

STABILITE L^2 DE SCHEMAS VOLUMES FINIS POUR LES EQUATIONS DE MAXWELL EN 2D ET 3D SUR MAILLAGE NON-STRUCTURE QUELCONQUE.

Serge Piperno

CERMICS, INRIA, B.P. 93, 06902 Sophia-Antipolis Cedex, France.

Abstract

Dans ce rapport, nous cherchons à établir des conditions suffisantes et éventuellement nécessaires de stabilité L^2 pour des méthodes de volumes finis du premier ordre en temps et en espace, appliquées aux équations de Maxwell. En deux dimensions d'espace, nous proposons une condition suffisante de stabilité d'une grande généralité, puisqu'elle est valable pour toute forme de volumes finis, avec des conditions aux limites absorbantes ou métalliques. Nous montrons que cette condition est également nécessaire pour une classe de maillages réguliers. En trois dimensions d'espace, la condition suffisante prend une forme similaire. Cependant, cette condition n'est jamais nécessaire. Nous indiquons une nouvelle condition suffisante de stabilité, plus large, et qui s'avère nécessaire pour des maillages en parallélépipèdes rectangles.

L^2 STABILITY OF FINITE VOLUME SCHEMES FOR THE MAXWELL SYSTEM IN TWO AND THREE DIMENSIONS ON ARBITRARY UNSTRUCTURED MESHES.

Résumé

In this report, we investigate sufficient and possibly necessary conditions for the L^2 stability of first-order accurate finite volume schemes for Maxwell's equations. In two space dimensions, we yield a very general sufficient condition, since it is valid for any form of cells, with metallic or absorbing boundary conditions. We show this condition is also necessary for a class of regular meshes. In three space dimensions, the sufficient condition takes a similar form. However, we show it is never necessary to achieve stability. We propose another more complex sufficient condition for L^2 stability, which turns to be also necessary for regular meshes made of parallelepipedic elements.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Équations de Maxwell TM en 2D	3
2.1	Système à résoudre	3
2.2	Volumes finis triangulaires	4
2.2.1	Introduction	4
2.2.2	Propriétés des matrices	5
2.2.3	Estimations d'énergie	6
2.2.4	Condition suffisante de stabilité	8
2.3	Généralisations	9
2.3.1	Éléments quelconques	9
2.3.2	Autre traitement des conditions aux limites métalliques	10
2.3.3	Schémas implicites	11
2.4	Condition nécessaire de stabilité	11
3	Équations de Maxwell en 3D	12
3.1	Système à résoudre	12
3.2	Volumes finis tétraédriques	13
3.2.1	Introduction	13
3.2.2	Propriétés des matrices	14
3.2.3	Estimations d'énergie	15
3.2.4	Condition suffisante de stabilité	17
3.3	Généralisations	19
3.3.1	Éléments quelconques	19
3.3.2	Schémas implicites	20
3.4	Condition nécessaire de stabilité	20
3.4.1	(69) n'est jamais nécessaire	20
3.4.2	Vers une condition nécessaire et suffisante	21
4	Autres estimations théoriques	21
5	Conclusion	22

1 Introduction

De nombreuses méthodes numériques ont été utilisées pour la résolution des équations de Maxwell instationnaires. À côté des méthodes de différences finies, fondées sur le schéma de Yee [12], sont apparues récemment des méthodes en volumes finis, depuis longtemps utilisées en mécanique des fluides. Contrairement aux méthodes en différences finies, ces dernières s'adaptent naturellement aux maillages non-structurés [3].

La stabilité de méthodes en volumes finis est une question étudiée depuis de nombreuses années. Pour des maillages réguliers et structurés, plusieurs types d'approches sont possible. La plus utilisée est l'approche de von Neumann par modes de Fourier [1], qui donne un résultat sur la stabilité L^2 d'un schéma numérique. L'approche par équation équivalente n'en est pas trop éloignée [11], mais n'est également valable que sur maillage régulier. Elle donne un résultat de stabilité approché, puisqu'il concerne la solution continue de l'équation équivalente du schéma numérique. Ces deux types d'approche ne traitent pas le problème des conditions aux limites. L'approche par équation équivalente est purement locale, tandis que l'approche de von Neumann ne traite que des problèmes infinis ou avec conditions aux limites périodiques.

La notion de schéma à variation totale décroissante, introduite par Harten [6], a permis de démontrer la stabilité L^∞ de schémas en volumes finis sur des maillages non réguliers, mais mono-dimensionnels.

On s'attache dans ce rapport à l'étude de la stabilité L^2 de schémas en volumes finis en deux et trois dimensions d'espace sur maillages non-structurés, avec des volumes finis de forme quelconque, et en incluant deux types de conditions aux limites. Le type de méthode énergétique utilisé s'inspire de démonstrations pour des méthodes d'éléments finis [2].

On s'intéresse plus particulièrement ici au système des équations de Maxwell. Pour ce système hyperbolique linéaire, on s'intéresse au schéma décentré d'ordre un, et on cherche à établir la limite de stabilité du schéma d'Euler explicite en temps. L'étude est d'abord menée en deux dimensions d'espace pour les ondes transverses magnétiques (TM) - il en va exactement de même pour les ondes transverses électriques - puis dans le cas général en trois dimensions d'espace. Une étude similaire pourrait être menée pour l'équation d'advection en trois dimensions. On considère un domaine borné, avec des conditions aux limites absorbantes (pour la frontière extérieure du domaine) et des conditions aux limites métalliques (autour d'un obstacle par exemple).

Ce rapport s'articule ainsi: dans la section 2, pour les équations de Maxwell en deux dimensions d'espace (ondes TM), on établit une condition suffisante de stabilité de la méthode numérique (schéma décentré du premier ordre, schéma d'Euler explicite du premier ordre en temps) sur une triangulation quelconque, pour des volumes finis triangulaires, avec conditions aux limites absorbantes ou métalliques. On étend ensuite cette condition suffisante aux volumes finis de forme quelconque. On montre enfin que la condition suffisante établie est également nécessaire pour des maillages réguliers. On procède de même dans la section 3 pour le système de Maxwell en trois dimensions d'espace. On démontre cependant que la condition suffisante de stabilité établie pour des volumes finis quelconques n'est jamais nécessaire. Cependant, nous donnons une estimation d'une limite de stabilité plus grande, qui est de plus nécessaire pour une partition en volumes finis réguliers.

2 Équations de Maxwell TM en 2D

2.1 Système à résoudre

On considère les équations de Maxwell (ondes TM) en deux dimensions d'espace (milieu homogène de paramètres ϵ , μ et $\epsilon\mu c^2 = 1$). Les grandeurs E_z , H_x et H_y sont solutions des équations suivantes:

$$\begin{cases} \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \end{cases} \quad (1)$$

Les équations sont posées dans un domaine borné Ω . On impose sur le bord $\partial\Omega$ du domaine deux types de conditions aux limites: des conditions de type "bord métallique" autour d'un obstacle par exemple, sur $\partial\Omega_m$, et éventuellement des conditions absorbantes sur la frontière fictive à l'infini $\partial\Omega_\infty$ (voir Figure 1).

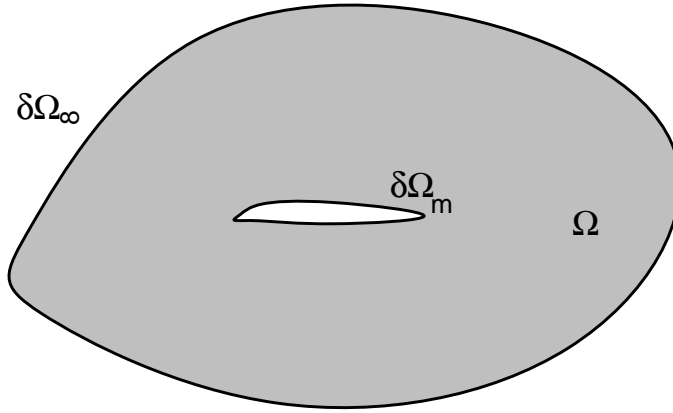


FIG. 1: *Domaine Ω et bords du domaine*

En deux dimensions d'espace, et pour des ondes TM, la condition au bord métallique s'écrit $E_z = 0$. La condition absorbante dans la direction sortante unitaire \vec{n} que nous considérons est la condition absorbante de Silver-Müller d'ordre un, qui se réduit en deux dimensions d'espace et pour des ondes TM, à $E_z = c\mu(n_y H_x - n_x H_y)$.

Par le changement de variables suivant:

$$\begin{cases} E_z = \mu u \\ H_x = \frac{v}{c} \\ H_y = \frac{w}{c} \end{cases}, \quad (2)$$

on se ramène au système du premier ordre

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_t + A \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_x + B \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}_y = 0, \quad (3)$$

où les matrices symétriques A et B sont données par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Le système précédent est hyperbolique strict, puisque pour tout couple de réels (α, β) non simultanément nuls, la matrice $\alpha A + \beta B$ est diagonalisable dans \mathbf{R} , à valeurs propres distinctes et égales à

$$\begin{cases} \rho_0 = 0 \\ \rho_+ = c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ \rho_- = -c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases} \quad (5)$$

La condition aux limites métalliques s'écrit maintenant $u = 0$ sur $\partial\Omega_m$ et, sur $\partial\Omega_\infty$, la condition absorbante dans la direction sortante unitaire \vec{n} se transforme en $u - n_y v + n_x w = 0$.

2.2 Volumes finis triangulaires

2.2.1 Introduction

On suppose que l'on dispose d'une triangulation quelconque, en particulier non nécessairement structurée, du domaine Ω . On considère une méthode de volumes finis centrés sur les éléments, c'est-à-dire pour laquelle les cellules sont les triangles de la triangulation. Pour chaque triangle \mathcal{T}_i , A_i représente sa surface. Pour chaque arête a_{ij} interne du maillage, entre les triangles \mathcal{T}_i et \mathcal{T}_j , on note $\vec{n}_{ij} = (n_{ijx}, n_{ijy})$ la normale à l'arête, orientée du triangle \mathcal{T}_i vers le triangle \mathcal{T}_j et de norme L_{ij} , où L_{ij} est la longueur de l'arête. Pour une arête du bord du domaine, les mêmes grandeurs sont définies, j jouant le rôle de l'indice d'un triangle fictif à l'extérieur du domaine. Le schéma conservatif en volumes finis s'écrit:

$$A_i \frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t} + \sum_{j \in \mathcal{V}_i} F_{ij} = 0, \quad (6)$$

où $W = {}^t(u, v, w)$, l'indice i représente le triangle \mathcal{T}_i , Δt est le pas de temps et W_i^n est une approximation de la valeur moyenne de W sur le triangle \mathcal{T}_i . L'ensemble \mathcal{V}_i est l'ensemble des triangles voisins du triangle \mathcal{T}_i (ayant une arête en commun).

