mathbf{L}^q(\mathbb{R}^n)$, pour tout $q > n/(n-2)$ si $n \geq 3$, et est inférieur à $C \ln(2+r)$ si $n = 2$. D'autre part, les injections de Sobolev impliquent que $\boldsymbol{\xi}_m$ appartient à $\mathbf{L}^{n/(n-2)}(\mathbb{R}^n)$ si $n \geq 3$ et $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^2)$ si $n = 2$.

On en déduit immédiatement qu'il existe un vecteur constant $\mathbf{K}_m$ telle que $\boldsymbol{\theta}_m = \boldsymbol{\xi}_m + \mathbf{K}_m$ si $n = 2$, et $\boldsymbol{\theta}_m = \boldsymbol{\xi}_m$ si $n \geq 3$, (en effet, les espaces $L^p(\mathbb{R}^n) + L^q(\mathbb{R}^n)$ ne contiennent pas de polynômes). On obtient donc d'après le théorème 1.7 que,

$$\|D^2 \boldsymbol{\theta}_m\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\boldsymbol{f}_m\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)}$$

On en déduit aisément que la suite $\nabla \pi_m$ est de Cauchy dans $\boldsymbol{\mathcal{H}}^1(\mathbb{R}^n)$ et converge donc dans cet espace vers une fonction $\boldsymbol{\chi} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}^1(\mathbb{R}^n)$. L'injection continue de $\boldsymbol{\mathcal{H}}^1(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbf{W}_0^{-1,n'}(\mathbb{R}^n) \perp \boldsymbol{\mathcal{P}}_0$ et le théorème 3.3 permettent alors d'aboutir aisément à l'égalité de $\boldsymbol{\chi}$ et de $\nabla \pi$ ainsi qu'à l'estimation désirée. $\diamondsuit$

On observera que le précédent résultat peut être vu comme un résultat de régularité des solutions fournies par le théorème 3.3 dans le cas $p = n'$ du fait de l'injection continue de $\boldsymbol{\mathcal{H}}^1(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathbf{W}_0^{-1,n'}(\mathbb{R}^n) \perp \boldsymbol{\mathcal{P}}_0$.(voir également [Bet96] pour le cas de la dimension 2) Le second résultat s'applique aux solutions données par le théorème 3.8 avec $m = l = 1$ et $p = n'$ et découle directement du théorème 1.7.

Théorème 3.14 *Soit* $(\boldsymbol{f}, g) \in \mathbf{L}^{n'}(\mathbb{R}^n) \times W_0^{1,n'}(\mathbb{R}^n)$ *tels que* $\operatorname{div} \boldsymbol{f} + \Delta g \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$. *Alors le problème* (S) *admet une solution* $(\boldsymbol{u}, \pi) \in \mathbf{W}_0^{2,n'}(\mathbb{R}^n) \times W_0^{1,n'}(\mathbb{R}^n)$ *telle que* $D^2\pi \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$, *et on a l'estimation :*

$$\|D^2 \pi\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\operatorname{div} \boldsymbol{f} + \Delta g\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)}.$$

De plus lorsque $n = 2$, *on a* $\pi \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ *et*

$$\|\pi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)/\mathbb{R}} \leq C \|\operatorname{div} \boldsymbol{f} + \Delta g\|_{\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)}.$$

4 Solution élémentaire du problème de Stokes dans $\mathbb{R}^n$.

On étudie la convolution par la solution élémentaire du problème de Stokes pour des données peu régulières. Cette opération lorsqu'elle est définie (ce qui n'est pas toujours le cas) donne des solutions explicites de (S). De plus elle permet d'analyser finement le comportement asymptotique des solutions pour des données à support compact. Après quelques rappels, on déterminera à quels espaces avec poids on peut étendre la convolution en utilisant la théorie des opérateurs intégraux singuliers de Calderòn-Zygmund. On appliquera finalement ces propriétés pour expliciter le comportement asymptotique des solutions du problème de Stokes.

4.1 Définitions et notations.

On rappelle tout d'abord que la solution élémentaire F de $(-\Delta)$ dans $\mathbb{R}^n$ est donnée si $n \geq 3$ par $F(\boldsymbol{x}) = c_1(n)|\boldsymbol{x}|^{2-n}$ ($c_1(n)$ désigne une constante réelle ne dépendant que n) et si $n = 2$ par $F(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi}\ln(|\boldsymbol{x}|^{-1})$.

