Sur le mouvement d'un corps rigide et d'un liquide dans un champ central d'attraction Newtonienne *

A.A.Bourov et D.P.Chevallier

21 novembre 2001

Résumé

Il est bien connu que le mouvement d'un corps dans un liquide diffère substantiellement du mouvement du même corps dans le vide en raison des efforts exercés par le liquide. En effet, la présence du liquide entraîne en général que les translations du corps provoquent à la fois un effort résultant et un couple et que les rotations provoquent de même un couple et un effort résultant ; ces efforts dépendent considérablement de l'orientation de la vitesse relative du liquide par rapport au corps.

Dans cet article, on étudie les propriétés du mouvement d'un corps rigide dans un liquide parfait emplissant tout l'espace et en repos à l'infini. On suppose que l'ensemble du système se meut sous l'action de l'attraction Newtonienne produite par un centre d'attraction fixe dans l'espace. On discute la structure des efforts engendrés par cette attraction s'exerçant à la fois sur le solide et sur le liquide.

Les équations de la dynamique du système complet corps plus liquide sont explicitées, on met en évidence leurs intégrales premières et on étudie leurs propriétés. On recherche ensuite une possibilité de simplification du problème fondée sur une analogie avec la classique "approximation des satellites" valable lorsqu'on peut considèrer le mouvement du corps autour de son centre d'inertie indépendamment du mouvement de ce centre.

Finalement, on recherche les mouvements stationnaires et des conditions suffisantes pour leur stabilité à l'aide de la méthode de Routh.

Il existe une importante littérature consacrée à la dynamique d'un ou plusieurs corps rigides dans un liquide parfait. La liste des références remonte probablement à la publication de Thomson et Tait [1] où le principe de Hamilton a été appliqué pour obtenir les équations du mouvement (voir Petrov [2] pour les détails). L'exposé systématique du problème du mouvement d'un corps rigide dans un écoulement irrotationnel d'un liquide parfait remplissant tout l'espace et en repos à l'infini peut être trouvé, par exemple, dans Lamb [3], Kochin Kibel et Roze [4], [5]. L'étude des forces hydrodynamiques agissant sur le corps dans un écoulement non-stationnaire d'un liquide parfait a été abordée par Taylor [7], [8], Cummins [9], [10], Landweber et ses collaborateurs [11] à [14] (voir aussi [15], [16]) et par Haskind [17]. L'utilisation systématique de la méthode de symétrie de Schwarz dans les problèmes aux limites pour l'équation de Laplace dans un domaine de géométrie variable a été exposée par F.L.Chernous'ko [18]. Plusieurs études ont été consacrées aux problèmes de dynamique des corps déformables Lighthill [19], ou d'ensembles de corps déformables et bulles de vapeur par Miloh et Galper [20] à [33]. Dans le cadre de l'utilisation systématique des principes variationnels, les mêmes problèmes on été abordés par A.G.Petrov et ses collaborateurs, voir [2] et [34] à [44]. Finalement, les multiples problèmes de dynamique et de stabilité du mouvement des corps rigides dans un écoulement rotationnel on été considérés par V.A.Vladimirov et ses collaborateurs [45] à [49]. Entre autres publications consacrées à ce sujet nous pouvons aussi mentionner [50] à [60].

De nombreux problèmes concernant la dynamique du corps rigide dans un liquide parfait, en particulier le contrôle, ont également été considérés par N.E.Leonard et ses collaborateurs [61] à [75].

*L'essentiel de ce travail fait l'objet d'un article soumis à la revue PMM.

1 Structure Lagrangienne et intégrales premières des équations du mouvement

Considérons le mouvement d'un corps rigide $\mathcal{G}$ dans un liquide parfait incompressible, occupant tout l'espace et se trouvant au repos à l'infini, sous l'action de forces centrales d'attraction newtonienne dont le centre N est fixe dans l'espace. Soient $NX_1X_2X_3$ un repère inertiel, C un point fixé dans le corps, $Cx_1x_2x_3$ un repère mobile lié au corps. Soient

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \qquad \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \qquad \boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3),$$

les vecteurs unitaires du repère absolu $NX_1X_2X_3$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ le vecteur $\overrightarrow{NC}$. Soient $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ la vitesse angulaire absolue du corps, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ la vitesse absolue du point C. Ici et dans la suite, sauf mention du contraire, tous les vecteurs et tenseurs sont donnés par leurs coordonnés dans le repère mobile. Il sera montré dans la section (2) que les théorèmes de la quantité de mouvement et du moment des quantités de mouvement pour le système formé du solide et du fluide peuvent alors être exprimés sous la forme des équations de Lagrange-Euler-Poincaré

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} &= \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \times \mathbf{v} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \times \mathbf{r}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} &= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}, \end{aligned} \right. \tag{1}$$

où la fonction de Lagrange s'exprime classiquement comme la différence de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle

$$L(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}, \mathbf{r}) = T(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}) - U(\mathbf{r})$$

Ces équations doivent être complétées par l'équation cinématique exprimant la variation du vecteur $\mathbf{r}$ par rapport au repère mobile

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{2}$$

Lorsque les équations (1) et (2) sont intégrées, on peut alors déterminer le changement de l'orientation du corps par intégration des équations de Poisson

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega}, \qquad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\omega}, \qquad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{3}$$

Les équations (1) et (2) avec une fonction de Lagrange indépendante du temps admettent l'intégrale première de l'énergie-Painlevé-Jacobi

$$\mathcal{J}_0 \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\omega} \right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}, \mathbf{v} \right) - L = h \tag{4}$$

On peut voir en plus que, d'après les équations (1) et (2), on a la relation

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) \times \boldsymbol{\omega} \tag{5}$$

qui exprime la loi d'évolution du moment cinétique total par rapport au repère mobile et signifie que le moment cinétique total est *invariable* dans l'espace. Chacune de ses projections sur une direction fixée dans l'espace est donc une intégrale première des équations du mouvement ; choisissons trois intégrales indépendantes

$$J_\alpha = \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}, \boldsymbol{\alpha} \right), \tag{6}$$

$$J_\beta = \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}, \boldsymbol{\beta} \right), \tag{7}$$

$$J_\gamma = \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}, \boldsymbol{\gamma} \right), \tag{8}$$

exprimant les projections du vecteur moment cinétique total sur les axes du repère inertiel. En choisissant alors pour chaque mouvement les axes de ce repère de façon que, par exemple, le moment cinétique soit dirigé au départ selon $\boldsymbol{\beta}$, on a

$$\mathcal{J}_\alpha = 0, \qquad \mathcal{J}_\beta = p_\psi, \qquad \mathcal{J}_\gamma = 0. \tag{9}$$

Les intégrales $\mathcal{J}_\beta, \mathcal{J}_\beta, \mathcal{J}_\gamma$ et les six intégrales géométriques des équations de Poisson exprimant l'orthonormalité du repère $NX_1X_2X_3$, à savoir

$$\begin{gathered} J_{\alpha\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) - 1 = 0, \quad J_{\beta\beta} = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) - 1 = 0, \quad J_{\gamma\gamma} = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) - 1 = 0, \\ J_{\alpha\beta} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0, \qquad J_{\beta\gamma} = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \qquad J_{\gamma\alpha} = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}) = 0, \end{gathered} \tag{10}$$

permettent de réduire l'ordre du système des équations du mouvement et de se ramener à l'intégration des équations de Lagrange avec cinq degrés de liberté. Pour effectuer cette intégration, à part l'intégrale de l'énergie, il faut connaître quatre intégrales premières indépendantes et qui commutent. Mais, sauf choix spécial du repère absolu, on peut alors (et il faut) utiliser l'intégrale

$$J_1\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}, \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right) \tag{11}$$

exprimant le carré du moment cinétique total et dont l'existence est claire au vu du système (5). La constance de cette intégrale ne dépend pas du choix d'un repère absolu.

2 Equations dynamiques du système solide plus fluide

Sous la forme (1), les équations de la dynamique sont classiquement établies pour les systèmes constitués d'un nombre fini d'éléments rigides. Cette section justifie leur emploi pour le système constitué d'un solide et d'un fluide. Pour ce faire, on s'appuie sur des raisonnements proposés par M.D.Haskind [17] pour évaluer les parties "hydrodynamiques".

2.1 L'énergie cinétique du système

Pour décrire la dynamique du système il faut connaître explicitement la fonction de Lagrange. Soit

$$L_C = T_C - U_C$$

la fonction de Lagrange du corps où T_C est l'énergie cinétique, U_C est le potentiel des forces massiques appliquées au corps, égal à

$$U_C = \int_{\mathcal{G}} \rho_C(\mathbf{x}) \mathcal{U}(\mathbf{x}) d\tau(\mathbf{x})$$

où ρ_B est la densité du corps, $\mathcal{U}$ est la densité du champ potentiel (par unité de volume).