Les flux numériques F_{ij} sont donnés pour des arêtes internes par

$$F_{ij} = (An_{ijx} + Bn_{ijy})^+ W_i^n + (An_{ijx} + Bn_{ijy})^- W_j^n, \quad (7)$$

où les exposants \pm signifient les parties positive et négative de la matrice considérée, après diagonalisation. Ce schéma, d'ordre un en espace, est une extension directe du schéma décentré monodimensionnel de Harten, Lax et van Leer [7]. Il utilise un solveur de Riemann exact, disponible pour un système hyperbolique linéaire. Pour une arête du bord métallique $\partial\Omega_m$, la valeur manquante W_j^n au nœud fictif est prise (état miroir pour la condition au bord $u = 0$) égale à

$$W_j^n = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} W_i^n. \quad (8)$$

Pour une arête de la frontière à l'infini $\partial\Omega_\infty$, la condition de Silver-Müller d'ordre un est à nouveau imposée de manière faible, cette fois en prenant $W_j^n = 0$. Il s'agit alors de ne pas prendre en compte les ondes entrant dans le domaine. Le flux au bord vaut donc

$$F_{ij} = (An_{ijx} + Bn_{ijy})^+ W_i^n. \quad (9)$$

Pour mieux comprendre pourquoi le flux (9) traite de manière faible et consistante la condition aux limites absorbante, il suffit d'observer que, pour tout état $W = {}^t(u, v, w)$, on a:

$$\begin{aligned} (An_{ijx} + Bn_{ijy})W &= (An_{ijx} + Bn_{ijy})^+ W \\ &+ \frac{c}{2} \left(u - \frac{n_{ijy}}{L_{ij}}v + \frac{n_{ijx}}{L_{ij}}w \right) \begin{pmatrix} -L_{ij} \\ n_{ijy} \\ n_{ijx} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dans la suite, les exposants n sont omis, puisque nous étudions un schéma d'Euler explicite.

2.2.2 Propriétés des matrices

Pour chaque arête a_{ij} , on note désormais M_{ij} la matrice

$$M_{ij} = An_{ijx} + Bn_{ijy} \equiv cL_{ij}\tilde{M}_{ij}. \quad (10)$$

On a bien sûr les propriétés élémentaires:

$$\tilde{n}_{ji} = -\tilde{n}_{ij}, \quad M_{ji} = -M_{ij}, \quad \tilde{M}_{ji} = -\tilde{M}_{ij} \quad (11)$$

D'autre part, pour chaque triangle du maillage, on a les propriétés de type géométrique:

$$\sum_{\text{arêtes}} \tilde{n}_{ij} = \vec{0}, \quad \sum_{\text{arêtes}} M_{ij} = 0. \quad (12)$$

On utilise le vecteur normalisé $\vec{n}_{ij} = \tilde{n}_{ij}/L_{ij}$. La matrice \tilde{M}_{ij} est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_0 = 0$, $\lambda_+ = 1$ et $\lambda_- = -1$, respectivement pour les vecteurs propres (deux à deux orthogonaux)

$$W_{ij}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{n}_{ijx} \\ \tilde{n}_{ijy} \end{pmatrix}, \quad W_{ij}^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{n}_{ijy} \\ -\tilde{n}_{ijx} \end{pmatrix}, \quad W_{ij}^- = \begin{pmatrix} -1 \\ \tilde{n}_{ijy} \\ -\tilde{n}_{ijx} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Les parties positive et négative de \tilde{M}_{ij} sont données par

$$\tilde{M}_{ij}^\pm = \begin{pmatrix} \pm\frac{1}{2} & \frac{\tilde{n}_{ijy}}{2} & -\frac{\tilde{n}_{ijx}}{2} \\ \frac{\tilde{n}_{ijy}}{2} & \pm\frac{\tilde{n}_{ijy}^2}{2} & \mp\frac{\tilde{n}_{ijx}\tilde{n}_{ijy}}{2} \\ -\frac{\tilde{n}_{ijx}}{2} & \mp\frac{\tilde{n}_{ijx}\tilde{n}_{ijy}}{2} & \pm\frac{\tilde{n}_{ijx}^2}{2} \end{pmatrix} = \pm\frac{1}{2}W_{ij}^\pm {}^tW_{ij}^\pm. \quad (14)$$

On note $|\tilde{M}_{ij}| = \tilde{M}_{ij}^+ - \tilde{M}_{ij}^-$. On a les identités remarquables suivantes:

$$\tilde{M}_{ij}^+ + \tilde{M}_{ij}^- = \tilde{M}_{ij}, \quad \tilde{M}_{ij}^\pm \tilde{M}_{ij}^\pm = \pm\tilde{M}_{ij}^\pm, \quad \tilde{M}_{ij}^+ \tilde{M}_{ij}^- = 0. \quad (15)$$

2.2.3 Estimations d'énergie

On cherche à démontrer une condition nécessaire et/ou suffisante de stabilité de type L^2 du schéma aux volumes finis précédent. Pour cela, on ne peut pas utiliser une approche par modes de Fourier, puisque la triangulation est quelconque. On utilise alors une approche "énergétique", où l'on cherche une forme quadratique définie positive qui pourrait jouer le rôle de fonction de Lyapunov pour la suite discrète des inconnues W^n . On propose l'énergie suivante (dont l'expression est directement dérivée de la version discrète de l'énergie électromagnétique en deux dimensions)

$$\mathcal{E}^n = \sum_i A_i {}^t W_i^n W_i^n. \quad (16)$$

Nous cherchons sous quelle(s) condition(s) l'énergie précédente ne croît pas au cours d'un pas de temps. Nous pourrions alors conclure que le schéma est stable, puisque l'énergie reste bornée (entre zéro et sa valeur de départ) et qu'elle est une forme quadratique définie positive des inconnues numériques du problème.

Nous utilisons une nouvelle expression des flux numériques F_{ij} :

$$\begin{aligned} F_{ij} &= cL_{ij} \left(\tilde{M}_{ij}^+ W_i + \tilde{M}_{ij}^- W_j \right) \\ &= \frac{c}{2} L_{ij} \left[\tilde{M}_{ij} (W_i + W_j) - \left| \tilde{M}_{ij} \right| \Delta W_{ij} \right] \end{aligned}$$

où on a posé $\Delta W_{ij} = W_j - W_i$. En notant $\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}^{n+1} - \mathcal{E}^n$, nous avons:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= \sum_i -c\Delta t \sum_{j \in \mathcal{V}_i} L_{ij} {}^t W_i \left[\tilde{M}_{ij} (W_i + W_j) - \left| \tilde{M}_{ij} \right| \Delta W_{ij} \right] \\ &\quad + \sum_i \frac{c^2 \Delta t^2}{4A_i} \left[\sum_{j \in \mathcal{V}_i} L_{ij} \left[\tilde{M}_{ij} (W_i + W_j) - \left| \tilde{M}_{ij} \right| \Delta W_{ij} \right] \right]^2 \end{aligned}$$

Dans le dernier terme de l'équation précédente, on a utilisé l'abus de notation X^2 pour ${}^t X X$. On a aussi maintenu la notation W_j pour les arêtes frontières (il faut garder à l'esprit que W_j est un état miroir pour les bords métalliques et est nul pour la frontière infinie), ainsi que le sens de la différence ΔW_{ij} . Notons respectivement T_1 et T_2 les termes d'ordre un et deux en Δt dans l'expression de $\Delta \mathcal{E}$. Les termes de T_1 peuvent être regroupés deux à deux suivant les arêtes a_{ij} , sauf pour les termes correspondant aux arêtes frontières. On utilise aussi la décomposition du flux F_{ij} avec \tilde{M}_{ij} et $\left| \tilde{M}_{ij} \right|$. On a alors:

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_{\text{arêtes internes}} -c\Delta t L_{ij} \left[\begin{array}{l} {}^t W_i \left[\tilde{M}_{ij} (W_i + W_j) - \left| \tilde{M}_{ij} \right| \Delta W_{ij} \right] + \\ {}^t W_j \left[\tilde{M}_{ji} (W_j + W_i) - \left| \tilde{M}_{ji} \right| \Delta W_{ji} \right] \end{array} \right] \\ &\quad + \sum_{\text{bord } \partial\Omega_m} -2c\Delta t L_{ij} \left[{}^t W_i \left(\tilde{M}_{ij}^+ W_i + \tilde{M}_{ij}^- \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} W_i \right) \right] \\ &\quad + \sum_{\text{bord } \partial\Omega_\infty} -c\Delta t L_{ij} \left[{}^t W_i \tilde{M}_{ij} W_i + {}^t W_i \left| \tilde{M}_{ij} \right| W_i \right] \end{aligned}$$

Pour les arêtes frontières du bord métallique $\partial\Omega_m$, une recombinaison élémentaire donne

$$\begin{aligned}
T_1 &= \sum_{\text{arêtes internes}} -\Delta t [{}^tW_i M_{ij} W_i + {}^tW_j M_{ji} W_j + {}^t\Delta W_{ij} |M_{ij}| \Delta W_{ij}] \\
&+ \sum_{\text{arêtes bord } \partial\Omega_m} -\Delta t \left[{}^tW_i M_{ij} W_i + cL_{ij} {}^tW_i \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} W_i \right] \\
&+ \sum_{\text{arêtes bord } \partial\Omega_\infty} -\Delta t [{}^tW_i M_{ij} W_i + {}^tW_i |M_{ij}| W_i]
\end{aligned}$$