Définition 4.1 Soient $U = (U_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $Q = (Q_i)_{1\leq i\leq n}$ respectivement une matrice et un vecteur de fonctions de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ données par :

$$\begin{cases} U_{ij}(\boldsymbol{x}) = \delta_{ij}F(\boldsymbol{x}) - c_2(n)\dfrac{x_i x_j}{|\boldsymbol{x}|^n}, \\ Q_i(\boldsymbol{x}) = -2c_2(n)\dfrac{x_i}{|\boldsymbol{x}|^n}. \end{cases}$$

On rappelle que δ désigne la masse de Dirac en $\mathbf{0}$ et δ_{ij} est le symbole de Kronecker. En utilisant une technique classique, on a les égalités dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

$$\Delta U_{ij} = -(1 + c_3(n))\delta_{ij}\delta - 2c_2(n)\text{v.p. } k_{ij}, \tag{4.1}$$

$$\textstyle\sum_{k=1}^n \partial_k U_{kj} = 0 \tag{4.2}$$

$$\partial_i Q_j = -2c_2(n)\text{v.p. } k_{ij} - c_3(n)\delta_{ij}\delta, \tag{4.3}$$

où $k_{ij}(\boldsymbol{x}) = \dfrac{\delta_{ij}}{|\boldsymbol{x}|^n} - n\dfrac{x_i x_j}{|\boldsymbol{x}|^{n+2}}$.

En particulier, grâce aux propriétés élémentaires de la convolution , on a le résultat classique suivant :

Proposition 4.2 *Soient $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n), g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et K un compact contenant leur support. On pose $\boldsymbol{h} = \nabla(F * g)$. Alors le couple $(\boldsymbol{u}, \pi)$ défini par,*

$$\boldsymbol{u} = (u_i) = \sum_{k=1}^n U_{ik} * f_k - h_i \quad \textit{et} \quad \pi = \sum_{k=1}^n Q_k * (f_k + \partial_k g), \tag{4.4}$$

est une solution infiniment différentiable du problème (S). De plus, il existe $R_K > 0$ tel que si $|\boldsymbol{x}| > R_K$, on a pour tout multi-indice $\boldsymbol{\lambda}$,

$$\begin{array}{ll} |\partial^{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})| \leq C_{K,\boldsymbol{\lambda}}(\|\boldsymbol{f}\|_{L^1} + \|g\|_{L^1})|\boldsymbol{x}|^{2-n-|\boldsymbol{\lambda}|} & \textit{si} \;\; n \geq 3 \;\textit{ou}\; n = 2 \;\textit{et}\; \boldsymbol{\lambda} \neq (0,\ldots,0) \\ |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})| \leq C_K(\|\boldsymbol{f}\|_{L^1} + \|g\|_{L^1})\ln(|\boldsymbol{x}|) & \textit{si} \;\; n = 2 \\ |\partial^{\boldsymbol{\lambda}}g(\boldsymbol{x})| =\leq C(\|\boldsymbol{f}\|_{L^1} + \|g\|_{L^1})|\boldsymbol{x}|^{1-n-|\boldsymbol{\lambda}|} & \end{array}$$

De plus, on peut préciser le comportement à l'infini de ces solutions. On se limite à un développement au premier ordre.

Proposition 4.3 *Soient $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Alors, pour tout multi-indice $\boldsymbol{\lambda}$, le couple $(\boldsymbol{u}, \pi)$ défini par* (4.4) *admet le développement à l'infini*

$$\begin{aligned}\partial^{\boldsymbol{\lambda}} u_i(\boldsymbol{x}) &=< f_j, 1 > \partial^{\boldsymbol{\lambda}} U_{ij}(\boldsymbol{x}) + \partial^{\boldsymbol{\lambda}} v_i(\boldsymbol{x}),\\ \partial^{\boldsymbol{\lambda}} \pi(\boldsymbol{x}) &=< f_j, 1 > \partial^{\boldsymbol{\lambda}} Q_j(\boldsymbol{x}) + \partial^{\boldsymbol{\lambda}} \eta(\boldsymbol{x}),\end{aligned}$$

où on utilise la convention de sommation sur les indices répétés, avec $\partial^{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = O(|\boldsymbol{x}|^{1-n-|\boldsymbol{\lambda}|})$ et $\partial^{\boldsymbol{\lambda}} \eta(\boldsymbol{x}) = O(|\boldsymbol{x}|^{-n-|\boldsymbol{\lambda}|})$ pour tout $\boldsymbol{\lambda}$.