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T_C}{\partial \boldsymbol{\omega}} &= \frac{\partial T_C}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial T_C}{\partial \mathbf{v}} \times \mathbf{v} + \mathbf{M}_N + \mathbf{M}_L, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T_C}{\partial \mathbf{v}} &= \frac{\partial T_C}{\partial \mathbf{v}} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{F}_N + \mathbf{F}_L, \end{aligned} \right.$$

où $\mathbf{F}_N$ et $\mathbf{M}_N$ sont la force et le moment résultant de l'attraction newtonienne agissant sur le corps, $\mathbf{F}_L$ et $\mathbf{M}_L$ la force et le moment résultant de la pression superficielle agissant sur le corps et engendrées par la dynamique du liquide et qui peuvent être décrites par les formules (voir, par exemple, [3], [4], [17])

$$\mathbf{F}_L = -\int_{\partial \mathcal{G}} p \cdot \mathbf{n} d\sigma(\mathbf{x}), \quad \mathbf{M}_L = -\int_{\partial \mathcal{G}} p \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{n}) d\sigma(\mathbf{x})$$

où p est la pression du liquide, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ est le vecteur normal unitaire à la surface $\partial\mathcal{G}$ dirigé vers l'extérieur du corps. On suppose que le genre de la surface $\partial\mathcal{G}$ est nul et que l'écoulement du liquide est potentiel : il existe donc une fonction *univoque* $\phi = \phi(\mathbf{x}, t)$ qui vérifie l'équation de Laplace $\Delta\phi = 0$ et détermine le champs des vitesses du liquide selon la formule

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}. \tag{12}$$

Si l'équation de la frontière du corps est $f(\mathbf{x}) = 0$, le vecteur unitaire de la normale s'écrit

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right|^{-1}.$$

Dans ce cas les conditions à la frontière du corps et à l'infini s'expriment par

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\right) = (\mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x}))$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \quad \to \quad 0, \qquad |\mathbf{x}| \to \infty$$

et la détermination du potentiel d'écoulement se ramène à la solution d'un problème aux limites extérieur du type de Neumann. (Notons que, si le genre de la surface du corps $\partial\mathcal{G}$ est positif il faut alors chercher un potentiel *multivoque* en utilisant, par exemple, la méthode des membranes imaginaires. Mais, de toutes façons, la formule (12) déterminant le champs des vitesses sera encore utilisable. Voir par exemple [4] pour les détails.)

Lorsque le problème de Neuman est résolu on peut alors déterminer la pression en utilisant l'intégrale de Cauchy-Lagrange bien connue en hydrodynamique irrotationnelle du liquide parfait. Si l'on suppose que le liquide se trouve dans le champ du potentiel $\mathcal{U}$ des forces massiques alors cette intégrale s'écrit

$$p - p_0 = -\rho_L \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}}\right) + \mathcal{U}(\mathbf{x})\right) \tag{13}$$

Les expressions de $\mathbf{F}_L$ et $\mathbf{M}_L$ peuvent alors être décomposées sous la forme

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_S, \quad \mathbf{M}_L = \mathbf{M}_D + \mathbf{M}_S$$

où les quantités avec l'indice "D" correspondent aux deux premiers termes de la partie droite de l'intégrale de Cauchy-Lagrange (13) et ont une origine hydrodynamique tandis que les quantités avec l'indice "S" correspondent au dernier terme de la partie droite et ont une origine hydrostatique (ce sont les forces et moments dits *archimédiens)*. D'après des raisonnements développés par M.D.Haskind [17] les parties hydrodynamiques $\mathbf{F}_D$ et $\mathbf{M}_D$ s'écrivent

$$\mathbf{F}_D = -\frac{d\mathbf{K}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}, \quad \mathbf{M}_D = -\frac{d\mathbf{L}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} - \mathbf{v} \times \mathbf{K}$$

où $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L}$ sont respectivement le vecteur principal et le moment principal des pressions impulsives

$$\mathbf{K} = -\rho_L \int_{\partial\mathcal{G}} \phi \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}), \quad \mathbf{L} = -\rho_L \int_{\partial\mathcal{G}} \phi \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{n}(\mathbf{x}))\, d\sigma(\mathbf{x}) \tag{14}$$

Précisons que la publication [17] contient des formules plus générales valables pour la description du mouvement lorsqu'un champ de vitesses non-stationnaire à l'infini est prescrit.

Il est bien connue (voir par exemple [3]) que l'équation de Laplace et les conditions aux limites étant linéaires par rapport à la vitesse de translation et la vitesse angulaire, l'expression du potentiel est

$$\phi = (\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\omega}) \tag{15}$$

où les φ_i et χ_i $(i = 1, 2, 3)$ sont les solutions de six problèmes aux limites indépendants :

$$\begin{cases} \Delta\varphi_i = 0, & \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{n}} = n_i, \qquad\qquad i = 1, 2, 3, \\ \Delta\chi_i = 0, & \dfrac{\partial\chi_i}{\partial\mathbf{n}} = (\mathbf{x} \times \mathbf{n})_i, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

La substitution du développement (15) dans les formules (14) donne les expressions connues pour $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L}$, expressions linéaires par rapport aux composantes v_i et ω_i des vitesses linéaire et angulaire. En vertu des conditions limites on a

$$K_i = -\rho_L \int_{\partial\mathcal{G}} \phi \, \frac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{n}} d\sigma(\mathbf{x}) = -\rho_L \int_{\partial\mathcal{G}} ((\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\omega})) \, \frac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{n}} d\sigma(\mathbf{x})$$

$$L_i = -\rho_L \int_{\partial\mathcal{G}} ((\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\omega})) \, \frac{\partial\chi_i}{\partial\mathbf{n}} d\sigma(\mathbf{x})$$

soit

$$K_i \left(\mathbf{B}_L.\boldsymbol{\omega} + \mathbf{C}_L.\mathbf{v}\right)_i, \quad L_i \left(\mathbf{A}_L.\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}_L^T.\mathbf{v}\right)_i$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{Lij} = -\rho_L \displaystyle\int_{\partial\mathcal{G}} \chi_j \frac{\partial\chi_i}{\partial\mathbf{n}} d\sigma(\mathbf{x}), \\ \mathbf{B}_{Lij} = -\rho_L \displaystyle\int_{\partial\mathcal{G}} \chi_j \frac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{n}} d\sigma(\mathbf{x}), \\ \mathbf{C}_{Lij} = -\rho_L \displaystyle\int_{\partial\mathcal{G}} \varphi_j \frac{\partial\varphi_i}{\partial\mathbf{n}} d\sigma(\mathbf{x}). \end{cases}$$

Si

$$T_L \frac{1}{2} \left((\mathbf{A}_L.\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + 2 \left(\mathbf{B}_L.\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}\right) + (\mathbf{C}_L.\mathbf{v}, \mathbf{v})\right)$$

est l'énergie cinétique du liquide, on voit qu'alors

$$K = \frac{\partial T_L}{\partial\mathbf{v}}, \quad L = \frac{\partial T_L}{\partial\boldsymbol{\omega}}.$$

Donc, relativement au repère fixé dans le corps, l'énergie cinétique du système est définie par l'expression

$$T = T_C + T_L = \frac{1}{2} \left((\mathbf{A}.\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + 2 \left(\mathbf{B}.\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}\right) + (\mathbf{C}.\mathbf{v}, \mathbf{v})\right) \tag{16}$$

où les matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ sont constantes et de la forme

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_C + \mathbf{A}_L, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_C + \mathbf{B}_L, \qquad \mathbf{C} = M_C\mathbf{E} + \mathbf{C}_L,$$

$$\mathbf{B}_G M_G \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{R}_3 & \mathcal{R}_2 \\ \mathcal{R}_3 & 0 & -\mathcal{R}_1 \\ -\mathcal{R}_2 & \mathcal{R}_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Ici $\mathbf{I}_C$ est le tenseur d'inertie du corps par rapport au point G, le vecteur $\mathcal{R} = (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3)$ représente le vecteur $\overrightarrow{CG}$, G étant le centre d'inertie du corps, $\mathbf{E}$ est la matrice unité 3×3. La quantité M_C est la masse du corps, les matrices $\mathbf{A}_L$, $\mathbf{B}_L$ et $\mathbf{C}_L$, dont les termes sont aussi constants, définissent le tenseur des masses ajoutées. Il est bien connu [3] que les composantes de ces matrices dépendent seulement de la géométrie de la surface du corps. La méthode de calcul des termes de ces matrices, fondée sur des solutions de problèmes de Neumann dans le domaine extérieurs au corps pour l'équation de Laplace, est décrites dans différentes publications (voir, par exemple, [3], [4]).

On en déduit que les équations du mouvement peuvent être représentées sous la forme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}}\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \times \mathbf{v} + \mathbf{M}_e, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}}\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}} \times \omega + \mathbf{F}_e \tag{18}$$

où

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{F}_N + \mathbf{F}_S, \quad \mathbf{M}_e = \mathbf{M}_N + \mathbf{M}_S$$

sont respectivement les sommes des forces et des moments des forces gravitationnelles et hydrostatiques, la partie hydrodynamique étant maintenant intégrée dans le terme en T.

2.2 Potentiel des forces.

L'énergie potentielle du système est composée de l'énergie potentielle des forces "hydrostatiques", c'est-à-dire des forces d'Archimède et de l'énergie potentielle d'attraction Newtonienne. Nous examinerons ces deux types d'énergie potentielle séparément.