Remarquons alors qu'une recombinaison par triangles cette fois-ci élimine une partie des termes. En effet,

$$\begin{aligned}
T_0 &\equiv \sum_{\text{arêtes internes}} [{}^tW_i M_{ij} W_i + {}^tW_j M_{ji} W_j] + \sum_{\text{arêtes bords } \partial\Omega_m \cup \partial\Omega_\infty} [{}^tW_i M_{ij} W_i] \\
&= \sum_{\text{triangles } i} {}^tW_i \left[\sum_{j \in \mathcal{V}_i} M_{ij} \right] W_i \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc on a finalement,

$$\begin{aligned}
T_1 &= -\Delta t \sum_{\text{arêtes internes}} {}^t\Delta W_{ij} |M_{ij}| \Delta W_{ij} - \Delta t \sum_{\text{arêtes bord } \partial\Omega_m} {}^tW_i \begin{pmatrix} 2cL_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} W_i \\
&- \Delta t \sum_{\text{arêtes bord } \partial\Omega_\infty} {}^tW_i |M_{ij}| W_i \tag{17}
\end{aligned}$$

Le terme T_1 est clairement négatif. Le terme T_2 étant d'ordre 2 en Δt , ce résultat partiel nous assure déjà de la stabilité du schéma pour Δt assez petit. Pour les termes d'ordre deux, on garde les mêmes notations pour les termes de bord, puisque toutes les grandeurs utilisées ont été définies. On a :

$$\begin{aligned}
T_2 &= \sum_i \frac{\Delta t^2}{4A_i} \left[\sum_{j \in \mathcal{V}_i} [M_{ij}(W_i + W_j) - |M_{ij}| \Delta W_{ij}] \right]^2 \\
&= \sum_i \frac{\Delta t^2}{4A_i} \left[\sum_{j \in \mathcal{V}_i} [M_{ij}(-W_i + W_j) - |M_{ij}| \Delta W_{ij}] \right]^2 \\
&= \sum_i \frac{\Delta t^2}{2A_i} \left[\sum_{j \in \mathcal{V}_i} [M_{ij}^- \Delta W_{ij}] \right]^2
\end{aligned}$$

Le passage de la première à la deuxième égalité se fait en utilisant l'identité remarquable (12) sur la somme des matrices M_{ij} dans un même triangle. On a donc le résultat global suivant

pour T_2 :

$$T_2 = \sum_i \frac{\Delta t^2}{2A_i} \left[\sum_{j \in \mathcal{V}_i} \left[M_{ij}^- \Delta W_{ij} \right] \right]^2 \quad (18)$$

2.2.4 Condition suffisante de stabilité

Le terme T_2 peut être majoré. On envisage de majorer dans chaque triangle le terme X_i défini par

$$X_i = \left[\sum_{j \in \mathcal{V}_i} \left[M_{ij}^- \Delta W_{ij} \right] \right]^2. \quad (19)$$

Plus précisément, on va majorer X_i par un somme de termes quadratiques ${}^t \Delta W_{ij} Q_{ij} \Delta W_{ij}$, où Q_{ij} est une matrice dépendant seulement de M_{ij} si possible. Une première majoration grossière peut être obtenue en utilisant la version vectorielle de l'identité $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$,

$$X_i \leq 3 \sum_{j \in \mathcal{V}_i} {}^t \Delta W_{ij} M_{ij}^- M_{ij}^- \Delta W_{ij} = c \sum_{j \in \mathcal{V}_i} [3L_{ij}] \left[{}^t \Delta W_{ij} \left(-M_{ij}^- \right) \Delta W_{ij} \right]. \quad (20)$$

Pour cette première majoration, on n'a pas utilisé la forme particulière des matrices M_{ij} dans un même triangle. Or, on a:

$$M_{ij}^- \Delta W_{ij} = \alpha_{ij} L_{ij} W_{ij}^-, \quad (21)$$

$$\text{avec } \alpha_{ij} = -\frac{c}{2} {}^t W_{ij}^- \Delta W_{ij} \text{ et } \alpha_{ij}^2 = -\frac{c}{2L_{ij}} {}^t \Delta W_{ij} M_{ij}^- \Delta W_{ij}. \quad (22)$$

On a $X_i = \left(\sum_{j \in \mathcal{V}_i} \alpha_{ij} L_{ij} W_{ij}^- \right)^2$. On peut donc utiliser une majoration du type

$$\left(\sum_{j \in \mathcal{V}_i} L_{ij} x_{ij} \right)^2 \leq \left(\sum_{j \in \mathcal{V}_i} L_{ij} \right) \left(\sum_{j \in \mathcal{V}_i} L_{ij} x_{ij}^2 \right), \quad (23)$$

qui donne, en utilisant le fait que la norme des vecteurs W_{ij}^- est $\sqrt{2}$,

$$X_i \leq 2 \left(\sum_{j \in \mathcal{V}_i} L_{ij} \right) \left(\sum_{j \in \mathcal{V}_i} L_{ij} \alpha_{ij}^2 \right).$$

On fait finalement apparaître des matrices Q_{ij} en réécrivant la formule ci-dessus à l'aide de (22), en utilisant la notation $P_i = \sum_{j \in \mathcal{V}_i} L_{ij}$ pour le périmètre du triangle \mathcal{T}_i ,

$$X_i \leq cP_i \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \left[{}^t \Delta W_{ij} \left(-M_{ij}^- \right) \Delta W_{ij} \right]. \quad (24)$$

Cette formule est à comparer avec celle donnée en (20). On obtient finalement pour T_2 la majoration suivante:

$$T_2 \leq \sum_i \frac{cP_i \Delta t^2}{2A_i} \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \left[{}^t \Delta W_{ij} \left(-M_{ij}^- \right) \Delta W_{ij} \right]. \quad (25)$$

Ainsi, on a, en éclatant à nouveau les sommes en sommes par arêtes, et en reprenant les définitions de W_j et ΔW_{ij} pour les arêtes du bord $\partial\Omega_\infty$,

$$\begin{aligned}
T_2 \leq & - \sum_{\text{arêtes internes}} {}^t\Delta W_{ij} \left[\frac{cP_i\Delta t^2}{2A_i} M_{ij}^- + \frac{cP_j\Delta t^2}{2A_j} M_{ji}^- \right] \Delta W_{ij} \\
& - \sum_{\text{bord } \partial\Omega_m} {}^tW_i \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\frac{cP_i\Delta t^2}{2A_i} M_{ij}^- \right] \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} W_i \\
& - \sum_{\text{bord } \partial\Omega_\infty} {}^tW_i \left[\frac{cP_i\Delta t^2}{2A_i} M_{ij}^- \right] W_i
\end{aligned} \tag{26}$$

On regroupe maintenant le terme T_1 donné par (17) et la majoration du terme T_2 obtenue ci-dessus (26). En utilisant la matrice symétrique T_{ij} de diagonalisation de M_{ij} , c'est-à-dire $M_{ij} = {}^tT_{ij}D_{ij}T_{ij}$, avec $D_{ij} = {}^t(0, cL_{ij}, -cL_{ij})$, on trouve finalement:

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{E} \leq & c\Delta t \sum_{\text{arêtes internes}} L_{ij} {}^t\Delta W_{ij} {}^tT_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c\Delta t P_j}{2A_j} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c\Delta t P_i}{2A_i} - 1 \end{pmatrix} T_{ij} \Delta W_{ij} \\
& + c\Delta t \sum_{\text{bord } \partial\Omega_m} L_{ij} {}^tW_i \begin{pmatrix} \frac{c\Delta t P_i}{A_i} - 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} W_i \\
& + c\Delta t \sum_{\text{bord } \partial\Omega_\infty} L_{ij} {}^tW_i {}^tT_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c\Delta t P_i}{2A_i} - 1 \end{pmatrix} T_{ij} W_i
\end{aligned}$$

Ainsi, une condition suffisante pour que le schéma soit stable en norme L^2 est que tous les termes diagonaux ci-dessus soient négatifs, i.e.

$$\begin{cases} \forall \text{ arête interne } a_{ij}, & c\Delta t P_i \leq 2A_i \text{ et } c\Delta t P_j \leq 2A_j \\ \forall \text{ arête frontière } a_{ij} \in \partial\Omega_m \cup \partial\Omega_\infty, & c\Delta t P_i \leq 2A_i \end{cases}$$

Cette condition se réécrit, en parcourant toutes les arêtes,

$$c\Delta t \leq \min_{\mathcal{T}_i} \frac{2A_i}{P_i}, \text{ avec } P_i = \sum_{j \in \mathcal{V}_i} L_{ij}. \tag{27}$$

Il est intéressant de noter que la première majoration (20) conduit au résultat un peu plus faible suivant: le schéma est stable si $c\Delta t$ est plus petit que le tiers de la plus petite hauteur d'un triangle dans le maillage.

2.3 Généralisations

2.3.1 Éléments quelconques

On suppose désormais que l'on dispose d'une partition quelconque du domaine Ω en un nombre fini de polygones connexes (ayant un nombre fini de cotés) qui seront les cellules de la

méthode de volumes finis. Pour chaque cellule \mathcal{T}_i , A_i représente sa surface. On appelle désormais arête (d'une cellule du maillage) la ligne polygonale commune à deux polygones. Pour chaque arête $a_{ij} = \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_j$ interne du maillage, on note $\vec{n}_{ij} = (n_{ijx}, n_{ijy})$ l'intégrale le long de l'arête de la normale à l'arête, orientée de la cellule \mathcal{T}_i vers la cellule \mathcal{T}_j . On note de plus $L_{ij} = \|\vec{n}_{ij}\|$. Pour une arête du bord du domaine, intersection entre le bord du domaine $\partial\Omega_m \cup \partial\Omega_\infty$ et une cellule au bord du domaine, les mêmes grandeurs sont définies, j jouant le rôle de l'indice d'une cellule fictive à l'extérieur du domaine. Enfin, on note \mathcal{V}_i l'ensemble des indices des cellules voisines de la cellule \mathcal{T}_i (ayant une arête en commun).

Le schéma conservatif en volumes finis s'écrit de la même manière que pour les triangles (6). Les flux numériques F_{ij} sont encore donnés pour des arêtes internes par (7) et on utilise encore l'état miroir (8) pour les flux de bord à travers les arêtes de $\partial\Omega_m$ et un état fictif nul pour les flux de bord à travers les arêtes de $\partial\Omega_\infty$.