Preuve : Considérons, $\boldsymbol{y} \in K$, il existe $R_K > 0$ indépendant de $\boldsymbol{y}$ tel que pour tout $\boldsymbol{x}$ vérifiant $|\boldsymbol{x}| > R_K$, on a $|t\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| > |\boldsymbol{x}|/2 > R_K/2$ pour tout t dans l'intervalle $[0, 1]$. On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis entre 0 et 1 à la fonction $t \mapsto \partial^{\boldsymbol{\lambda}} U_{ij}(\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{y})$. On en déduit alors aisément la majoration pour tout $\boldsymbol{y} \in K$ et $|\boldsymbol{x}| > R_K$:

$$|\partial^{\boldsymbol{\lambda}} U_{ij}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) - \partial^{\boldsymbol{\lambda}} U_{ij}(\boldsymbol{x})| < C|\boldsymbol{x}|^{1-n-\boldsymbol{\lambda}},$$

où la constante C ne dépend que de K et $\boldsymbol{\lambda}$. De sorte que la fonction

$$\partial^{\boldsymbol{\lambda}} U_{ij} * f_j - < f_j, 1 > \partial^{\boldsymbol{\lambda}} U_{ij} = \int_K f_j(\boldsymbol{y})(\partial^{\boldsymbol{\lambda}} U_{ij}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) - \partial^{\boldsymbol{\lambda}} U_{ij}(\boldsymbol{x}))d\boldsymbol{y},$$

décroit comme $|\boldsymbol{x}|^{1-n-\boldsymbol{\lambda}}$. Le même type de raisonnement s'applique à tous les autres termes intervenant dans la formule (4.4) et permet de conclure la démonstration.

4.2 Le cas de seconds membres distributions.

On généralise ici les produits de convolution à des données $f \in W_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$. On pose pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$< U_{ij} * f, \varphi >_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = < f, \psi >_{W_l^{-1,p} \times W_{-l}^{1,p'}} \tag{4.5}$$

$$< Q_i * f, \varphi >_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = < f, \gamma >_{W_l^{-1,p} \times W_{-l}^{1,p'}}, \tag{4.6}$$

$$\psi(\boldsymbol{y}) = < U_{ij}, \varphi(\boldsymbol{y} - .) > = (U_{ij} * \varphi)(\boldsymbol{y}), \tag{4.7}$$

$$\gamma(\boldsymbol{y}) = < Q_i, \varphi(\boldsymbol{y} - .) > = (Q_i * \varphi)(\boldsymbol{y}). \tag{4.8}$$

Le lemme suivant donne des conditions pour que (4.5) et (4.6) aient un sens.

Lemme 4.4 *Soient $p \in]1, +\infty[$ et l un entier quelconque tels que $n/p' \notin \{1, \ldots, l\}$. Si $f \in W_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n)$, alors $U_{ij} * f$ est une distribution si et seulement si $n/p > 1 - l$ et $Q_i * f$ est une distribution si et seulement si $n/p > -l$.*

Preuve : Soit $\varphi_m \to 0$ dans $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^n)$ où K désigne un compact de $\mathbb{R}^n$. Pour conclure sur U_{ij} (*resp.* Q_j) il suffit de prouver que la suite ψ_m associée par (4.7) (*resp* γ_m associée par (4.8)) tend vers 0 dans $W^{1,p'}_{-l}(\mathbb{R}^n)$. Lorsque $l > 1-n/p$, on a $(n+l-1)p' > n$ de sorte que l'on conclut aisément pour $U_{ij} * f$ grâce à la proposition 4.2. Dans le cas contraire, il suffit de constater grâce à la proposition 4.3 que si par exemple $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_m \neq 0$, alors ψ_m n'appartient pas à $W^{1,p'}_{-l}(\mathbb{R}^n)$ et (4.5) n'a pas de sens. Le même raisonnement s'applique pour $Q_j * f$ $\quad\diamondsuit$