2.2.1 Energie potentielle des forces archimédiennes.

Considérons les parties hydrostatiques $\mathbf{F}_S$ et $\mathbf{M}_S$; elles sont engendrées par le troisième terme de partie droite de (13), la pression hydrostatique $\bar{p} = -\rho_L \mathcal{U}$. Nous admettons que le liquide est soumis aux mêmes forces potentielles que le corps, c'est-à-dire que la densité du champs extérieur s'exprime en fonction de $X = (X_1, X_2, X_3)$ par

$$\mathcal{U}(X) = -f_N M_N \frac{1}{(X,X)^{1/2}}$$

Alors la force hydrostatique appliquée au corps s'écrit

$$\mathbf{F}_S = -\int_{\partial \mathcal{G}} \bar{p}\, \mathbf{n}\, d\sigma(X) = \rho_L \int_{\partial \mathcal{G}} \mathcal{U}(X)\, \mathbf{n}\, d\sigma(X), \tag{19}$$

(la seule singularité de l'expression sous le signe d'intégrale se trouvant en dehors du corps). Par la formule de Gauss-Ostrogradsky on obtient

$$\mathbf{F}_S = \rho_L \int_{\mathcal{G}} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X}(X)\, d\tau(X)$$

Mais

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X}(X) = f_N M_N \frac{X}{(X,X)^{3/2}}$$

Pour mettre en évidence un potentiel fonction de la variable $\mathbf{r}$ et pour les calculs d'approximations du potentiel de la section 2.4, il est avantageux d'exprimer X sous la forme $X = \mathbf{r} + \mathbf{x}$ ($\mathbf{r} = \overrightarrow{NC}$). Comme

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial X}(X) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\mathcal{U}(\mathbf{r}+\mathbf{x}) = f_N M_N \frac{\mathbf{r}+\mathbf{x}}{(\mathbf{r}+\mathbf{x}, \mathbf{r}+\mathbf{x})^{3/2}}$$

on a

$$\mathbf{F}_S = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\left[\rho_L \int_{\mathcal{G}} \mathcal{U}(\mathbf{r}+\mathbf{x}) d\tau(\mathbf{x})\right] - \frac{\partial U_A}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}) \tag{20}$$

où le potentiel U_A de la force hydrostatique $\mathbf{F}_S$ s'écrit

$$U_A(\mathbf{r}) = -\rho_L \int_{\mathcal{G}} \mathcal{U}(\mathbf{r}+\mathbf{x})\, d\tau(\mathbf{x}) = f_N M_N \rho_L \int_{\mathcal{G}} \frac{1}{(\mathbf{r}+\mathbf{x}, \mathbf{r}+\mathbf{x})^{1/2}}\, d\tau(\mathbf{x})$$

Le moment des forces hydrostatiques ou bien de la force d'Archimède s'écrit de même

$$\mathbf{M}_S = -\frac{\partial U_A}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{r} \tag{21}$$

2.2.2 Forces d'origine gravitationnelle.

Le potentiel de l'attraction Newtonienne, la force d'attraction et son moment s'écrivent

$$U_N = -f_N M_N \int_{\mathcal{G}} \frac{\rho_C(\mathbf{x}) d\tau(\mathbf{x})}{(\mathbf{r}+\mathbf{x},\mathbf{r}+\mathbf{x})^{1/2}}$$

$$\mathbf{F}_N = -\frac{\partial U_N}{\partial \mathbf{r}} = -f_N M_N \int_{\mathcal{G}} \frac{\rho_C(\mathbf{x})(\mathbf{r}+\mathbf{x}) d\tau(\mathbf{x})}{(\mathbf{r}+\mathbf{x},\mathbf{r}+\mathbf{x})^{3/2}} \tag{22}$$

$$\mathbf{M}_N = -\frac{\partial U_N}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{r} f_N M_N \int_{\mathcal{G}} \frac{\rho_C(\mathbf{x})\,(\mathbf{r}\times\mathbf{x})\, d\tau(\mathbf{x})}{(\mathbf{r}+\mathbf{x},\mathbf{r}+\mathbf{x})^{3/2}} \tag{23}$$

Finalement, les forces hydrostatiques et newtoniennes admettent le potentiel

$$U(\mathbf{r}) = U_N(\mathbf{r}) + U_A(\mathbf{r}) \tag{24}$$

qui s'exprime explicitement par :

$$U(\mathbf{r}) = -f_N M_N \int_{\mathcal{G}} \frac{\rho_C(\mathbf{x}) - \rho_L}{(\mathbf{r}+\mathbf{x},\mathbf{r}+\mathbf{x})^{1/2}}\, d\tau(\mathbf{x}) = -f_N M_N \int_{\mathcal{G}} \frac{dm_a(\mathbf{x})}{(\mathbf{r}+\mathbf{x},\mathbf{r}+\mathbf{x})^{1/2}}.$$

en désignant par $dm_a(\mathbf{x}) = (\rho_C(\mathbf{x}) - \rho_L) d\tau(\mathbf{x})$ la distribution de *masse apparente* du solide dans le liquide.

2.2.3 Remarque : approche heuristique.

Sur le système considéré, en dehors des forces et des moments d'origine hydrodynamique liés au tenseur des masses ajoutées, agissent des forces et des moments directement ou indirectement liés au champ de l'attraction newtonienne. Le potentiel total des forces newtoniennes s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}) &= -fM \int_{\mathcal{G}} \frac{dm_G(\mathbf{x})}{(\mathbf{r}+\mathbf{x},\mathbf{r}+\mathbf{x})^{1/2}} - fM \int_{R^3\setminus\mathcal{G}} \frac{dm_L(\mathbf{x})}{(\mathbf{r}+\mathbf{x},\mathbf{r}+\mathbf{x})^{1/2}} \\ &= -fM \int_{\mathcal{G}} \frac{dm_G(\mathbf{x})}{(\mathbf{r}+\mathbf{x},\mathbf{r}+\mathbf{x})^{1/2}} + fM \int_{\mathcal{G}} \frac{\rho_L d\tau(\mathbf{x})}{(\mathbf{r}+\mathbf{x},\mathbf{r}+\mathbf{x})^{1/2}} - fM \int_{R^3} \frac{\rho_L d\tau(\mathbf{x})}{(\mathbf{r}+\mathbf{x},\mathbf{r}+\mathbf{x})^{1/2}} \end{aligned}$$

où f est la constante de Newton, M est la masse du centre d'attraction, $dm_G(\mathbf{x})$ et $dm_L(\mathbf{x})$ sont les masses des volumes élémentaires du corps et du liquide respectivement au point $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Le dernier terme ne dépend pas de $\mathbf{r}$ et ne contribue donc pas à l'expression des forces et moments. La fonction U apparaît donc comme une somme $U = U_N + U_A$ où $U_N(\mathbf{r})$ est le potentiel des forces newtoniennes et $U_A(\mathbf{r})$ est le potentiel des forces archimédiennes correspondant à l'attraction des points du liquide qui pourraient remplacer le corps si ce corps était extrait du liquide.

2.3 Conclusion

Il résulte de (18), (20), (21), (22) et (23) que les équations du mouvement du solide et du fluide peuvent effectivement s'exprimer sous la forme (1) où $T = T_C + T_L$ (énergie cinétique du solide plus énergie cinétique du fluide exprimée par (16)), $U = U_N + U_A$ (énergie potentielle du corps solide dans le champ newtonien plus potentiel des forces d'Archimède). Par substitution de (16), la forme explicite des équations est :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\mathbf{A}.\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}^T.\mathbf{v}\right) = \left(\mathbf{A}.\boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}^T.\mathbf{v}\right) \times \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{B}.\boldsymbol{\omega} + \mathbf{C}.\mathbf{v}) \times \mathbf{v} - \dfrac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{r} \\ \dfrac{d}{dt}(\mathbf{B}.\boldsymbol{\omega} + \mathbf{C}.\mathbf{v})\,(\mathbf{B}.\boldsymbol{\omega} + \mathbf{C}.\mathbf{v}) \times \boldsymbol{\omega} - \dfrac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \end{cases} \tag{25}$$

les parties hydrostatiques et gravitationnelles étant intégrées dans le potentiel U dont des expressions approchées vont être étudiées dans les sections suivantes.

2.4 Approximations du potentiel.

2.4.1 Remarques sur les tenseurs d'inertie

Le tenseur d'inertie $\mathbf{I}$ d'une distribution de masse (représentée par une mesure positive "dm", portée par un ensemble borné $\mathcal{G}$ ce qui assure la convergence des intégrales dans la suite) relativement à un point est défini par :

$$\mathbf{I}.\boldsymbol{\omega} = \int_{\mathcal{G}} \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x})\, dm(\mathbf{x}), \quad (\boldsymbol{\omega} \in R^3)$$

ou, ce qui est équivalent, par la forme bilnéaire symétrique associée

$$(\mathbf{I}.\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) = \int_{\mathcal{G}} (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{x})\ dm(\mathbf{x}), \quad (\boldsymbol{\omega}_1,\ \boldsymbol{\omega}_2 \in R^3).$$

La trace de $\mathbf{I}$ peut être aisément exprimée :

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{I})2 \int_{\mathcal{G}} \mathbf{x}^2\, dm(\mathbf{x}).$$

Pour prouver ce résultat, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ étant une base orthonormée quelconque, on a

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{I}) = \sum_{k=1}^{3} (\mathbf{I}.\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_k) = \int_{\mathcal{G}} \sum_{k=1}^{3} (\mathbf{e}_k \times \mathbf{x})^2\, dm(\mathbf{x})$$

Or, en utilisant les propriétés du produit vectoriel $\sum_{k=1}^{3} (\mathbf{e}_k \times \mathbf{x})^2 = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{e}_k^2 \mathbf{x}^2 - (\mathbf{e}_k, \mathbf{x})^2 = 2\mathbf{x}^2$.