Les propriétés élémentaires des matrices, écrites en (10-15), et toutes les estimations d'énergie faites sur les triangles (jusqu'à l'équation (18)) sont toujours valables. En effet, on n'a pas utilisé la forme particulière des triangles. Par contre, la majoration (20) du terme X_i n'est plus valable, car elle utilise *explicitement* le fait qu'un triangle a exactement trois voisins, ce qui n'est pas le cas pour des cellules quelconques. Pour être complet, on pourrait quand même utiliser une majoration de ce type, où le nombre 3 serait remplacé par le nombre maximal de cellules voisines pour une cellule dans la partition. Par contre, la majoration (23) ne dépend nullement du nombre de voisins.

Toutes les étapes menant au résultat (27) sont valides, et celui-ci est donc obtenu pour une **méthode de volumes finis quelconques**. Nous le rappelons: le schéma en volumes finis (6-7) est stable en norme L^2 si

$$\boxed{c\Delta t \leq \min_{\mathcal{T}_i} \frac{2A_i}{P_i}, \text{ avec } P_i = \sum_{j \in \mathcal{V}_i} L_{ij}.} \quad (28)$$

2.3.2 Autre traitement des conditions aux limites métalliques

Pour le traitement de la condition au bord $u = 0$ sur $\partial\Omega_m$, on peut être tenté d'utiliser un autre flux que celui utilisant un état miroir. Une autre manière classique de procéder est de prendre le flux suivant à travers l'arête frontière a_{ij} :

$$F_{ij} = M_{ij} \begin{pmatrix} 0 \\ v_i \\ w_i \end{pmatrix}, \text{ avec } W_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Ce flux est différent du flux décentré entre W_i et son état miroir. On peut d'ailleurs montrer qu'il n'y a pas d'état W_j tel que F_{ij} soit égal à un flux décentré entre W_i et W_j . Cependant, on montre facilement que ces flux aux bords métalliques ont tendance à produire de l'énergie. Par exemple, pour un champ constant dans tout le domaine (sans frontière infinie $\partial\Omega_\infty$), on a:

$$\Delta\mathcal{E} = u^2 c^2 \Delta t^2 \sum_{\text{bord } \partial\Omega_m}^{\text{arêtes}} \frac{L_{ij}^2}{A_i} \quad (30)$$

Ainsi, on ne pourra pas démontrer la décroissance de l'énergie, ni donc la stabilité L^2 du schéma par ce moyen.

2.3.3 Schémas implicites

On s'intéresse ici à une classe de schémas implicites en temps, couplés au même schéma en espace. Le schéma (6-7) peut s'écrire de manière formelle

$$W^{n+1} = W^n + \Delta t \mathbf{A} W^n, \quad (31)$$

où W^n est le champ des inconnues à l'instant t^n et \mathbf{A} est une matrice, non symétrique, dépendant uniquement de la géométrie et de la vitesse c . Dans le même temps, on peut réécrire l'énergie (16) sous une forme similaire,

$$\mathcal{E}^n = {}^t W^n \mathbb{E} W^n, \quad (32)$$

où la matrice \mathbb{E} est bloc-diagonale, symétrique définie positive. En termes matriciels, la condition de stabilité (28) est équivalente à

$$c\Delta t \leq \min_{\mathcal{T}_i} \frac{2A_i}{P_i} \Rightarrow \left(\forall W, {}^t W \left[\mathbb{E} \mathbf{A} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A} \mathbb{E} \mathbf{A} \right] W \leq 0 \right). \quad (33)$$

On s'intéresse ici aux schémas implicites suivants:

$$W^{n+1} = W^n + \Delta t \mathbf{A} W^{n+\theta}, \text{ avec } W^{n+\theta} = (1 - \theta)W^n + \theta W^{n+1}, \quad (34)$$

où θ est un paramètre fixé dans $]0, 1]$. Ce schéma est seulement d'ordre 1 en temps, sauf pour $\theta = 1/2$, où il est du second ordre. On a successivement:

$$\begin{aligned} W^n &= W^{n+\theta} - \theta \Delta t \mathbf{A} W^{n+\theta} \\ W^{n+1} &= W^{n+\theta} + (1 - \theta) \Delta t \mathbf{A} W^{n+\theta} \\ \mathcal{E}^{n+1} &= \mathcal{E}^n + 2\Delta t {}^t W^{n+\theta} \left[\mathbb{E} \mathbf{A} + \frac{(1 - 2\theta)\Delta t}{2} \mathbf{A} \mathbb{E} \mathbf{A} \right] W^{n+\theta} \end{aligned}$$

Le schéma implicite (34) est donc stable si

$$\boxed{c\Delta t(1 - 2\theta) \leq \min_{\mathcal{T}_i} \frac{2A_i}{P_i}.} \quad (35)$$

En particulier, le schéma est inconditionnellement stable si $\theta \geq 1/2$, et conditionnellement stable si $\theta < 1/2$.

2.4 Condition nécessaire de stabilité

Il est difficile d'établir une condition nécessaire de stabilité avec un critère énergétique, puisque la matrice d'évolution (\mathbf{A} dans (31)) n'est pas symétrique. Sur le cas particulier d'un champ uniformément nul, sauf sur une seule cellule où il est de la forme particulière $W = {}^t(u, 0, 0)$, on arrive néanmoins à démontrer que l'énergie peut croître si

$$c\Delta t > \min_{\mathcal{T}_i} \left(\frac{P_i}{\frac{P_i^2}{4A_i} + \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \frac{L_{ij}^2}{2A_j}} \right). \quad (36)$$

Cependant, on peut montrer que la condition (28) est une condition nécessaire et suffisante de stabilité pour des maillages particuliers, lorsqu'on considère un domaine égal à \mathbb{R}^2 tout entier ou lorsqu'on impose des conditions aux limites périodiques.

En effet, le schéma (6-7) peut se réécrire, grâce à la propriété (12), sous la forme

$$A_i \frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t} + \sum_{j \in \mathcal{V}_i} (An_{ijx} + Bn_{ijy})^- (W_j^n - W_i^n) = 0. \quad (37)$$

On considère une classe de maillages (partitions en volumes finis) particuliers pour lesquels les cellules peuvent être coloriées en rouge ou en vert, de telle sorte que deux cellules voisines ont des couleurs différentes. De plus, on demande que le maillage soit uniforme au sens suivant:

$$\exists (P, A) \text{ tels que } \forall \mathcal{T}_i, \frac{A_i}{P_i} = \frac{A}{P}. \quad (38)$$

Nous allons exhiber un champ particulier de valeurs W_i qui est amplifié par le schéma (37), c'est-à-dire que $W_i^n = W_i \Rightarrow W_i^{n+1} = \lambda W_i$ pour un réel λ de module strictement supérieur à un. Nous proposons le champ suivant:

$$W_i^n = W_i = \begin{cases} W_r \equiv {}^t(1, 0, 0), & \text{si } \mathcal{T}_i \text{ est rouge,} \\ W_v \equiv {}^t(-1, 0, 0), & \text{si } \mathcal{T}_i \text{ est verte.} \end{cases}$$

On montre alors que le schéma (6-7) transforme le champ en:

$$\begin{aligned} \forall i, (\mathcal{T}_i \text{ rouge}), \quad A_i \frac{W_i^{n+1} - W_r}{\Delta t} - \frac{cP_i}{2} (W^v - W^r) &= 0 \\ \forall i, (\mathcal{T}_i \text{ verte}), \quad A_i \frac{W_i^{n+1} - W_v}{\Delta t} - \frac{cP_i}{2} (W^r - W^v) &= 0 \end{aligned}$$

On a donc

$$\forall i, W_i^{n+1} = \lambda_i W_i^n, \text{ avec } \lambda_i = 1 - \frac{c\Delta t P_i}{A_i} \equiv 1 - \frac{c\Delta t P}{A}.$$

Le schéma est clairement instable si $\frac{c\Delta t P}{A} > 2$, c'est-à-dire si $c\Delta t > \frac{2A}{P}$.

Ce résultat s'applique notamment aux maillages réguliers en rectangles (où les cellules sont les rectangles ou bien les triangles moitiés des rectangles [4] [ceux-ci étant coupés en deux de manière régulière - même sens, drapeau anglais, etc...], ou encore les cellules médianes dont les centres sont aux sommets des rectangles [5]), comme à bien d'autres maillages réguliers... Par exemple, notre condition de stabilité est équivalente à celle proposée par Depeyre [4] pour des volumes finis uniformes rectangulaires:

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} + \frac{c\Delta t}{\Delta y} \leq 1. \quad (39)$$

3 Équations de Maxwell en 3D

3.1 Système à résoudre

On considère maintenant les équations de Maxwell en trois dimensions (milieu sans sources, homogène de paramètres ϵ, μ , avec $\epsilon\mu c^2 = 1$). Le champ de vecteur inconnu

$V = {}^t(E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z)$ vérifie:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \\ \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{array} \right. \quad (40)$$

Les équations sont posées dans un domaine borné Ω . On impose sur le bord $\partial\Omega$ du domaine deux types de conditions aux limites: des conditions de type "bord métallique", i.e. $\vec{n} \times \vec{E} = \vec{0}$ sur $\partial\Omega_m$, et éventuellement des conditions absorbantes sur la frontière fictive à l'infini $\partial\Omega_\infty$. Nous considérons la condition absorbante (dans la direction sortante unitaire \vec{n}) de Silver-Müller d'ordre un suivante:

$$\vec{n} \times \vec{E} = -c\mu \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{H}). \quad (41)$$

Par le changement de variables

$$W = {}^t \left(\frac{E_x}{\mu}, \frac{E_y}{\mu}, \frac{E_z}{\mu}, cH_x, cH_y, cH_z \right), \quad (42)$$

les équations de Maxwell se ramènent à

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A_x \frac{\partial W}{\partial x} + A_y \frac{\partial W}{\partial y} + A_z \frac{\partial W}{\partial z} = 0, \quad (43)$$

où les matrices symétriques A_x , A_y et A_z sont données (avec $\bar{c} = -c$) par