Nous allons maintenant que les produits de convolution définis auparavant coïncident avec les solutions du problème (S) fournies par les théorèmes 3.3, 3.5 et le corollaire 3.6. A cet effet, on utilise la théorie des opérateurs intégraux singuliers de Calderòn-Zygmund. Cette théorie étudie en particulier les propriétés de continuité d'opérateurs qui sont de la forme :

$$\varphi \longmapsto (K\varphi)(\boldsymbol{y}) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|>\varepsilon} k(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}. \tag{4.9}$$

où k satisfait la définition suivante :

Définition 4.5 Soit k une fonction localement intégrable en dehors de l'origine. On dit que k est un noyau de Calderòn-Zygmund si il existe une constante $C > 0$ telle que :
i) pour tout $\boldsymbol{x} \neq 0$, $|k(\boldsymbol{x})| \leq C|\boldsymbol{x}|^{-n}$.
ii)Pour tout $i = 1, \ldots, n$, la distribution $\partial_i k(\boldsymbol{x})$ est une fonction localement bornée en dehors de l'origine , et pour tout $\boldsymbol{x} \neq 0$, $|\partial_i k(\boldsymbol{x})| \leq C|\boldsymbol{x}|^{-n-1}$.
iii) l'opérateur défini pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ par (4.9) se prolonge en un opérateur continu de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

L'intérêt majeur de ces opérateurs est qu'ils se prolongent en opérateurs continus sur certains espaces L^p avec poids. En particulier, l'opérateur

$$K_{ij} \ : \ \varphi \longmapsto K_{ij}\varphi = \Delta(U_{ij} * \varphi) + (1 + c_3(n))\delta_{ij}\varphi = \partial_i(Q_j * \varphi) + c_3(n)\delta_{ij}\varphi$$

appartient à cette classe d'opérateurs. En effet, si φ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on montre de manière classique que

$$(K_{ij}\varphi)(\boldsymbol{y}) = -2c_2(n) \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|>\varepsilon} k_{ij}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\varphi(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}. \tag{4.10}$$

Les deux premières conditions de la définition sont trivialement vérifiées par tous les noyaux k_{ij}. La troisième, plus délicate, se vérifie par exemple en utilisant un résultat donné dans [Tor86] (Chap XI, def. 5.1 et Th 5.4) qui exploite les propriétés de décroissance et de symétrie des noyaux k_{ij}. De plus, les opérateurs,

$$K_{ij} \ : \ W^{0,p}_{l}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow W^{0,p}_{l}(\mathbb{R}^n), \text{ avec } -n/p < l < n/p', \tag{4.11}$$

sont définis et continus, propriété qui découle de l'appartenance du poids ρ^{lp} à la classe A_p de Muckenhoupt (*cf.*[Mey90] Chap. VII,Cor. 2, p. 255, et [Tor86] Chap. IX).

On utilisera aussi les inégalités de Calderòn-Zygmund suivantes démontrées dans [Amr94a],

$$\forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \|D^2 u\|_{W_l^{0,p}} \leq C\|\Delta u\|_{W_l^{0,p}} \text{ si } n/p' \notin \{1,\ldots,l\} \text{ et } n/p > -l. \tag{4.12}$$

On est maintenant en position d'établir certaines propriétés de continuité.

Proposition 4.6 *Soient l un entier et $p \in]1,+\infty[$ tels que $1 - n/p < l < n/p'$, alors, les opérateurs de convolution par U_{ij} sont continus de $W_l^{-1,p} \perp \mathcal{P}_{[l+1-n/p']}$ dans $W_l^{1,p}$.*

Preuve : Soit f appartenant à $W_l^{-1,p} \perp \mathcal{P}_{[l+1-n/p']}$, il existe une fonction $\boldsymbol{\chi}$ dans $\mathbf{W}_l^{0,p}$ et une constante $C > 0$ indépendante de f telle que :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\chi} = f \quad \text{et} \quad ||\boldsymbol{\chi}||_{\mathbf{W}_l^{0,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C||f||_{W_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