Comme à tout tenseur symétrique on peut associer à $\mathbf{I}$ un tenseur de trace nulle $\mathbf{I}^0$ (*déviateur* de $\mathbf{I}$) défini par

$$\mathbf{I}^0 = \mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}(\mathbf{I})\mathbf{E},$$

qui s'exprime par :

$$\left(\mathbf{I}^0.\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2\right) = \int_{\mathcal{G}} \left\{ (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{x}) - \frac{2}{3}\mathbf{x}^2 (\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2) \right\} dm(\mathbf{x}), \quad (\boldsymbol{\omega}_1,\ \boldsymbol{\omega}_2 \in R^3).$$

2.4.2 Formes réduites du potentiel

Dans les équations (1) et (25) on peut utiliser l'expression exacte ou bien diverses approximations du potentiel (24). Ces approximations peuvent être liées, par exemple, à une hypothèse sur la petitesse du corps par rapport à son éloignement du centre d'attraction. Dans ce cas le paramètre $\varepsilon = \sup |\mathbf{x}|/r$, où $r = \left(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2\right)^{1/2}$ est petit et on peut représenter le potentiel (24) sous la forme d'un développement limité. Pour obtenir ce développement, un calcul classique dans les approximations des potentiels newtoniens donne le développement asymptotique :

$$\frac{1}{(\mathbf{r} + \mathbf{x}, \mathbf{r} + \mathbf{x})^{1/2}} = \frac{1}{r}\left(1 + u_1(\mathbf{r}, \mathbf{x}) + u_2(\mathbf{r}, \mathbf{x})\right) + o\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad r = \|\mathbf{r}\|.$$

où la fonction $o\left(\dfrac{1}{r^3}\right)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{r^3}$ lorsque r tend vers ∞ et $\mathbf{x}$ reste borné et

$$u_1(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = -\frac{(\mathbf{r}, \mathbf{x})}{r^2}, \quad u_2(\mathbf{r}, \mathbf{x})) = \frac{\mathbf{x}^2}{r^2} - \frac{3}{2}\frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{x})^2}{r^4}.$$

En intégrant par rapport à $\mathbf{x}$ sur l'ensemble borné $\mathcal{G}$ et par rapport à la mesure de masse apparente dm_a on obtient d'abord

$$\int_{\mathcal{G}} u_1(\mathbf{r}, \mathbf{x})\, dm_a(\mathbf{x}) = -\frac{1}{r^2}\left(\mathbf{r},\ \int_{\mathcal{G}} \mathbf{x}\, dm_a(\mathbf{x})\right).$$

L'intégrale figurant dans le membre de droite est liée au barycentre de la distribution de masse apparente du corps ; plus précisément soient $M_a = \int_{\mathcal{G}} dm_a(\mathbf{x})$ la masse apparente totale du corps (qui peut être positive, négative ou nulle) et C_a le barycentre de la distribution de masse apparente. On a

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathcal{G}} \mathbf{x}\, dm_a(\mathbf{x}) = M_a \overrightarrow{CC}_a \;\text{ lorsque } M_a \neq 0, \\[2ex] \displaystyle\int_{\mathcal{G}} \mathbf{x}\, dm_a(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu} \;\text{ vecteur indépendant du choix de l'origine, lorsque } M_a = 0. \end{cases}$$

(Le vecteur $\boldsymbol{\mu}$ représente un "moment dipolaire"). Finalement :

$$\int_{\mathcal{G}} u_1(\mathbf{r},\mathbf{x})\, dm_a(\mathbf{x}) \begin{cases} -M_a \dfrac{1}{r^2}(\mathbf{r}, \overrightarrow{CC}_a) \;\text{ lorsque } M_a \neq 0, \\[2ex] -\dfrac{1}{r^2}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\mu}) \;\text{ lorsque } M_a = 0. \end{cases}$$

Si M_G est la masse du corps et M_L la masse du liquide remplacé par le corps et si C_G est le centre d'inertie du corps et C_L son centroïde, c'est-à-dire le centre d'inertie du liquide remplacé par le corps, on a $M_a = M_G - M_L$ et :

$$\begin{cases} M_a \overrightarrow{CC}_a M_G \overrightarrow{CC}_G - M_L \overrightarrow{CC}_L, \;\text{ lorsque } M_a \neq 0, \\[2ex] \boldsymbol{\mu} = M_G \overrightarrow{C_L C}_G, \;\text{ lorsque } M_a = 0. \end{cases}$$

Les termes du second ordre sont liés au déviateur $\mathbf{I}_a^0$ du tenseur d'inertie $\mathbf{I}_a$ de la distribution de masse apparente :

$$\int_{\mathcal{G}} u_2(\mathbf{r},\mathbf{x})\, dm_a(\mathbf{x}) = \frac{3}{2}\frac{1}{r^4}\int_{\mathcal{G}} \left\{ \frac{2}{3}\mathbf{r}^2\mathbf{x}^2 - (\mathbf{r}\times\mathbf{x})^2 \right\} dm_a(\mathbf{x}) = -\frac{3}{2}\frac{1}{r^4}\mathbf{I}_a^*(\mathbf{r},\mathbf{r}).$$

Finalement, le potentiel (24) s'exprime en général par

$$U(\mathbf{r}) = U_0(\mathbf{r}) + U_1(\mathbf{r}) + U_2(\mathbf{r}) + \, o\left(\frac{1}{r^3}\right) \tag{26}$$

avec

$$\begin{cases} U_0(\mathbf{r}) = -f_N M_N \dfrac{M_a}{r}, \\[2ex] U_1(\mathbf{r}) = f_N M_N M_a \dfrac{(\mathbf{r}, \overrightarrow{CC}_a)}{r^3}, \;\text{ lorsque }\; M_a \neq 0, \\[2ex] U_1(\mathbf{r}) = f_N M_N \dfrac{(\mathbf{r}, \boldsymbol{\mu})}{r^3}, \;\text{ lorsque }\; M_a = 0, \\[2ex] U_2(\mathbf{r}) = \dfrac{\kappa}{2}\dfrac{(\mathbf{Dr},\mathbf{r})}{r^5}, \;\; (\mathbf{D} = 3\mathbf{I}_a^0 \text{ tenseur de trace nulle, } \kappa \text{ constante}). \end{cases}$$

Deux formes réduites du potentiel se présentent donc :

1) $M_a \neq 0$. On peut alors choisir $C = C_a$ et le potentiel prend la forme

$$U(\mathbf{r}) = U_0(\mathbf{r}) + U_2(\mathbf{r}) + o\left(\frac{1}{r^3}\right) = -f_N M_N \frac{M_a}{r} + \frac{\kappa}{2}\frac{(\mathbf{Dr},\mathbf{r})}{r^5} + \cdots .$$

Dans une première approximation le potentiel est égal à U_0 et ce potentiel engendre donc une force attractive ou répulsive vers le centre d'attraction N selon que $M_a > 0$ ($M_G > M_L$) ou que $M_a < 0$ ($M_G < M_L$). Notons que le potentiel de la première approximation n'exerce d'influence directe que sur les translations du corps mais n'en exerce aucune sur les rotations : c'est le potentiel U_2 qui détermine l'orientation du corps.

2) $M_a = 0$. Le potentiel prend alors la forme

$$U(\mathbf{r}) = U_1(\mathbf{r}) + U_2(\mathbf{r}) + o\left(\frac{1}{r^3}\right) = f_N M_N \frac{(\mathbf{r}, \boldsymbol{\mu})}{r^3} + \frac{\kappa}{2} \frac{(\mathbf{Dr}, \mathbf{r})}{r^5} + \cdots .$$

On a alors une situation neutre en première approximation. Avec l'approximation supérieure le potentiel dépend toujours de l'orientation. Le premier terme est le potentiel d'un dipôle $\boldsymbol{\mu}$ dans un champ newtonien. Le potentiel U_2 est nécessaire pour déterminer complètement l'orientation du corps.

Notons aussi que ce second cas n'a d'intérêt que lorsque le corps est non homogène (pour un corps homogène on ne peut avoir $M_a = 0$ que lorsque $\rho_G = \rho_L$ donc $dm_a = 0$ et $U(\mathbf{r}) = 0$).

Le tenseur symétrique $\mathbf{D}$, qui joue un rôle prépondérant pour la détermination de l'orientation du corps, est un tenseur symétrique de trace nulle dont les valeurs propres sont signe quelconque et qui n'est pas nécessairement coaxial au tenseur d'inertie. Lorsque le corps est homogène on a $\mathbf{I}_a = \mathbf{I}_G - \mathbf{I}_L$

$$\mathbf{I}_i = \rho_i \mathbf{I}, \quad \mathbf{I}_i^0 = \mathbf{I}_i - \frac{2}{3}\rho_i J, \quad i \in \{G, L\}$$

où $\mathbf{I}$ est le tenseur d'un corps homogène de densité égale à l'unité et $J = \int_{\mathcal{G}} \mathbf{x}^2 d\tau(\mathbf{x})$. Donc :

$$\mathbf{D} = (\rho_G - \rho_L)\,(3\mathbf{I} - 2J\,\mathbf{E})\,.$$

et les tenseurs $\mathbf{I}_G$, $\mathbf{I}_L$ et $\mathbf{D}$ sont alors coaxiaux.

2.5 Approximations des composantes du tenseur des masses ajoutées.

En mécanique des corps rigides "l'approximation des satellites", permet de simplifier le problème en découplant l'effet des translations et des rotations du corps. La question se pose de savoir si la même approximation peut être ou non utilisée pour certaines valeurs des paramètres lorsque le corps se meut dans un espace rempli par un liquide.