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (44)$$

Le système précédent est hyperbolique (non strictement), puisque pour tout triplet de réels (n_x, n_y, n_z) non simultanément nuls, la matrice $n_x A_x + n_y A_y + n_z A_z$ est diagonalisable dans \mathbf{R} , à valeurs propres doubles et égales à

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 = 0 \\ \rho_+ = c \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \\ \rho_- = -c \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \end{array} \right. \quad (45)$$

3.2 Volumes finis tétraédriques

3.2.1 Introduction

On suppose que l'on dispose d'une tétraédrisation quelconque, en particulier non nécessairement structurée, du domaine Ω . On considère une méthode de volumes finis centrés sur

les éléments, c'est-à-dire pour laquelle les cellules sont les tétraèdres eux-mêmes. Pour chaque tétraèdre \mathcal{T}_i , V_i représente son volume. Pour chaque face f_{ij} interne du maillage, entre les tétraèdres \mathcal{T}_i et \mathcal{T}_j , on note $\vec{n}_{ij} = (n_{ijx}, n_{ijy}, n_{ijz})$ la normale à la face, orientée du tétraèdre \mathcal{T}_i vers le tétraèdre \mathcal{T}_j et de norme S_{ij} , où S_{ij} est l'aire de la face. Pour une face du bord du domaine, les mêmes grandeurs sont définies, j jouant le rôle de l'indice d'un tétraèdre fictif à l'extérieur du domaine. Le schéma conservatif en volumes finis s'écrit:

$$V_i \frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t} + \sum_{j \in \mathcal{V}_i} F_{ij} = 0, \quad (46)$$

où l'indice i représente le tétraèdre \mathcal{T}_i , Δt est le pas de temps et W_i^n est une approximation de la valeur moyenne de W sur le tétraèdre \mathcal{T}_i . L'ensemble \mathcal{V}_i est l'ensemble des tétraèdres voisins de \mathcal{T}_i (ayant une face en commun).

Les flux numériques F_{ij} sont donnés pour des faces internes par

$$F_{ij} = (A_x n_{ijx} + A_y n_{ijy} + A_z n_{ijz})^+ W_i^n + (A_x n_{ijx} + A_y n_{ijy} + A_z n_{ijz})^- W_j^n, \quad (47)$$

où les exposants \pm signifient les parties positive et négative de la matrice considérée, après diagonalisation. Ce schéma est d'ordre 1 en espace. Il utilise un solveur de Riemann exact, disponible pour un système hyperbolique linéaire. Pour une face du bord métallique $\partial\Omega_m$, la valeur manquante W_j^n dans le tétraèdre fictif est prise égale à l'état miroir pour la condition au bord $\vec{n}_{ij} \times \vec{E} = \vec{0}$, c'est-à-dire

$$W_j^n \equiv \bar{W}_i^n = \begin{pmatrix} -I_3 + \frac{2}{S_{ij}^2} \vec{n}_{ij}^t \vec{n}_{ij} & 0_3 \\ 0_3 & I_3 \end{pmatrix} W_i^n, \quad (48)$$

où 0_3 et I_3 sont respectivement les matrices nulle et identité de taille 3. Le lecteur notera que la notation $\vec{n}_{ij}^t \vec{n}_{ij}$ correspond à un produit tensoriel et a pour résultat une matrice de taille 3. On voit bien que l'on impose faiblement que, à la frontière, le champ \vec{E} , à peu près égal aux trois premières composantes de $(\bar{W}_i^n + W_i^n)/2$, est bien colinéaire à \vec{n}_{ij} .

Pour une face de la frontière à l'infini $\partial\Omega_\infty$, la condition de Silver-Müller d'ordre un est à nouveau imposée de manière faible, cette fois en prenant $W_j^n = 0$. Il s'agit alors de ne pas prendre en compte les ondes entrant dans le domaine. Le flux au bord vaut donc

$$F_{ij} = (A_x n_{ijx} + A_y n_{ijy} + A_z n_{ijz})^+ W_i^n. \quad (49)$$

Pour mieux comprendre pourquoi le flux (49) traite de manière faible et consistante la condition aux limites (41), il suffit d'observer que, pour tout état $W = (\vec{E}/\mu, c\vec{H})$, on a:

$$\begin{aligned} (A_x n_{ijx} + A_y n_{ijy} + A_z n_{ijz}) W &= (A_x n_{ijx} + A_y n_{ijy} + A_z n_{ijz})^+ W \\ &+ \frac{cS_{ij}}{2\mu} \begin{pmatrix} \vec{n}_{ij} \times \left[\vec{n}_{ij} \times \vec{E} + \mu c \vec{n}_{ij} \times (\vec{n}_{ij} \times \vec{H}) \right] \\ \left[\vec{n}_{ij} \times \vec{E} + \mu c \vec{n}_{ij} \times (\vec{n}_{ij} \times \vec{H}) \right] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dans la suite, les exposants n sont omis, puisque nous étudions un schéma d'Euler explicite.

3.2.2 Propriétés des matrices

Pour chaque face f_{ij} , on note désormais M_{ij} la matrice

$$M_{ij} = A_x n_{ijx} + A_y n_{ijy} + A_z n_{ijz} \equiv cS_{ij} \vec{M}_{ij}. \quad (50)$$

On a bien sûr les propriétés élémentaires:

$$\vec{n}_{ji} = -\vec{n}_{ij}, \quad M_{ji} = -M_{ij}, \quad \tilde{M}_{ji} = -\tilde{M}_{ij} \quad (51)$$

D'autre part, pour chaque tétraèdre du maillage, on a les propriétés de type géométrique:

$$\sum_{\text{faces}} \vec{n}_{ij} = \vec{0}, \quad \sum_{\text{faces}} M_{ij} = 0. \quad (52)$$

On utilise le vecteur normalisé $\vec{n}_{ij} = \vec{n}_{ij}/S_{ij}$. Le vecteur \vec{n}_{ij} est donc de norme unité. Pour chaque face, on définit deux vecteurs tangents \vec{t}_{ij} et $\vec{t}\vec{t}_{ij}$ unitaires tels que le trièdre $(\vec{t}_{ij}, \vec{t}\vec{t}_{ij}, \vec{n}_{ij})$ soit orthonormé direct. La matrice \tilde{M}_{ij} est diagonalisable, de valeurs propres doubles $\lambda_0 = 0$, $\lambda_+ = 1$ et $\lambda_- = -1$, respectivement pour les paires de vecteurs propres (deux à deux orthogonaux)

$$\begin{aligned} W_{ij}^{0a} &= {}^t(\vec{n}_{ij}, \vec{0}) & W_{ij}^{+a} &= {}^t(\vec{t}_{ij}, \vec{t}\vec{t}_{ij}) & W_{ij}^{-a} &= {}^t(\vec{t}_{ij}, -\vec{t}\vec{t}_{ij}) \\ W_{ij}^{0b} &= {}^t(\vec{0}, \vec{n}_{ij}) & W_{ij}^{+b} &= {}^t(\vec{t}\vec{t}_{ij}, -\vec{t}_{ij}) & W_{ij}^{-b} &= {}^t(\vec{t}\vec{t}_{ij}, \vec{t}_{ij}) \end{aligned} \quad (53)$$

On a les identités remarquables suivantes:

$$\tilde{M}_{ij}^+ + \tilde{M}_{ij}^- = \tilde{M}_{ij}, \quad \tilde{M}_{ij}^\pm \tilde{M}_{ij}^\pm = \pm \tilde{M}_{ij}^\pm, \quad \tilde{M}_{ij}^+ \tilde{M}_{ij}^- = 0. \quad (54)$$

On note $|\tilde{M}_{ij}| = \tilde{M}_{ij}^+ - \tilde{M}_{ij}^-$. On a:

$$\tilde{M}_{ij}^+ = \frac{1}{2} [W_{ij}^{+a} W_{ij}^{+a} + W_{ij}^{+b} W_{ij}^{+b}] \equiv \Pi_{ij}^+ \quad (55)$$

$$\tilde{M}_{ij}^- = -\frac{1}{2} [W_{ij}^{-a} W_{ij}^{-a} + W_{ij}^{-b} W_{ij}^{-b}] \equiv -\Pi_{ij}^- \quad (56)$$

où l'on a défini les projecteurs Π_{ij}^+ et Π_{ij}^- sur les sous-espaces propres associés respectivement à $\lambda_+ = 1$ et $\lambda_- = -1$.

3.2.3 Estimations d'énergie

On cherche à démontrer une condition nécessaire et/ou suffisante de stabilité de type L^2 du schéma aux volumes finis (46-47) comme précédemment en deux dimensions d'espace. On utilise désormais l'énergie suivante

$$\mathcal{E}^n = \sum_i V_i {}^t W_i^n W_i^n. \quad (57)$$

Nous cherchons sous quelle(s) condition(s) l'énergie précédente ne croît pas au cours d'un pas de temps. Nous utilisons une nouvelle expression des flux numériques F_{ij} :

$$\begin{aligned} F_{ij} &= c S_{ij} \left(\tilde{M}_{ij}^+ W_i + \tilde{M}_{ij}^- W_j \right) \\ &= \frac{c}{2} S_{ij} \left[\tilde{M}_{ij} (W_i + W_j) - |\tilde{M}_{ij}| \Delta W_{ij} \right] \end{aligned}$$

où on a posé $\Delta W_{ij} = W_j - W_i$. En notant $\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}^{n+1} - \mathcal{E}^n$, nous avons:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &\equiv \mathcal{E}^{n+1} - \mathcal{E}^n \\ &= \sum_i -c \Delta t \sum_{j \in \mathcal{V}_i} S_{ij} {}^t W_i \left[\tilde{M}_{ij} (W_i + W_j) - |\tilde{M}_{ij}| \Delta W_{ij} \right] \\ &\quad + \sum_i \frac{c^2 \Delta t^2}{4 V_i} \left[\sum_{j \in \mathcal{V}_i} S_{ij} \left[\tilde{M}_{ij} (W_i + W_j) - |\tilde{M}_{ij}| \Delta W_{ij} \right] \right]^2 \end{aligned}$$