En effet, il suffit de prendre $\boldsymbol{\chi} = \nabla(\Delta)^{-1}(f)$ en prenant pour Δ l'isomorphisme (1.2) ou son dual suivant le signe de l'entier l. Par conséquent, pour toute fonction $\boldsymbol{\theta}$ appartenant à $\boldsymbol{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^n)$, on a,

$$\begin{aligned} |<\nabla(U_{ij} * f), \boldsymbol{\theta}>_{\boldsymbol{\mathcal{D}}' \times \boldsymbol{\mathcal{D}}}| &= |<\operatorname{div} \boldsymbol{\chi}, U_{ij} * \operatorname{div} \boldsymbol{\theta}>_{W_l^{-1,p} \times W_{-l}^{1,p'}}| \\ &\leq |<\boldsymbol{\chi}, D^2(U_{ij} * \boldsymbol{\theta})>_{\mathbf{W}_l^{0,p} \times \mathbf{W}_{-l}^{0,p'}}|. \end{aligned}$$

Grâce à la proposition 4.2 , les fonctions $U_{ij} * \boldsymbol{\theta}$ appartiennent à $W_{-l+1}^{2,p'}(\mathbb{R}^n) \subset W_{-l}^{2,p'}(\mathbb{R}^n)$. De plus, l'inégalité (4.12) s'étendant par densité à toutes les fonctions de $W_{-l}^{2,p'}(\mathbb{R}^n)$. On déduit de la propriété (4.11) :

$$\begin{aligned} |<\nabla(U_{ij} * f), \boldsymbol{\theta}>_{\boldsymbol{\mathcal{D}}' \times \boldsymbol{\mathcal{D}}}| &\leq C\| \boldsymbol{\chi} \|_{\mathbf{W}_l^{0,p}} \| (1 + c_3(n))\delta_{ij}\boldsymbol{\theta} + K_{ij}\boldsymbol{\theta} \|_{\mathbf{W}_{-l}^{0,p'}} \\ &\leq C\| \boldsymbol{\chi} \|_{\mathbf{W}_l^{0,p}} \| \boldsymbol{\theta} \|_{\mathbf{W}_{-l}^{0,p'}}. \end{aligned}$$

et donc,

$$\| \nabla(U_{ij} * f) \|_{\mathbf{W}_l^{0,p}} \leq C\| f \|_{W_l^{-1,p}}.$$

D'autre part, en travaillant directement sur $U_{ij} * f$, il vient :

$$|<U_{ij} * f, \theta>_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}| = |<\boldsymbol{\chi}, \nabla(U_{ij} * \theta)>_{\mathbf{W}_l^{0,p} \times \mathbf{W}_{-l}^{0,p'}}| \leq \| \boldsymbol{\chi} \|_{\mathbf{W}_l^{0,p}} \| \nabla(U_{ij} * \theta) \|_{\mathbf{W}_{-l}^{0,p'}}.$$

Comme $U_{ij} * \theta \in \mathbf{W}_{-l+1}^{2,p'}$, on a d'après le théorème 1.2 :

$$\| \nabla(U_{ij} * \theta) \|_{\mathbf{W}_{-l}^{0,p'}} \leq C\| D^2(U_{ij} * \theta) \|_{W_{-l+1}^{0,p'}},$$

de sorte qu'en utilisant l'inégalité (4.12) et la propriété (4.11), on obtient :

$$| < U_{ij} * f, \theta > | \leq C \| f \|_{W_l^{-1,p}} \| \theta \|_{W^{0,p'}_{-l+1}} \quad \diamondsuit$$

Le traitement de la "pression élémentaire" est plus aisé, car il ne fait intervenir que des dérivations d'ordre 1. En particulier, on montre de manière essentiellement similaire

Proposition 4.7 *Soient l un entier et p tels que, $-n/p < l < n/p'$, les opérateurs de convolution par Q_i sont continus de $W_l^{-1,p} \perp \mathcal{P}^{\Delta}_{[l+1-n/p']}$ dans $W_l^{0,p}$.*

L'énoncé suivant donne les conditions pour lesquelles les solutions abstraites construites par les théorèmes 3.3, 3.5, et le corollaire 3.6 s'écrivent explicitement sous forme de convolution.