Considérons la question de la petitesse du corps de la façon suivante. Supposons qu'il existe une famille de corps homothétiques entre eux et ayant le point C comme centre d'homothétie commun ; cette famille est paramétrisée par le rapport d'homothétie ε. Soit

$$f\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, \frac{x_3}{\varepsilon}\right) = 0$$

l'équation paramétrique des surfaces de ces corps. Lorsque $\varepsilon \to 0$, les dimensions du corps tendent aussi vers zéro. Les densités du corps et du liquide sont supposées indépendantes des dimensions des corps. La solution de l'équation du problème de Neuman extérieur à la surface du corps peut alors être exprimée comme une fonction de ε. En substituant cette solution dans les expressions des termes de la matrice de l'énergie cinétique on obtient la dépendance de ces termes en fonction de ε et l'on a :

$$M_k(\varepsilon) = \varepsilon^3 M_k(1), \quad k \in \{G, L\},$$

$$\mathbf{I}_G(\varepsilon) = \varepsilon^5 \mathbf{I}_G(1), \quad \mathbf{B}_G(\varepsilon) = \varepsilon^4 \mathbf{B}_G(1)$$

$$\mathbf{A}_L(\varepsilon) = \varepsilon^5 \mathbf{A}_L(1), \quad \mathbf{B}_L(\varepsilon) = \varepsilon^4 \mathbf{B}_L(1), \quad \mathbf{C}_L(\varepsilon) = \varepsilon^3 \mathbf{C}_L(1),$$

de sorte que pour l'expression de l'énergie cinétique on a les relations

$$\mathbf{A}(\varepsilon) = \varepsilon^5 \mathbf{A}(1), \quad \mathbf{B}(\varepsilon) = \varepsilon^4 \mathbf{B}(1), \quad \mathbf{C}(\varepsilon) = \varepsilon^3 \mathbf{C}(1).$$

Pour les mêmes raisons

$$\mathbf{D}(\varepsilon) = \varepsilon^5 \mathbf{D}(1),$$

$$U(\mathbf{r},\varepsilon) = U_0(\mathbf{r},\varepsilon) + U_1(\mathbf{r},\varepsilon) + U_2(\mathbf{r},\varepsilon) + \cdots = \varepsilon^3 U_0(\mathbf{r},1) + \varepsilon^4 U_1(\mathbf{r},1) + \varepsilon^5 U_2(\mathbf{r},1) + \cdots \tag{27}$$

Considérons par exemple un corps en forme d'ellipsoïde. Supposons que le centre et les axes principaux de l'ellipsoïde coïncident avec ceux du repère mobile. Dans l'équation

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$$

remplaçons les demi axes a_i par a_i/ε. On obtient

$$\frac{x_1^2}{(\varepsilon a_1)^2} + \frac{x_2^2}{(\varepsilon a_2)^2} + \frac{x_3^2}{(\varepsilon a_3)^2} = 1$$

Les composantes du tenseur des masses ajoutées sont bien connues (voir, par exemple, [3]). Posons

$$\Delta = \left(\left(a_1^2 + \lambda\right)\left(a_2^2 + \lambda\right)\left(a_3^2 + \lambda\right)\right)^{1/2}, \quad \delta_i\left(a_1, a_2, a_3\right) = a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\left(a_i^2 + \lambda\right)\Delta}, \tag{28}$$

alors

$$\mathbf{C}_L = \mathrm{diag}(C_{L1}, C_{L2}, C_{L3}), \quad C_{Li} = \frac{\delta_i}{2 - \delta_i}\rho_L \mathcal{V}, \quad i = 1, 2, 3$$

où $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi a_1 a_2 a_3$ est le volume du corps. La matrice $\mathbf{B}$ s'annule. La matrice $\mathbf{A}$ s'écrit

$$\mathbf{A}_L = \mathrm{diag}(A_{L1}, A_{L2}, A_{L3}), \quad A_{L1} \frac{1}{5} \frac{\left(a_2^2 - a_3^2\right)^2 (\delta_3 - \delta_2)}{2\left(a_2^2 - a_3^2\right) + \left(a_2^2 + a_3^2\right)(\delta_2 - \delta_3)} \rho_L \mathcal{V}, \tag{123}$$

En substituant les expressions $a_i = a_i' \varepsilon$ et $\lambda = \lambda' \varepsilon^2$ dans (28) et en conservant la densité ρ_L constante on obtient que :

$$\delta_i(a_1, a_2, a_3) = \delta_i(a_1', a_2', a_3')$$

$$C_{Li}(a_1, a_2, a_3) = \varepsilon^3 C_{Li}(a_1', a_2', a_3'), \quad A_{Li}(a_1, a_2, a_3) = \varepsilon^5 A_{Li}(a_1', a_2', a_3')$$

2.6 Problème restreint

Alors par substitution dans les équations (25) des expressions approchées obtenues dans les sections précédentes. Après division par ε^3 (supposé non nul) et suppression des arguments $''(1)''$ devant les matrices on a :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\varepsilon^2 \mathbf{A}.\boldsymbol{\omega} + \varepsilon \mathbf{B}^T.\mathbf{v}\right)\left(\varepsilon^2 \mathbf{A}.\boldsymbol{\omega} + \varepsilon \mathbf{B}^T.\mathbf{v}\right) \times \boldsymbol{\omega} + (\varepsilon \mathbf{B}.\boldsymbol{\omega} + \mathbf{C}.\mathbf{v}) \times \mathbf{v} - \left(\varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{r}} + \varepsilon^2 \frac{\partial U_2}{\partial \mathbf{r}} + \cdots\right) \times \mathbf{r} \\ &\frac{d}{dt}(\varepsilon \mathbf{B}.\boldsymbol{\omega} + \mathbf{C}.\mathbf{v})(\varepsilon \mathbf{B}.\boldsymbol{\omega} + \mathbf{C}.\mathbf{v}) \times \boldsymbol{\omega} - \left(\frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{r}} + \varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{r}} + \cdots\right) \end{aligned} \tag{29}$$

Il faut chercher les solutions sous forme de séries formelles

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \varepsilon \boldsymbol{\omega}_1 + \cdots, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1 + \cdots, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \varepsilon \mathbf{r}_1 + \cdots$$

et identifier les termes du même ordre pour obtenir les systèmes déterminant $\boldsymbol{\omega}_0$, $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{r}_0$ et les corrections $\boldsymbol{\omega}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{r}_1$ etc. Ici nous discuterons seulement les termes d'ordre le plus bas et l'indice 0 sera partout omis.

Supposons le tenseur $\mathbf{C}$ non sphérique. Alors, dans le premier groupe des équations (29), le paramètre ε est en facteur de la dérivée d'ordre le plus élevé. A la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ on a le système

$$\mathbf{C}.\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\mathbf{C}.\mathbf{v} = \mathbf{C}.\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{r}}. \tag{30}$$

La partie algébrique de ce système montre que, dans le cadre de cette approximation, le corps ne peut se mouvoir que dans la direction d'un des axes propres du tenseur $\mathbf{C}$. Soit $\mathbf{v}$ le vecteur propre du tenseur $\mathbf{C}$ associé à la valeur propre c, c'est-à-dire que

$$\mathbf{C}.\mathbf{v} = c\mathbf{v}$$

La deuxième équation de (30) determine alors la loi du mouvement du point C. Si l'on utilise l'expression

$$\mathbf{R} = \mathbf{S}.\mathbf{r}, \qquad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \tag{31}$$

de la transformation des vecteurs du repère mobile en ceux du repère absolu, la deuxième équation (30) s'écrit alors

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_0}{\partial \dot{\mathbf{R}}}\frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{R}}, \tag{32}$$

avec

$$L_0\left(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}\right)\frac{c}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 + fM\left(M_G - M_L\right)\frac{1}{\mathbf{r}}, \quad r = (\mathbf{r}, \mathbf{r})^{1/2},$$

soit explicitement

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = -\frac{1}{c}fM\left(M_G - M_L\right)\frac{\mathbf{R}}{r^3}. \tag{33}$$

Cette équation, qui est analogue à celle du problème de Kepler, peut être intégrée de la même façon mais les propriétés qualitatives du mouvement du point C peuvent être complètement différentes.

- Lorsque $M_L < M_G$, comme dans le problème de Kepler, la force est attractive et les orbites peuvent être hyperboliques, paraboliques ou elliptiques, mais alors les paramètres de ces orbites dépendent des masses M_G, M_L ainsi que de la valeur propre c du tenseur des masses ajoutées.
- Lorsque $M_L > M_G$, la force est répulsive et il n'existe pas d'orbite fermée contrairement au cas de Kepler.
- Lorsque $M_L = M_G$ alors, dans cette approximation, le point C se meut avec une vitesse constante le long d'une droite ne passant pas obligatoirement par N, ce qui est impossible dans le problème de Kepler.

Dans tous les cas l'un des axes principaux de $\mathbf{C}$, axe lié au corps, doit rester tangent à l'orbite au cours du mouvement et le problème n'entre donc pas dans les conditions d'application de l'approximation des satellites sous la forme classique (dans laquelle l'orientation autour de C n'est soumise à aucune contrainte). Ce n'est que si $M_L = M_G$ que l'effet du moment gravitationnel joue un rôle prépondérant mais, comme on le voit, le problème n'entre plus alors dans le cadre de la dynamique d'un satellite.

Supposons maintenant que $\mathbf{C} = c\mathbf{E}$ soit un tenseur sphérique. Alors, dans le premier groupe des équations (29), le dernier terme s'annule. On peut diviser ces équations par ε et passer ensuite à la limite $\varepsilon \to 0$ ce qui donne

$$\frac{d}{dt}\mathbf{B}^T.\mathbf{v} = \mathbf{B}^T.\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{B}.\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - \frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{r}, \tag{34}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{c}\frac{\partial U_0}{\partial \mathbf{r}}. \tag{35}$$

Comme on le voit, l'équation (35) équivaut à l'équation (30) considérée plus haut et tous les arguments présentés plus haut et concernant de l'intégration de cette équation sont encore valables.