Dans le dernier terme de l'équation précédente, on a utilisé l'abus de notation X^2 pour tXX . On a aussi maintenu la notation W_j pour les faces frontières (il faut garder à l'esprit que W_j est l'état miroir \bar{W}_i défini en (48) pour les bords métalliques et est nul pour la frontière infinie), ainsi que le sens de la différence ΔW_{ij} . Notons respectivement T_1 et T_2 les termes d'ordre un et deux en Δt dans l'expression de $\Delta \mathcal{E}$. Les termes de T_1 peuvent être regroupés deux à deux suivant les faces f_{ij} , sauf pour les termes correspondant aux faces frontières. On utilise aussi la décomposition du flux F_{ij} avec \tilde{M}_{ij} et $|\tilde{M}_{ij}|$. On a alors:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \sum_{\text{internes}}^{\text{faces}} -c\Delta t S_{ij} \left[\begin{array}{l} {}^tW_i \left[\tilde{M}_{ij}(W_i + W_j) - |\tilde{M}_{ij}| \Delta W_{ij} \right] + \\ {}^tW_j \left[\tilde{M}_{ji}(W_j + W_i) - |\tilde{M}_{ji}| \Delta W_{ji} \right] \end{array} \right] \\
&+ \sum_{\text{bord } \partial\Omega_m}^{\text{faces}} -2c\Delta t S_{ij} \left[{}^tW_i \left(\tilde{M}_{ij}^+ W_i + \tilde{M}_{ij}^- \bar{W}_i \right) \right] \\
&+ \sum_{\text{bord } \partial\Omega_\infty}^{\text{faces}} -c\Delta t S_{ij} \left[{}^tW_i \tilde{M}_{ij} W_i + {}^tW_i |\tilde{M}_{ij}| W_i \right]
\end{aligned}$$

Pour les faces frontières du bord métallique $\partial\Omega_m$, une recombinaison élémentaire donne

$$\begin{aligned}
X &= 2{}^tW_i \left(\tilde{M}_{ij}^+ W_i + \tilde{M}_{ij}^- \bar{W}_i \right) \\
&= {}^tW_i \left(2\tilde{M}_{ij}^+ + 2\tilde{M}_{ij}^- \left(\begin{array}{cc} -I_3 + \frac{2}{S_{ij}^2} n_{ij}^t n_{ij}^t & 0_3 \\ 0_3 & I_3 \end{array} \right) \right) W_i \\
&= {}^tW_i \left(2\tilde{M}_{ij}^+ + 2\tilde{M}_{ij}^- \left(\begin{array}{cc} -I_3 & 0_3 \\ 0_3 & I_3 \end{array} \right) \right) W_i \\
&= {}^tW_i \left[W_{ij}^{+a} {}^tW_{ij}^{+a} + W_{ij}^{+b} {}^tW_{ij}^{+b} + \left[W_{ij}^{-a} {}^tW_{ij}^{-a} + W_{ij}^{-b} {}^tW_{ij}^{-b} \right] \left(\begin{array}{cc} I_3 & 0_3 \\ 0_3 & -I_3 \end{array} \right) \right] W_i \\
&= {}^tW_i \tilde{M}_{ij} W_i + 2{}^tW_i \left(\begin{array}{cc} \vec{t}_{ij}^t \vec{t}_{ij}^t + \vec{t}\vec{t}_{ij}^t \vec{t}\vec{t}_{ij}^t & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 \end{array} \right) W_i
\end{aligned}$$

On trouve alors, en notant $\Pi_{ij} = \vec{t}_{ij}^t \vec{t}_{ij}^t + \vec{t}\vec{t}_{ij}^t \vec{t}\vec{t}_{ij}^t$ le projecteur sur le plan de la face frontière,

$$\begin{aligned}
T_1 &= \sum_{\text{internes}}^{\text{faces}} -\Delta t \left[{}^tW_i M_{ij} W_i + {}^tW_j M_{ji} W_j + {}^t\Delta W_{ij} |M_{ij}| \Delta W_{ij} \right] \\
&+ \sum_{\text{bord } \partial\Omega_m}^{\text{faces}} -\Delta t \left[{}^tW_i M_{ij} W_i + 2cS_{ij} {}^tW_i \left(\begin{array}{cc} \Pi_{ij} & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 \end{array} \right) W_i \right] \\
&+ \sum_{\text{bord } \partial\Omega_\infty}^{\text{faces}} -c\Delta t S_{ij} \left[{}^tW_i \tilde{M}_{ij} W_i + {}^tW_i |\tilde{M}_{ij}| W_i \right]
\end{aligned}$$

Remarquons que, par recombinaison par tétraèdres cette fois-ci, une partie des termes se

simplifie. En effet,

$$\begin{aligned}
T_0 &= \sum_{\text{internes}}^{\text{faces}} [{}^tW_i M_{ij} W_i + {}^tW_j M_{ji} W_j] + \sum_{\text{bords } \partial\Omega_m \cup \partial\Omega_\infty}^{\text{faces}} [{}^tW_i M_{ij} W_i] \\
&= \sum_{\text{tétraèdres } i} {}^tW_i \left[\sum_{j \in \mathcal{V}_i} M_{ij} \right] W_i \\
&= 0
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
T_1 &= -\Delta t \sum_{\text{internes}}^{\text{faces}} {}^t\Delta W_{ij} |M_{ij}| \Delta W_{ij} - \Delta t \sum_{\text{bord } \partial\Omega_m}^{\text{faces}} 2c S_{ij} {}^tW_i \begin{pmatrix} \Pi_{ij} & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 \end{pmatrix} W_i \\
&\quad - \Delta t \sum_{\text{bord } \partial\Omega_\infty}^{\text{faces}} {}^tW_i |M_{ij}| W_i
\end{aligned} \tag{58}$$

Comme en deux dimensions, le terme T_1 est négatif. Le terme T_2 étant d'ordre 2 en Δt , ce résultat partiel nous assure déjà de la stabilité du schéma pour Δt assez petit. Pour les termes d'ordre deux, on procède comme à la section précédente:

$$\begin{aligned}
T_2 &= \sum_i \frac{\Delta t^2}{4V_i} \left[\sum_{j \in \mathcal{V}_i} [M_{ij}(W_i + W_j) - |M_{ij}| \Delta W_{ij}] \right]^2 \\
&= \sum_i \frac{\Delta t^2}{4V_i} \left[\sum_{j \in \mathcal{V}_i} [M_{ij}(-W_i + W_j) - |M_{ij}| \Delta W_{ij}] \right]^2 \\
&= \sum_i \frac{\Delta t^2}{2V_i} \left[\sum_{j \in \mathcal{V}_i} [M_{ij}^- \Delta W_{ij}] \right]^2
\end{aligned}$$

Le passage de la première à la deuxième égalité se fait en utilisant l'identité remarquable (52) sur la somme des matrices M_{ij} dans un même tétraèdre. On a donc le résultat global suivant pour T_2 :

$$T_2 = \sum_i \frac{\Delta t^2}{2V_i} \left[\sum_{j \in \mathcal{V}_i} [M_{ij}^- \Delta W_{ij}] \right]^2 \tag{59}$$

3.2.4 Condition suffisante de stabilité

On majore dans chaque tétraèdre le terme X_i défini par

$$X_i = \left[\sum_{j \in \mathcal{V}_i} [M_{ij}^- \Delta W_{ij}] \right]^2. \tag{60}$$

Plus précisément, on va majorer X_i par un somme de termes quadratiques ${}^t\Delta W_{ij} Q_{ij} \Delta W_{ij}$, où Q_{ij} est une matrice dépendant seulement de M_{ij} si possible. Une première majoration à la

louche peut être obtenue en utilisant la version vectorielle de l'identité $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 \leq 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)$,

$$X_i \leq 4 \sum_{j \in \mathcal{V}_i} {}^t \Delta W_{ij} M_{ij}^- M_{ij}^- \Delta W_{ij} = c \sum_{j \in \mathcal{V}_i} [4L_{ij}] \left[{}^t \Delta W_{ij} \left(-M_{ij}^- \right) \Delta W_{ij} \right]. \quad (61)$$

Pour cette première majoration, on n'a pas utilisé la forme particulière des matrices M_{ij} dans un même tétraèdre. On a :

$$M_{ij}^- \Delta W_{ij} = -c S_{ij} \Pi_{ij}^- \Delta W_{ij}. \quad (62)$$

Donc, si les tétraèdres \mathcal{T}_j , \mathcal{T}_k , \mathcal{T}_l et \mathcal{T}_m sont les quatre tétraèdres voisins du tétraèdre \mathcal{T}_i , on a :

$$X_i = c^2 \left(S_{ij} \Pi_{ij}^- \Delta W_{ij} + S_{ik} \Pi_{ik}^- \Delta W_{ik} + S_{il} \Pi_{il}^- \Delta W_{il} + S_{im} \Pi_{im}^- \Delta W_{im} \right)^2. \quad (63)$$

On peut alors utiliser une majoration du type

$$\left(\sum_{j \in \mathcal{V}_i} S_{ij} x_{ij} \right)^2 \leq \left(\sum_{j \in \mathcal{V}_i} S_{ij} \right) \left(\sum_{j \in \mathcal{V}_i} S_{ij} x_{ij}^2 \right), \quad (64)$$

qui donne, en utilisant la notation $P_i = \sum_{j \in \mathcal{V}_i} S_{ij}$, et les propriétés élémentaires des projecteurs,

$$X_i \leq c^2 P_i \sum_{j \in \mathcal{V}_i} S_{ij} {}^t \Delta W_{ij} \Pi_{ij}^- \Delta W_{ij} = c P_i \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \left[{}^t \Delta W_{ij} \left(-M_{ij}^- \right) \Delta W_{ij} \right]. \quad (65)$$

Cette formule est à comparer avec celle donnée en (61). On obtient finalement pour T_2 la majoration suivante :

$$T_2 \leq \sum_i \frac{c P_i \Delta t^2}{2V_i} \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \left[{}^t \Delta W_{ij} \left(-M_{ij}^- \right) \Delta W_{ij} \right]. \quad (66)$$