Théorème 4.8 *Soient l un entier et p tels que $1 - n/p < l < n/p'$ et $(\boldsymbol{f}, g)$ appartient à $(\mathbf{W}_l^{-1,p} \times W_l^{0,p}) \perp \mathcal{S}_{[l+1-n/p']}$, alors la formule (4.4) a un sens et définit l'unique solution du problème (S) dans $\mathbf{W}_l^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times W_l^{0,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Preuve : Suite aux hypothèses sur p et l, on a $\mathcal{S}_{[l+1-n/p']} = \boldsymbol{\mathcal{P}}_{[l+1-n/p']} \times \mathcal{P}_{[l-n/p']}$ et on peut appliquer les propositions 4.6 et 4.7. Il suffit donc pour démontrer le résultat de s'assurer que la fonction $\mathbf{h} = \nabla(F * g)$ et son laplacien appartiennent à de "bons espaces".

Plus précisément, les hypothèses vérifiées par g font, d'après [Amr94a] que $F * g$ est toujours dans $W_l^{2,p}(\mathbb{R}^n)$. Par conséquent $\boldsymbol{h}$ appartient à $\mathbf{W}_l^{1,p}$ et $\Delta \boldsymbol{h}$ à $\mathbf{W}_l^{-1,p} \perp \boldsymbol{\mathcal{P}}^{\Delta}_{[l+1-n/p']}$. Toutes les convolutions sont donc définies au vu des résultats précédents, et le couple $(\boldsymbol{u}, q)$ défini par la formule (4.4) est solution du problème (S). $\diamondsuit$

L'étude précédente permet d'affiner l'analyse du comportement asymptotique des solutions du problème (S). En particulier, les deux résultats suivants étendent ou précisent les résultats de la remarque 3.7. On considère dans un premier temps le cas de données distributions à support compact. Les solutions décroissent alors à l'infini comme pour des données régulières. Ce résultat est comparable au théorème V.3.2. de [Gal94a] qui établit une représentation asymptotique des solutions du problème de Stokes dans un ouvert extérieur pour $\boldsymbol{f} \in L^p$ à support compact et $g = 0$.

Proposition 4.9 *Soient $(\boldsymbol{f}, g) \in \mathbf{W}_0^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n)$ à support dans un compact K. La formule (4.4) définit une solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ du problème (S). Si $n \geq 3$, celle-ci est l'unique solution de (S) telle que $\boldsymbol{u}$ et π tendent vers 0 à l'infini. Si $n = 2$, celle-ci est, à un élément de S_0 près, l'unique solution de (S) telle que $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = O(\ln |\boldsymbol{x}|)$ et π tende vers 0 à l'infini. De plus, $(\boldsymbol{u}, \pi)$ admet le développement asymptotique fourni par la proposition 4.3*

Preuve : Soit l tel que $1 - n/p < l < n/p'$, alors $(\boldsymbol{f}, g) \in \mathbf{W}_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \times W_l^{0,p}(\mathbb{R}^n)$. En particulier, si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\int \varphi = 1$, on a $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}^1 + \boldsymbol{f}^2$ avec, $\boldsymbol{f}^1_i = < \boldsymbol{f}_i, 1 > \varphi$ et $\boldsymbol{f}^2 \in \mathbf{W}_l^{-1,p}(\mathbb{R}^n) \perp \boldsymbol{\mathcal{P}}_0$.

Grâce à la proposition 4.2 et au théorème 4.8, on vérifie que la formule (4.4) définit $(\boldsymbol{u}^1, \pi^1)$ associés à $(\boldsymbol{f}^1, 0)$ et $(\boldsymbol{u}^2, \pi^2)$ associés à $(\boldsymbol{f}^2, g)$. Par conséquent, $(\boldsymbol{u}, \pi) = (\boldsymbol{u}^1 + \boldsymbol{u}^2, \pi^1 + \pi^2)$ définit une solution du problème (S). D'autre part, si B_K est une boule ouverte contenant K, on sait qu'il existe $\boldsymbol{w} \in \mathbf{W}^{1,p}(B_K)$ satisfaisant le problème :

$$\Delta \boldsymbol{w} = \boldsymbol{f}^2 \text{ dans } B_K \quad \text{et} \quad \boldsymbol{w} = \mathbf{0} \text{ sur } \partial B_K.$$