Finalement, soient $\mathbf{C} = c\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = 0$ et $M_G \neq M_L$. Alors, après division par ε^2 de (29), on obtient l'équation

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}.\boldsymbol{\omega} = \mathbf{A}.\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{\partial U_2}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{r} = \mathbf{A}.\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} - \frac{\kappa}{r^5}\mathbf{D}.\mathbf{r} \times \mathbf{r} \tag{36}$$

qui, avec les équations de Poisson, décrit les changements d'orientation du corps. Dans le cas général ces équations sont encore les équations d'Euler - Lagrange - Poincaré.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\omega}}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{r}, \qquad \mathcal{L}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) - U_2(\mathbf{r}) \tag{37}$$

Le mouvement du point C est encore défini par l'équation (33).

Lorsque l'équation (33) est intégrée on peut exprimer le vecteur $\mathbf{r}$ comme une fonction de l'orientation et du temps

$$\mathbf{r} = \mathbf{S}^T.\mathbf{R}(t) \tag{38}$$

En substituant $\mathbf{r}$ de (38) dans le système (36) et en considérant le dernier système et les équations de Poisson, on a un système fermé non autonome de douze équations par rapport à douze variables pour la détermination de l'orientation du corps et des changement de la vitesse angulaire.

2.7 Équation de Kepler

Néanmoins, on peut continuer les transformations du système (35). Par analogie avec le problème de Kepler dans l'approximation considérée, le point C se meut dans un plan fixe dans l'espace absolu et perpendiculaire à la composante du moment cinétique correspondant aux équations (33). D'après les intégrales (9) ce plan coïncide avec le plan NX_1X_3. Pour intégrer les équations (33), supposons que le mouvement du point C se réalise dans le même plan, soit dans le plan NX_1X_3. Introduisons les coordonnées polaires dans ce plan

$$R_3 = r\cos\psi, \qquad R_1 = r\sin\psi.$$

La fonction de Lagrange (32) s'écrit alors

$$L\left(\dot{r}, \dot{\psi}, r\right)\frac{c}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\psi}^2\right) + fM\left(M_G - M_L\right)\frac{1}{r}.$$

La coordonnée ψ est cyclique et l'intégrale première correspondante s'écrit

$$cr^2\dot{\psi} = p_\psi, \tag{39}$$

d'où

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{cr^2},$$

et la fonction de Routh peut être représentée par

$$R(\dot{r}, r, p_\psi) = \frac{c}{2}\dot{r}^2 - U_a(r, p_\psi), \qquad U_a(r, p_\psi) = \frac{p_\psi^2}{2cr^2} + U(r), \tag{40}$$

où $U_a(r, p_\psi)$ est *le potentiel amendé.* Les points critiques de ce potentiel correspondent aux rayons des orbites circulaires. On a

$$\frac{\partial U_a}{\partial r} = -\frac{p_\psi^2}{cr^3} + fM\left(M_G - M_L\right)\frac{1}{r^2} = 0$$

d'où l'on déduit

$$r = \frac{p_\psi^2}{cfM\left(M_G - M_L\right)} = \left(\frac{fM\left(M_G - M_L\right)}{c\dot{\psi}^2}\right)^{1/3}, \tag{41}$$

ou bien, sous la forme "de la loi de Kepler"

$$r^3\dot{\psi}^2 = \frac{fM\left(M_G - M_L\right)}{c}$$

d'où résultent la relation entre le rayon de l'orbite, les masses et les masses ajoutées.

Au lieu du temps on peut utiliser *l'anomalie vrai* ψ comme variable indépendante. Dans le cas de l'orbite elliptique ce changement permet de trouver l'équation de l'orbite

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\psi} \tag{42}$$

où p et e sont respectivement le paramètre et l'excentricité de l'ellipse. Par substitution de (42) dans (39) on obtient l'équation, appelée *équation de Kepler*, déterminant ψ en fonction du temps t. Sauf dans le cas du mouvement circulaire, la solution de cette équation ne peut être exprimée à l'aide des fonctions élémentaires. Pour éviter cette résolution sous la forme explicite on fait parfois ainsi le changement de variable du temps dans les équations décrivant le changement de l'orientation du corps.

3 Dynamique du système par rapport au repère mobile.

Considérons maintenant un repère orbital $NX_1'X_2'X_3'$ qui tourne autour l'axe NX_2' coïncidant avec l'axe NX_2. Soient NX_3' l'axe dirigé selon le vecteur $\overrightarrow{NC}$, l'axe NX_2' orthogonal au plan de l'orbite, l'axe NX_1' se trouvant dans le plan de l'orbite et complétant NX_3' et NX_2'. Soient

$$\boldsymbol{\alpha}' = (\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3'), \qquad \boldsymbol{\beta}' = (\beta_1', \beta_2', \beta_3'), \qquad \boldsymbol{\gamma}' = (\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3'),$$

les vecteurs unitaires de ce repère. Alors

$$\boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha}\cos\psi - \boldsymbol{\gamma}\sin\psi, \qquad \boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\beta}, \qquad \boldsymbol{\gamma}' = \boldsymbol{\alpha}\sin\psi + \boldsymbol{\gamma}\cos\psi$$

Dans le cas général du mouvement elliptique ce repère ne tourne pas uniformément. Considérons seulement le cas du mouvement circulaire ; la vitesse angulaire orbitale est alors $\dot{\psi} = \mathit{conste}$. Soit $\mathbf{\Omega}$ la vitesse angulaire relative au repère $NX_1'X_2'X_3'$; cette vitesse et la vitesse angulaire absolue $\boldsymbol{\omega}$ sont reliées par :

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{\Omega} + \dot{\psi}\boldsymbol{\beta} \tag{43}$$

Posons

$$\pounds(\mathbf{\Omega}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = \mathcal{L}(\mathbf{\Omega} + \dot{\psi}\boldsymbol{\beta}, r\boldsymbol{\gamma})$$

Ici et dans la suite de cette section et dans la section suivante les primes sont supprimés. On a

$$\frac{\partial \pounds}{\partial \mathbf{\Omega}} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\omega}}, \qquad \frac{\partial \pounds}{\partial \boldsymbol{\beta}}\dot{\psi}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\omega}}, \qquad \frac{\partial \pounds}{\partial \boldsymbol{\gamma}} r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}}.$$

D'où en vertu des équations (37)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial \pounds}{\partial \mathbf{\Omega}} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \times \left(\mathbf{\Omega} + \dot{\psi}\boldsymbol{\beta}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial \pounds}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times (r\boldsymbol{\gamma}) \\ &= \frac{\partial \pounds}{\partial \mathbf{\Omega}} \times \mathbf{\Omega} + \frac{\partial \pounds}{\partial \boldsymbol{\beta}} \times \boldsymbol{\beta} + \frac{\partial \pounds}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma}. \end{aligned} \tag{44}$$

La fonction de Lagrange pour le problème considéré est de la forme

$$\begin{aligned} \pounds &= \frac{1}{2}\left(A\left(\mathbf{\Omega} + \dot{\psi}\boldsymbol{\beta}\right), \mathbf{\Omega} + \dot{\psi}\boldsymbol{\beta}\right) - \frac{\kappa}{r^3}(\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}) + \dot{\psi}(\mathbf{A}\mathbf{\Omega}, \boldsymbol{\beta}) + \frac{\dot{\psi}^2}{2}(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) - \frac{K}{2}(\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}), \quad K = \frac{\kappa}{r^3} \end{aligned} \tag{45}$$

Les équations de Poisson pour le repère $NX_1'X_2'X_3'$ sont

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\Omega}, \qquad \dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\Omega}, \qquad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\Omega}. \tag{46}$$

D'après ces équations, les équations d'Euler - Lagrange - Poincaré

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\boldsymbol{\Omega} + \dot{\psi}\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}) = (\mathbf{A}\boldsymbol{\Omega} + \dot{\psi}\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\Omega} + (\mathbf{A}\dot{\psi}\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{A}\dot{\psi}^2\boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\beta} - K\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}$$

prennent la forme

$$\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} + \dot{\psi}\left[\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{A}\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\beta} - \mathbf{A}\left(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\Omega}\right)\right] + \dot{\psi}^2\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta} - K\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma} \tag{47}$$

A part les intégrales géométriques

$$\begin{array}{ccc} J_{\alpha\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) - 1 = 0, & J_{\beta\beta} = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) - 1 = 0, & J_{\gamma\gamma} = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) - 1 = 0, \\ J_{\alpha\beta} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = 0, & J_{\beta\gamma} = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = 0, & J_{\gamma\alpha} = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}) = 0, \end{array} \tag{48}$$

le système (46) et (47) possède une intégrale de l'énergie - Painlevé - Jacobi

$$\mathcal{J}_I = \left(\frac{\partial \pounds}{\partial \boldsymbol{\Omega}}, \boldsymbol{\Omega}\right) - \pounds = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}\right) + \left[\frac{K}{2}\left(\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}\right) - \frac{\dot{\psi}^2}{2}\left(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}\right)\right]. \tag{49}$$

La fonction

$$U_a(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = -\pounds(0, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = -\frac{\dot{\psi}^2}{2}\left(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}\right) + \frac{K}{2}\left(\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}\right) \tag{50}$$

est appelée *le potentiel augmenté* du système considéré. Pour l'intégrabilité complète des équations dans "l'approximation des satellites" et dans le cas de l'orbite circulaire il manque deux intégrales premières complémentaires, commutatives et indépendantes.