Ainsi, on a, en éclatant à nouveau les sommes en sommes par faces, et en reprenant les définitions de W_j et ΔW_{ij} pour les arêtes du bord $\partial\Omega_\infty$,

$$\begin{aligned} T_2 &\leq - \sum_{\text{internes}}^{\text{faces}} {}^t \Delta W_{ij} \left[\frac{c P_i \Delta t^2}{2V_i} M_{ij}^- + \frac{c P_j \Delta t^2}{2V_j} M_{ji}^- \right] \Delta W_{ij} \\ &\quad - \sum_{\text{bord } \partial\Omega_m}^{\text{faces}} {}^t W_i \begin{pmatrix} -2I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 \end{pmatrix} \left[\frac{c P_i \Delta t^2}{2V_i} M_{ij}^- \right] \begin{pmatrix} -2I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 \end{pmatrix} W_i \\ &\quad - \sum_{\text{bord } \partial\Omega_\infty}^{\text{faces}} {}^t W_i \left[\frac{c P_i \Delta t^2}{2V_i} M_{ij}^- \right] W_i \end{aligned} \quad (67)$$

On regroupe maintenant le terme T_1 donné par (58) et la majoration du terme T_2 obtenue ci-dessus (67). En utilisant la matrice symétrique T_{ij} de diagonalisation de M_{ij} , c'est-à-dire $M_{ij} = {}^t T_{ij} D_{ij} T_{ij}$, où la diagonale D_{ij} est donnée par $D_{ij} = {}^t (0, 0, cL_{ij}, cL_{ij}, -cL_{ij}, -cL_{ij})$, on

trouve finalement:

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{E} \leq & c\Delta t \sum_{\text{internes}}^{\text{faces}} S_{ij} {}^t \Delta W_{ij} {}^t T_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c\Delta t P_j}{2V_j} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c\Delta t P_i}{2V_i} - 1 \end{pmatrix} T_{ij} \Delta W_{ij} \\
& + c\Delta t \sum_{\text{bord } \partial\Omega_m}^{\text{faces}} S_{ij} \left(\frac{cP_i \Delta t}{V_i} - 2 \right) {}^t W_i \begin{pmatrix} \Pi_{ij} & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 \end{pmatrix} W_i \\
& + c\Delta t \sum_{\text{bord } \partial\Omega_\infty}^{\text{faces}} S_{ij} {}^t W_i {}^t T_{ij} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c\Delta t P_i}{2V_i} - 1 \end{pmatrix} T_{ij} W_i
\end{aligned}$$

Ainsi, une condition suffisante pour que le schéma soit stable en norme L^2 est que tous les termes diagonaux ci-dessus soient négatifs, i.e.

$$\begin{cases} \forall \text{ face interne } f_{ij}, & c\Delta t P_i \leq 2V_i \text{ et } c\Delta t P_j \leq 2V_j \\ \forall \text{ face frontière } f_{ij} \in \partial\Omega_m \cup \partial\Omega_\infty, & c\Delta t P_i \leq 2V_i \end{cases}$$

Cette condition se réécrit, en parcourant toutes les faces,

$$c\Delta t \leq \min_{\mathcal{T}_i} \frac{2V_i}{P_i}, \text{ avec } P_i = \sum_{j \in \mathcal{V}_i} S_{ij}. \quad (68)$$

Il est intéressant de noter que la première majoration (61) conduit au résultat un peu plus faible suivant: le schéma est stable si $c\Delta t$ est plus petit que le quart de la plus petite hauteur d'un tétraèdre dans le maillage.

3.3 Généralisations

3.3.1 Éléments quelconques

On suppose désormais que l'on dispose d'une partition quelconque du domaine Ω en un nombre fini de polyèdres connexes (ayant un nombre fini de faces) qui seront les cellules de la méthode de volumes finis. Pour chaque cellule \mathcal{T}_i , V_i représente son volume. On appelle désormais face (d'une cellule du maillage) la surface polyédrique commune à deux polyèdres. Pour chaque face $a_{ij} = \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_j$ interne du maillage, on note $\vec{n}_{ij} = (n_{ijx}, n_{ijy}, n_{ijz})$ l'intégrale sur la face de la normale, orientée de la cellule \mathcal{T}_i vers la cellule \mathcal{T}_j . On note de plus $S_{ij} = \|\vec{n}_{ij}\|$. Pour une face du bord du domaine, intersection entre le bord du domaine et une cellule au bord du domaine, les mêmes grandeurs sont définies, j jouant le rôle de l'indice d'une cellule fictive à l'extérieur du domaine. Enfin, on note \mathcal{V}_i l'ensemble des indices des cellules voisines de la cellule \mathcal{T}_i (ayant une face en commun).

Le schéma conservatif en volumes finis s'écrit de la même manière que pour les tétraèdres (46). Les flux numériques F_{ij} sont encore donnés pour des faces internes par (47) et on utilise encore l'état miroir (48) pour les flux de bord à travers les arêtes de $\partial\Omega_m$ et un état fictif nul pour les flux de bord à travers les arêtes de $\partial\Omega_\infty$.

Les propriétés élémentaires des matrices, écrites en (50-56), sont toujours valables. Toutes les estimations d'énergie faites sur les tétraèdres (jusqu'à l'équation (59)) sont toujours valables. En effet, on n'a pas utilisé la forme particulière des tétraèdres. Par contre, la majoration (61)

du terme X_i n'est plus valable, car elle utilise *explicitement* le fait qu'un tétraèdre a exactement quatre voisins, ce qui n'est pas le cas pour des cellules quelconques. Pour être complet, on pourrait quand même utiliser une majoration de ce type, où le nombre 4 serait remplacé par le nombre maximal de cellules voisines pour une cellule dans la partition. Par contre, la majoration (64) ne dépend nullement du nombre de voisins. Le résultat (68) s'étend donc pour une **méthode de volumes finis quelconques**. Nous le rappelons: le schéma en volumes finis (46-47) est stable en norme L^2 sous la condition

$$\boxed{c\Delta t \leq \min_{\mathcal{T}_i} \frac{2V_i}{P_i}, \text{ avec } P_i = \sum_{j \in \mathcal{V}_i} S_{ij}.} \quad (69)$$

3.3.2 Schémas implicites

On s'intéresse à nouveau aux θ -schémas implicites (34), où la matrice \mathbf{A} est la matrice d'évolution dans (31) correspondant au schéma en volumes finis (46-47). On démontre comme à la section précédente, que le θ -schéma implicite (34) est stable sous la condition

$$\boxed{c\Delta t(1 - 2\theta) \leq \min_{\mathcal{T}_i} \frac{2V_i}{P_i}.} \quad (70)$$

Comme plus haut, le θ -schéma est inconditionnellement stable si $\theta \geq 1/2$, et conditionnellement stable si $\theta < 1/2$.

3.4 Condition nécessaire de stabilité

3.4.1 (69) n'est jamais nécessaire

On peut montrer que la condition (69) n'est jamais une condition nécessaire de stabilité, contrairement à ce qui se passe en deux dimensions d'espace. En effet, reprenons l'ensemble des majoration du terme T_2 défini en (59). L'inégalité large (64) devient une inégalité stricte pour tous les champs ne vérifiant pas

$$\forall i, \exists K_i / \forall j \in \mathcal{T}_i, \Pi_{ij}^- \Delta W_{ij} = K_i.$$

En trois dimensions d'espace, cette condition est seulement vérifiée si chacune des deux composantes de ΔW_{ij} est colinéaire à \vec{n}_{ij} . Il est à retenir que ce type de champ, **s'il existe** est stationnaire pour le schéma (46-47).

En somme, on a, pour tout champ W^n , et pour tout pas de temps Δt :

- soit W^n est stationnaire, et $\Delta \mathcal{E} = 0$
- soit W^n n'est pas stationnaire, et $\Delta \mathcal{E} < 0$ si Δt vérifie (69).

Ainsi, un argument élémentaire d'uniforme continuité (les champs W sont dans un espace de dimension finie) nous montre que, dans tous les cas, le pas de temps maximal permis par (69) n'est pas optimal.

3.4.2 Vers une condition nécessaire et suffisante

La majoration (64) est une version discrète de l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Dans cette majoration, on n'a pas utilisé le fait que le champ de vecteur, égal à $\Pi_{ij}^- \Delta W_{ij}$ sur chaque face S_{ij} , est partout tangent à la face elle-même. On aurait donc pu affiner la majoration. Pour une cellule quelconque \mathcal{C} de bord $\partial\mathcal{C}$, appelons K la plus petite constante, telle que, pour tout champ de vecteur \vec{x} tangentiel sur $\partial\mathcal{C}$, on ait:

$$\left(\int_{\partial\mathcal{C}} \vec{x} \right)^2 \leq K \int_{\partial\mathcal{C}} \vec{x}^2. \quad (71)$$

Pour toute cellule \mathcal{C} , on a $K \leq P$. D'autre part, on a par exemple:

$$\begin{aligned} \text{parallélépipède rectangle de côtés } \alpha \geq \beta \geq \gamma: & \quad K = 2\alpha(\beta + \gamma) = P - 2V/\alpha \\ \text{sphère de diamètre } D: & \quad K = 2/3 \pi D^2 = P - 2V/D \end{aligned}$$

Si on utilise la majoration (71) à la place de la majoration (64), la variable P_i est remplacée par K_i dans (65), et ceci pour toute forme de cellule. On obtient ainsi une nouvelle condition suffisante de stabilité:

$$\boxed{c\Delta t \leq \min \frac{2V_i}{\tau_i K_i}, \text{ avec } K_i \text{ défini en (71).}} \quad (72)$$

Sur un maillage régulier de parallélépipèdes rectangles, de côtés $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, la nouvelle condition (72) s'écrit $c\Delta t(\beta + \gamma) \leq \beta\gamma$. On peut montrer alors que la condition précédente est aussi une condition nécessaire sur un maillage infini (ou fini avec conditions périodiques) en utilisant la même méthode que pour les ondes TM en deux dimensions d'espace (champ constant dans la direction du plus grand côté et alterné dans les deux autres directions) .