De sorte qu'en prolongeant $\nabla \boldsymbol{w}$ par 0 en dehors de B et en notant χ la fonction prolongée, on a $\boldsymbol{f}^2 = \operatorname{div} \chi$ avec $\chi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\overline{B}_K$. Soient χ_m et g_m des suites de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ à support dans $\overline{B}_K$ approchant χ et g dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. Grâce aux propositions 4.6 et 4.7 , $\boldsymbol{u}^2$ est la limite dans $\mathbf{W}^{1,p}_l(\mathbb{R}^n)$, de $\boldsymbol{u}^2_m = \sum U_{ik} * (\operatorname{div} \chi_m)_k - \nabla(F * g_m)$. Or, la proposition 4.2 s'applique à chacun des éléments de cette suite et donne, pour tout $|\boldsymbol{x}| > R_K$ et tout multi-indice $\boldsymbol{\lambda}$

$$|\partial^{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{u}^2_m(\boldsymbol{x})| \leq C_K(\|\chi_m\|_{L^1} + \|g_m\|_{L^1})|\boldsymbol{x}|^{1-n-|\boldsymbol{\lambda}|}. \tag{4.13}$$

En particulier, comme χ_m et g_m sont de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ et à support dans K, elles sont de Cauchy dans $L^1(\mathbb{R}^n)$. La suite $\partial^{\boldsymbol{\lambda}} \boldsymbol{u}^2_m(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}|^{n-1+|\boldsymbol{\lambda}|}$ est donc de Cauchy dans $L^\infty(\{\boldsymbol{x}, |\boldsymbol{x}| > R_K\})$. Elle converge donc uniformément et on peut passer à la limite dans (4.13). Le même résultat découle pour $\boldsymbol{u}^1$ de la proposition 4.2. Quant aux propriétés d'unicité, elles découlent directement des propriétés des polynômes sur $\mathbb{R}^n$. $\diamondsuit$

Les développements asymptotiques précédents sont fortement liés au propriétés de support compact des données. Cependant, on peut abandonner cette hypothèse, tout en conservant d'intéressantes propriétés asymptotiques pour les solutions du problème (S).

Théorème 4.10 *Soient l un entier et $p > n \geq 3$ tel que $n/p' = l + 1$. On considère $\boldsymbol{f} \in \mathbf{W}^{-1,p}_l(\mathbb{R}^n)$ et $g \in W^{0,p}_l(\mathbb{R}^n)$. Alors, il existe une unique solution $(\boldsymbol{u}, \pi)$ du problème (S) telle que $\boldsymbol{u}$ tende vers 0 à l'infini et $\pi \in W^{0,p}_l(\mathbb{R}^n)$. De plus,*

$$\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^{n} < f_j, 1 > U_{ij}(\boldsymbol{x}) + o(|\boldsymbol{x}|^{2-n}).$$

Preuve : On utilise la décomposition $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}^1 + \boldsymbol{f}^2$ introduite pour prouver la proposition 4.9. Les convolées de $\boldsymbol{f}^1$ et $\boldsymbol{f}^2$ sont donc bien définies et fournissent chacune un des termes du développement grâce, en particulier, au lemme 1.3 et au corollaire 4.3. $\diamondsuit$

On notera que ce résultat est optimal dans le sens où dès que $n/p' > l + 1$ le développement asymptotique n'est plus vérifié. Il améliore en particulier les résultats contenus dans [Gal94a]. On notera aussi qu'il ne requiert aucune condition de compatibilité sur les données, contrairement au théorème 3.3 ou au corollaire 3.6. D'autre part, ce type de démarche peut être étendu à beaucoup d'autres valeurs de p et l. Alors le terme dominant reste inchangé alors que l'ordre de décroissance du reste dépend de p, n et l. Le choix de données données plus régulières permet aussi d'obtenir un développement asymptotique de la pression π qui n'a pas de sens sous les hypothèses faibles précédentes.

References

[Ada75] R.A. Adams. *Sobolev Spaces.* Academic press, New York, 1975.

[Amr94a] C. Amrouche;V.Girault;J.Giroire. Calderòn-Zygmund inequalities, Riesz potentials and Riesz transforms in weighted Sobolev spaces. *Progress in P.D.E., Pont a Mousson*, 1, 1994.