3.1 Equilibres relatifs dans le cadre de l'approximation des satellites.

Par la méthode de Routh on peut trouver des mouvements établis et étudier les conditions suffisantes de leur stabilité dans le cadre de “l'approximation des satellites”. Considérons la fonction de Routh

$$W = \mathcal{J}_I + \frac{\lambda}{2}\mathcal{J}_\beta + \frac{\mu}{2}\mathcal{J}_\gamma + \nu\mathcal{J}_{\beta\gamma}, \tag{51}$$

et posons

$$\tau = r^3\dot{\psi}^2/\kappa = \dot{\psi}^2/K.$$

Puisque le vecteur $\boldsymbol{\alpha}$ n'intervient pas dans la fonction de Lagrange, les intégrales avec $\boldsymbol{\alpha}$ ne sont pas introduites dans cette combinaison linéaire. Les points critiques de la fonction (51) correspondent aux mouvements établis du système considéré et peuvent être déduites des équations

$$\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\Omega}} = \frac{\partial^2 \pounds}{\partial \boldsymbol{\Omega}^2}\boldsymbol{\Omega} + \frac{\partial \pounds}{\partial \boldsymbol{\Omega}} - \frac{\partial \pounds}{\partial \boldsymbol{\Omega}}\frac{\partial^2 \pounds}{\partial \boldsymbol{\Omega}^2}\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Omega} = 0, \tag{52}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{\partial^2 \pounds}{\partial \boldsymbol{\beta}\partial \boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{\Omega} - \frac{\partial \pounds}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \lambda\boldsymbol{\beta} + \nu\boldsymbol{\gamma}\frac{\partial U_a}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \lambda\boldsymbol{\beta} + \nu\boldsymbol{\gamma} = 0, \tag{53}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = \frac{\partial^2 \pounds}{\partial \boldsymbol{\gamma}\partial \boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{\Omega} - \frac{\partial \pounds}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + \nu\boldsymbol{\beta} + \mu\boldsymbol{\gamma}\frac{\partial U_a}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + \nu\boldsymbol{\beta} + \mu\boldsymbol{\gamma} = 0. \tag{54}$$

Pour déterminer les équilibres il faut éliminer les multiplicateurs de Lagrange de ces équations.

Si, comme c'est le cas en mécanique, la matrice $\dfrac{\partial^2 \pounds}{\partial \mathbf{\Omega}^2} = \mathbf{A}$ est non dégénérée, l'équation (52) admet toujours la solution unique $\mathbf{\Omega} = 0$. Du point de vue cinématique, l'égalité $\mathbf{\Omega} = 0$ signifie que, pour les mouvements établis, le système est immobile par rapport au repère $NX_1'X_2'X_3'$, c'est-à-dire que le système est *en équilibre relativement* au repère tournant uniformément ; de tels mouvements sont des *équilibres relatifs.*

Des équations (53) et (54) on déduit

$$
\begin{aligned}
-\dot{\psi}^2 \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} + \lambda\boldsymbol{\beta} + \nu\boldsymbol{\gamma} &= \left(\lambda\mathbf{E} - \dot{\psi}^2\mathbf{A}\right)\boldsymbol{\beta} + \nu\boldsymbol{\gamma} = 0 && (55)\\
K\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma} + \nu\boldsymbol{\beta} + \mu\boldsymbol{\gamma} &= (K\mathbf{D} + \mu\mathbf{E})\boldsymbol{\gamma} + \nu\boldsymbol{\beta} = 0 && (56)
\end{aligned}
$$

En multipliant scalairement la première équation par $\boldsymbol{\gamma}$ et la deuxième équation par $\boldsymbol{\beta}$ on obtient

$$\nu = \dot{\psi}^2(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = -K(\mathbf{D}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}). \tag{57}$$

En multipliant scalairement la première équation par $\boldsymbol{\beta}$ et la deuxième équation par $\boldsymbol{\gamma}$ on obtient

$$\lambda = \dot{\psi}^2(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}), \qquad \mu = -K(\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}). \tag{58}$$

Néanmoins, ce procédé d'élimination des multiplicateurs de Lagrange ne donne aucune possibilité d'obtenir un sous-système fermé par rapport à $\boldsymbol{\beta}$ ou bien $\boldsymbol{\gamma}$. Pour ce faire, on peut profiter de l'approche exposée dans [76] pour obtenir une condition nécessaire sur $\boldsymbol{\gamma}$ ou sur $\boldsymbol{\beta}$. En L'équation (55) s'exprime aussi par

$$\left(\dot{\psi}^2\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\right)\boldsymbol{\beta} = \nu\boldsymbol{\gamma}.$$

Le produit scalaire des parties gauche et droite, l'unicité de $\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{\gamma}$ et l'expression pour λ_β de (58) impliquent que

$$
\begin{aligned}
\nu &= \varepsilon_1 \left(\left(\dot{\psi}^2\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\right)\boldsymbol{\beta}, \left(\dot{\psi}^2\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\right)\boldsymbol{\beta}\right)^{1/2}\\
&= \varepsilon_1 \left(\lambda^2 - 2\lambda\dot{\psi}^2(A\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) + \dot{\psi}^4(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}, \mathbf{A}\boldsymbol{\beta})\right)^{1/2}\\
&= \varepsilon_1\dot{\psi}^2\left((\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})^2 - (\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}, \mathbf{A}\boldsymbol{\beta})\right)^{1/2}\\
&= \varepsilon_1\dot{\psi}^2\left(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}, \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}\right)^{1/2}, \quad \varepsilon_1 = \pm 1. && (59)
\end{aligned}
$$

Alors, d'après la même équation

$$\boldsymbol{\gamma} = \varepsilon_1\left(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}, \mathbf{A}\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}\right)^{-1/2}\left(\mathbf{A} - (\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})\mathbf{E}\right)\boldsymbol{\beta} \tag{60}$$

si $\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}$ n'est pas colinéaire à $\boldsymbol{\beta}$ ou bien si $\nu \neq 0$. En utilisant (56) on trouve de même que

$$\nu = \varepsilon_2 K\left(\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{D}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}\right)^{1/2}, \quad \varepsilon_2 = \pm 1, \tag{61}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \varepsilon_2 \mathrm{sign} K\left(\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{D}\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}\right)^{-1/2}\left((\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma})\mathbf{E} - \mathbf{D}\right)\boldsymbol{\gamma}. \tag{62}$$

Par substitution de (62) en (60) on obtient une équation du type

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma} = \mathcal{C}(\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma},$$

ou bien

$$(\mathcal{B}(\boldsymbol{\gamma}) - \mathcal{C}(\boldsymbol{\gamma}))\boldsymbol{\gamma} = 0.$$

Donc $\boldsymbol{\gamma}$ doit être un vecteur du noyau de la matrice $(\mathcal{B}(\boldsymbol{\gamma}) - \mathcal{C}(\boldsymbol{\gamma}))$ et l'existence de la solution nécessite que $\det(\mathcal{B}(\boldsymbol{\gamma}) - \mathcal{C}(\boldsymbol{\gamma})) = 0$, ce qui revient à dire que les solutions sont localisées sur une surface dans l'espace $\boldsymbol{\gamma}$. De plus, ces solutions sont dans l'intersection de cette surface avec la sphère d'équation $\boldsymbol{\gamma}^2 - 1 = 0$.

On peut obtenir des conditions analogues sur $\boldsymbol{\beta}$ en substituant (60) dans (62).

Bien entendu, les solutions stationnaires peuvent être déduites directement du système des équations de mouvement relatif. En posant $\Omega = 0$ dans (47) on obtient le système d'équations algébriques

$$\dot{\psi}^2 \mathbf{A}.\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta} = K\mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma} \tag{63}$$

expriment le bilan du moment des forces actives et du moment des forces centrifuges. Les projections de ces moments sur les axes du repère orbitale s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\psi}^2(\mathbf{A}.\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) & = & K(\mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}) \\ \dot{\psi}^2(\mathbf{A}.\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) & = & K(\mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) \\ \dot{\psi}^2(\mathbf{A}.\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) & = & K(\mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) \end{array} \right.$$

En utilisant les égalités $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$ et les propriétés du produit mixte on obtient

$$\left\{ \begin{array}{ccc} -\dot{\psi}^2(\mathbf{A}.\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) & = & K(\mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) \\ 0 & = & -K(\mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\alpha}) \\ \dot{\psi}^2(\mathbf{A}.\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) & = & 0 \end{array} \right.$$

On voit que les deuxième et troisième équations coïncident respectivement avec les équations (55) et (56). La première équation équivalent à l'équation (57). Notons que les prolongements de la méthode de Routh, comme la construction de fonctions de Lyapunov, permettent d'obtenir des conditions suffisantes de stabilité et d'instabilité des mouvements stationnaires ou de validité des approxiamtions linéarisées des équations dynamiques.