Plaçons ici une dernière remarque. Imaginons que nous nous concentrons sur une seule cellule de forme circulaire ou sphérique de rayon R . En deux dimensions d'espace, la condition de stabilité (28) donne *localement* $c\Delta t \leq R$, ce qui est raisonnable pour des ondes allant à la vitesse c dans toutes les directions. En trois dimensions d'espace, la condition de stabilité (69) donne *localement* $c\Delta t \leq 2R/3$, alors que la nouvelle condition (72) donne $c\Delta t \leq R$, ce qui est plus satisfaisant.

4 Autres estimations théoriques

On peut se demander comment la condition de stabilité (28) en deux dimensions ou (69) en trois dimensions se situent par rapport à des résultats précédents.

Rappelons d'abord que notre condition nécessaire et suffisante de stabilité en deux dimensions pour des volumes finis uniformes rectangulaires est équivalente à celle proposée par Depyre [4].

Un autre résultat théorique bien plus général a été présenté par Vila et Villedieu [10]. Ils démontrent que sous une condition deux fois plus forte (que (69)) sur le pas de temps, le schéma est stable en norme L^2 (la condition est trois fois plus forte que (72) pour un maillage en cubes ou *localement* pour une sphère). En fait, on peut démontrer dans le cas général du système de Maxwell en trois dimensions (40) que cette condition, à savoir

$$c\Delta t \leq \min_{\tau_i} \frac{V_i}{P_i}, \text{ avec } P_i = \sum_{j \in \mathcal{V}_i} S_{ij}, \quad (73)$$

permet d'assurer une certaine monotonie du schéma (les concepts de décroissance de la variation totale [6] ou même de décroissance des extrema locaux [8] n'étant pas disponibles pour les systèmes en plusieurs dimensions [9]). La monotonie est entendue au sens suivant: sous la condition (73), chaque vecteur d'état est transformé en une sorte de combinaison convexe des vecteurs d'état voisins et de lui-même à l'instant précédent, c'est-à-dire:

$$W_i^{n+1} = N_{ii}W_i^n + \sum_{j \in \mathcal{V}_i} N_{ij}W_j^n, \quad (74)$$

où, pour tout i , les matrices N_{ii} et N_{ij} , pour tout $j \in \mathcal{V}_i$, sont symétriques positives. Ainsi, on retombe sur la définition donnée par Harten de la monotonie, où

$$W_i^{n+1} = \mathbf{F} \left(W_i^n, (W_j^n)_{j \in \mathcal{V}_i} \right),$$

et \mathbf{F} est une "fonction croissante" de chacun de ses arguments. On peut se permettre de parler de combinaison convexe pour la forme (74), puisque la consistance du schéma implique que

$$N_{ii} + \sum_{j \in \mathcal{V}_i} N_{ij} = I_6, \forall i.$$

Le schéma conservatif en volumes finis (46) se réécrit:

$$\begin{aligned} W_i^{n+1} &= W_i^n - \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \left(M_{ij}^+ W_i^n + M_{ij}^- W_j^n \right) \\ &= \left(I_6 - \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{V}_i} M_{ij}^+ \right) W_i^n + \sum_{j \in \mathcal{V}_i} \left[-M_{ij}^- \right] W_j^n \end{aligned}$$

On prend donc

$$\begin{aligned} \forall i, \forall j \in \mathcal{V}_i, N_{ij} &= -M_{ij}^- \\ \forall i, N_{ii} &= I_6 - \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{V}_i} M_{ij}^+ \end{aligned}$$

Les matrices N_{ij} et N_{ii} sont clairement symétriques. Il est clair également que les matrices N_{ij} sont positives. Enfin, sous la condition (73), les matrices N_{ii} sont aussi positives, puisque, $\forall i$, $\forall W$, on a:

$$\begin{aligned} {}^t W N_{ii} W &= {}^t W W - \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{V}_i} {}^t W M_{ij}^+ W \\ &\geq {}^t W W - \frac{\Delta t}{V_i} \sum_{j \in \mathcal{V}_i} c S_{ij} {}^t W W \geq \left(1 - \frac{c \Delta t P_i}{V_i} \right) {}^t W W \geq 0. \end{aligned}$$

5 Conclusion

Dans ce rapport, nous avons cherché des conditions suffisantes et éventuellement nécessaires de stabilité pour des méthodes de volumes finis du premier ordre en temps et en espace, appliquées aux équations de Maxwell. Pour établir la stabilité L^2 , nous avons utilisé une version

discrète de l'énergie électromagnétique comme fonction de Lyapunov des inconnues numériques. Cette méthode permet seulement d'établir des conditions suffisantes de stabilité. Pour établir des conditions nécessaires, nous avons dû recourir à des maillages réguliers, pour lesquels des modes propres numériques peuvent être mis en évidence.

En deux dimensions d'espace, nous avons établi une condition suffisante de stabilité d'une grande généralité, puisqu'elle est valable pour toute forme de volumes finis, avec des conditions aux limites absorbantes ou métalliques. De plus, nous avons montré que cette condition est également nécessaire pour une classe de maillages réguliers.

En trois dimensions d'espace, nous avons également établi une condition suffisante de stabilité similaire. Cependant, cette condition n'est jamais nécessaire. Nous avons quand-même indiqué une nouvelle condition suffisante de stabilité, plus large, et qui s'avère nécessaire pour des maillages en parallélépipèdes rectangles.

Références

- [1] D.A. Anderson, J.C. Tannehill, and R.H. Pletcher. *Computational fluid mechanics and heat transfer*. Hemisphere. McGraw-Hill, New York, 1984.
- [2] P. G. Ciarlet and J.-L. Lions, editors. *Handbook of Numerical Analysis*, volume 1/2. North Holland-Elsevier Science Publishers, Amsterdam, New York, Oxford, 1991.
- [3] Jean-Pierre Cioni, L. Fezoui, L. Anne, and F. Poupaud. A parallel fvtd maxwell solver using 3d unstructured meshes. In *13th annual review of progress in applied computational electromagnetics*, Monterey, California, 1997.
- [4] S. Depeyre. *Etude de schémas d'ordre élevé en volumes finis pour des problèmes hyperboliques. Application aux équations de Maxwell, d'Euler et aux écoulements diphasiques dispersés*. mathématiques appliquées, ENPC, janvier 1997.
- [5] L. Fezoui and B. Stoufflet. A class of implicit upwind schemes for euler simulations with unstructured meshes. *J. Comput. Phys.*, 84:174–206, 1989.
- [6] A. Harten. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *J. Comput. Phys.*, 49:357–393, 1983.
- [7] A. Harten, P. D. Lax, and B. van Leer. On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Rev.*, 25(1):36–61, 1983.
- [8] A. Jameson. Artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence in transonic and hypersonic flows. In *11th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Orlando, Florida, July 6-9 1993*. AIAA paper 93-3359.
- [9] S. P. Spekreijse. Multigrid solution of monotone second-order discretizations of hyperbolic conservation laws. *Math. Comp.*, 49(179):135–155, 1987.
- [10] J.-P. Vila and P. Villedieu. Convergence de la méthode des volumes finis pour les systèmes de friedrichs. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 3(325):671–676, 1997.
- [11] R.F. Warming and F. Hyett. The modified equation approach to the stability and accuracy analysis of finite-difference methods. *J. Comput. Phys.*, 14(2):159–179, 1974.

- [12] K. S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, (AP-16):302–307, 1966.

Liste des derniers rapports de recherche du CERMICS

List of previous CERMICS research reports

- | | | |
|--------|----------------------------|--|
| 98-118 | J. F.Gerbeau
C. Le Bris | <i>On the long time behaviour of the solution to the two-fluids incompressible Navier-Stokes equations.</i>
53 pages, janvier 1998, Champs sur Marne |
| 98-119 | A. Ern
V. Giovangigli | <i>The kinetic chemical equilibrium regime.</i>
27 pages, février 1998, Champs sur Marne |
| 98-120 | J. F.Gerbeau
C. Le Bris | <i>Mathematical study of a coupled system arising in magnetohydrodynamics.</i>
19 pages, février 1998, Champs sur Marne |
| 98-121 | F. Hamel
R. Monneau | <i>Solutions of semilinear elliptic equations in \mathbb{R}^N with conical-shaped level sets.</i>
51 pages, février 1998, Champs sur Marne |
| 98-122 | F. Alliot
C. Amrouche | <i>Weak solutions for the exterior stokes problem in weighted Sobolev spaces.</i>
33 pages, mars 1998, Champs sur Marne |
| 98-123 | D. Hirschhoff | <i>Automatically Proving Up-to bisimulation.</i>
24 pages, mars 1998, Champs sur Marne |
| 98-124 | Y.J Xiao | <i>On the diaphony and the star-diaphony fo the roth sequences and the zarembo sequences.</i>
18 pages, avril 1998, Champs sur Marne |
| 98-125 | E. Cancès
C. Le Bris | <i>On the time-dependent Hartree-Fock equations coupled with a classical nuclear dynamics .</i>
27 pages, mai 1998, Champs sur Marne |

- 98-126 B. Jourdain *Interpretation of some nonlinear partial differential equations thanks to diffusions processes associated with signed initial measures.*
17 pages, mai 1998, Champs sur Marne
- 98-127 B. Sportisse
- 98-128 B. Sportisse
- 98-129 B. Sportisse
- 98-130 J.F. Pommaret
A. Quadrat *Localization and parametrization of differential operators in control theory .*
18 pages, août 1998, Champs sur Marne
- 98-131 J.F. Pommaret
A. Quadrat *Algebraic analysis of linear multidimensional control systems .*
19 pages, août 1998, Champs sur Marne
- 98-132 J. F. Gerbeau *A stabilized finite element method for the incompressible magnetohydrodynamic equations .*
31 pages, août 1998, Champs sur Marne
- 98-133 B. Sportisse
- 98-134 S. Piperno *Stabilité L2 de schémas volumes finis pour les équations de Maxwell en 2D et 3D sur maillage non-structuré .*
24 pages, septembre 1998, Sophia-Antipolis

Ces rapports peuvent être obtenus en s'adressant au secrétariat du CERMICS :

The reports can be asked from:

Imane HAMADE
ENPC-CERMICS
6 et 8 Avenue Blaise Pascal
Cité Descartes Champs-sur-Marne
77455-Marne-La-Vallée Cédex 2
Tél: (33) 01 - 64-15-35-71
email: hamade@cermics.enpc.fr