[Amr94b] C. Amrouche;V.Girault;J.Giroire. Weighted Sobolev spaces for the Laplace equation in $\mathbf{R}^n$. *J. Math. Pures et Appliquées*, 20:579–606, 1994.

[Bab73] I. Babuska. The finite element method with lagrangian multipliers. *Numer. Math.*, 20:179–192, 1973.

[Bet96] F Bethuel;J.M.Ghidaglia. Sharp L^∞ estimates for the 2D-Stokes operator. *Differential and integral equations*, 9(1):1–9, 1996.

[Bog79] M.E. Bogovsky. Solutions of the first boundary value problem for the equations of continuity of an incompressible medium. *Soviet Math. Dokl.*, 20:1094–1098, 1979.

[Bre74] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle points problems arising from Lagrange multipliers. *R.A.I.R.O., Ana. Num.*, R2:129–151, 1974.

[Cat61] L. Cattabriga. Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes. *Rend. Sem. Mat. Padova*, 31:308–340, 1961.

[Coi93] R. Coifman;P.L.Lions;Y.Meyer;S.Semmes. Compensated compactness and Hardy spaces. *J. Maths Pures et Appliquées*, pages 247–286, 1993.

[DeR60] G. DeRham. *Variétés differentiables.* Hermann, 1960.

[Far93] R. Farwig;C.G.Simader;H.Sohr. An L^q-theory for weak solutions of the Stokes system in exterior domains. *Math. Meth. in applied sciences*, 16:707–723, 1993.

[Gal90] G.P. Galdi;C.G.Simader. Existence uniqueness and L^q-estimates for the Stokes problem in an exterior domain. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 112:291–318, 1990.

[Gal94a] G.P. Galdi. *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations.*, volume 1. Springer tracts in natural philosophy, 1994.

[Gal94b] G.P. Galdi;C.G.Simader. New estimates for the steady-state Stokes problem in exterior domains with applications to the Navier-Stokes problem. *Diff. and Integral equations*, 7:847–861, 1994.

[Gir87] J. Giroire. *Etude de quelques problèmes aux limites extérieurs et résolution par équations intégrales.* PhD thesis, Université Paris VI, 1987.

[Gir91] V. Girault;A.Sequeira. A well posed problem for the exterior Stokes equations in two and three dimensions. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 114:313–333, 1991.

[Gir92] V. Girault. The gradient, curl and Stokes operators in weighted Sobolev spaces of $\mathbf{R}^n$. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 39:279–307., 1992.

[Gob71] J. Gobert. Sur une inégalité de coercivité. *Journal of mathematical analysis and applications*, (36):518–528, 1971.

[Han71] B. Hanouzet. Espaces de Sobolev avec poids- Application au problème de Dirichlet dans un demi-espace. *Rend. del Sem. Mat. delaa Univ. di Padova*, XLVI:227–272, 1971.

[Koz91] H. Kozono;H.Sohr. New a priori estimates for the Stokes equations in exteriors domains. *Indiana Univ. Math. J.*, 40:1–25, 1991.

[Kud59] L.D. Kudrjavcev. Direct and inverse imbeddings theorems. application to the solution of elliptic equation by variationnal method. *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 55:1–182, 1959.

[Ler74] M.N. Leroux. Résolution numérique du problème du potentiel dans le plan par une méthode variationnelle d'éléments finis. Master's thesis, Thèse de troisième cycle, Université de Rennes, 1974.

[Loc83] R.B. Lockhart,R.C.McOwen. On elliptic system in $\mathbb{R}^n$. *Acta Mathematica*, 150:125–135, 1983.

[McO79] R.C. McOwen. The behaviour of the laplacian on weighted Sobolev spaces. *Comm. on Pure and Applied Math.*, XXXII:783–795, 1979.

[Mey90] Y. Meyer. *Ondelettes et opérateurs II : Opérateurs de Calderòn-Zygmund.* Hermann, 1990.

[Spe94] M. Specovius Neugebauer. Weak Solutions of the Stokes Problem in Weighted Sobolev Spaces. *Acta Applicandae Mathematicae.*, 37:195–203, 1994.

[Ste70] E.M. Stein. *Singular Integrals and differentiability properties of functions.* princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[Tor86] A. Torchinsky. *Real-variable methods in harmonic analysis.* Academic press, 1986.