3.2 Traitement du point de vue de la géométrie algébrique.

Des équations (53) et (54) on déduit le système complet qui détermine les mouvements stationnaires :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\lambda\mathbf{E} - \dot{\psi}^2\mathbf{A}\right)\boldsymbol{\beta} + \nu\boldsymbol{\gamma} = 0, \\ (K\mathbf{D} + \mu\mathbf{E})\,\boldsymbol{\gamma} + \nu\boldsymbol{\beta} = 0, \\ (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) = 1, \\ (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \\ (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = 0. \end{array} \right.$$

et ce système *équivaut* à :

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{A}.\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}) = 0, \\ (\mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}) = 0, \\ (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \\ (\mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) + \tau(\mathbf{A}.\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \end{array} \right.$$

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) = 1, \\ (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1, \end{array} \right.$$

et

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \dot{\psi}^2(\mathbf{A}.\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}), \\ \mu = -K(\mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}), \\ \nu = \dot{\psi}^2(\mathbf{A}.\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}), \\ \ \text{(ou bien } \nu = -K(\mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta})\text{)}. \end{array} \right.$$

En effet, si les trois dernières équations de (S) sont satisfaites, pour que $\mathbf{A}.\boldsymbol{\beta}$ (resp. $\mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma}$) soit dans le plan engendré par $\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{\gamma}$, il faut et il suffit que $\mathbf{A}.\boldsymbol{\beta}$ (resp. $\mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma}$) soit orthogonal à $\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}$. Pour que la valeur de ν soit la même dans les deux premières équations il faut et il suffit que la quatrième équation de (I) soit satisfaite.

Le système (I) est homogène et, pour chaque solution non nulle $\boldsymbol{\beta} \neq 0$, $\boldsymbol{\gamma} \neq 0$ de ce système, on peut construire une solution de (I) et (II) en normant ces vecteurs. Le système (III) donne alors la valeur des multiplicateurs de Lagrange. En définitive, la condition nécessaire et suffisante d'existence des solutions de (S) est l'existence de solutions non nulles de (I) et ces solutions déterminent celles du système complet (S).

La condition nécessaire et suffisante d'existence des mouvements stationnaire est donc : **il existe des vecteurs normés et orthogonaux $\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{\gamma}$ tels que $\mathbf{A}.\boldsymbol{\beta}$ et $\mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma}$ soient dans le plan de $\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{\gamma}$ et**

$$(\mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) = -\tau(\mathbf{A}.\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}).$$

La première condition détermine l'orientation du corps par rapport au plan de l'orbite et au centre d'attraction N, la seconde condition détermine le paramètre τ, c'est-à-dire la relation entre la vitesse angulaire et le rayon de l'orbite qui doit être satisfaite pour permettre un mouvement stationnaire avec cette orientation du corps.

Il résulte du système (I) que $(\mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta})$ et $(\mathbf{A}.\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ sont simultanément nuls où simultanément non nuls (on suppose $\tau \neq 0$). Les solutions sont donc de deux types (précisons que par “axes principaux d'inertie” on entend ici les directions propres de $\mathbf{A} = \mathbf{I}_G + \mathbf{A}_L$, c'est-à-dire que l'inertie comporte à la fois l'inertie du corps et l'inertie induite par le liquide) :

Solutions de première espèce : $\boldsymbol{\beta}$ n'est pas un vecteur propre de $\mathbf{A}$ et $\boldsymbol{\gamma}$ n'est pas un vecteur propre de $\mathbf{D}$ (et $(\mathbf{A}.\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) \neq 0$, $(\mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) \neq 0$).

Pour chacune de ces solutions, les axes principaux d'inertie sont en position générale par rapport au vecteur normal au plan de l'orbite $\boldsymbol{\beta}$ et au vecteur $\overrightarrow{NC}$ (éventuellement orientés dans des plans principaux mais pas selon des axes principaux) et la valeur du produit $r^3\dot{\psi}^2$ est fixée (ce qui établit une relation entre le rayon de l'orbite et la vitesse angulaire.)

Solutions de seconde espèce : $\boldsymbol{\beta}$ est un vecteur propre de $\mathbf{A}$ et $\boldsymbol{\gamma}$ est un vecteur propre de $\mathbf{D}$, τ est un nombre quelconque (et $(\mathbf{A}.\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = (\mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) = 0$). Pour ces solutions une direction principale d'inertie est orientée selon le vecteur normal au plan de l'orbite et une direction principale de $\mathbf{D}$ est orientée selon le vecteur $\overrightarrow{NC}$ et les valeurs du rayon de l'orbite et de la vitesse angulaire sont arbitraires.

Compte tenu de la symétrie de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$ et des propriétés du produit mixte, le système (I) peut être exprimé sous l'une ou l'autre des deux formes :

$$(I') \quad \begin{cases} (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \\ (\mathbf{A}.\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \\ (\mathbf{D}.\boldsymbol{\beta} + \tau\mathbf{A}.\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = 0, \\ (\mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}) = 0. \end{cases} \qquad (I'') \quad \begin{cases} (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) = 0, \\ (\mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) = 0, \\ (\mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma} + \tau\mathbf{A}.\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}) = 0, \\ (\mathbf{A}.\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}) = 0. \end{cases}$$

L'existence de $\boldsymbol{\gamma} \neq 0$ vérifiant (I'), c'est-à-dire orthogonal à trois vecteurs donnés, nécessite que

$$(\boldsymbol{\beta}; \mathbf{A}.\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}; \mathbf{D}.\boldsymbol{\beta} + \tau\mathbf{A}.\boldsymbol{\beta}) = 0,$$

et une solution $\boldsymbol{\gamma}$ est alors donnée par

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{A}.\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}), \tag{64}$$

(les autres solutions s'en déduisant par multiplication par un facteur non nul, qui peut être utilisé pour normaliser $\boldsymbol{\gamma}$). La condition pour que $\boldsymbol{\gamma}$ vérifie la quatrième équation est

$$(\mathbf{D}(\boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{A}.\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta})), \mathbf{A}.\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}) = 0.$$

(en remarquant que $\boldsymbol{\beta} \times (\boldsymbol{\beta} \times (\mathbf{A}.\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta})) = -(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})\mathbf{A}.\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}$ et en simplifiant par $-(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta})$).

En définitive, pour que (I) ait des solutions non nulles il faut et il suffit (en tenant compte de la symétrie de $\mathbf{D}$) que :

$$\left\{\begin{array}{l} \big(\beta \times (\mathbf{A}.\beta \times \beta), \mathbf{D}.(\mathbf{A}.\beta \times \beta)\big) = 0, \\ \\ \big(\mathbf{D}.\beta \times \beta, \mathbf{A}.\beta \times \beta\big) + \tau\big(\mathbf{A}.\beta \times \beta\big)^2 = 0. \end{array}\right. \tag{65}$$

et pour chaque solution de ce système $\boldsymbol{\gamma}$ est déterminé (à un facteur près) par (70).

La première équation (65) représente, dans l'espace des $\boldsymbol{\beta}$, un cône du cinquième degré qui contient les directions principales d'inertie du corps. A chaque vecteur non nul $\boldsymbol{\beta}$ (que l'on peut supposer normalisé) appartenant à ce cône *et qui n'est pas dirigé selon une direction principale d'inertie* correspond une solution de première espèce $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \tau)$ (et une base orthonormée directe $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$ avec $\boldsymbol{\alpha}$ de même direction que $A(\boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\beta}$). Par contre, les vecteurs $\boldsymbol{\beta}$ dirigés selon les directions principales peuvent être ou non des solutions, nécessairement de seconde espèce. *L'intersection de ce cône avec la sphère* $(\beta, \beta) = 1$ *est composée par les courbes déterminant les positions possibles des axes dans l'espace* β.

Un raisonnement analogue à partir du système (I'') est bien entendu possible en échangeant les rôles de $\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{\gamma}$. L'existence de $\boldsymbol{\beta} \neq 0$ nécessite que $(\boldsymbol{\gamma}; \mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}; \mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma} + \tau \mathbf{A}.\boldsymbol{\gamma}) = 0$ et une solution est $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma} \times (\mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma})$. Pour que cette solution satisfasse la quatrième équation il faut et il suffit que $(\boldsymbol{\gamma} \times (\mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}), \mathbf{A}(\mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma})) = 0$. Le système déterminant $\boldsymbol{\gamma}$ est donc analogue à celui qui détermine $\boldsymbol{\beta}$:

$$\left\{\begin{array}{l} (\boldsymbol{\gamma} \times (\mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}), \mathbf{A}(\mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma})) = 0, \\ \\ (\mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma})^2 + \tau(\mathbf{A}.\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{D}.\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma}) = 0. \end{array}\right. \tag{66}$$

3.2.1 Forme explicite des équations déterminant β

L'étude du cône qui vient d'être mis en évidence est équivalente à celle d'une courbe du plan projectif. Pour exprimer plus explicitement les équation (65), choisissons un repère principal d'inertie $\{G; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ du solide (en supposant la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ orthonormée et d'orientation directe) :

$$\mathbf{A}(\mathbf{e}_k) = a_k \mathbf{e}_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

et, soient d_{ij} les termes de la matrice de $\mathbf{D}$ dans ce repère :

$$d_{ij} = (\mathbf{D}.\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{D}.\mathbf{e}_j) \;\text{ pour }\; i, j = 1, 2, 3.$$

Si l'on pose

$$\beta = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3,$$

alors

$$\begin{gathered} \mathbf{A}.\beta = x_1 a_1\, \mathbf{e}_1 + x_2 a_2\, \mathbf{e}_2 + x_3 a_3\, \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{A}.\beta \times \beta = C_1 x_2 x_3 \mathbf{e}_1 + C_2 x_3 x_1 \mathbf{e}_2 + C_3 x_1 x_2 \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{D}\big(\mathbf{A}.\beta \times \beta\big) = C_1 x_2 x_3 \mathbf{D}\,(\mathbf{e}_1) + C_2 x_3 x_1 \mathbf{D}\,(\mathbf{e}_2) + C_3 x_1 x_2 \mathbf{D}\,(\mathbf{e}_3)\,, \\ \boldsymbol{\beta} \times \big(A(\boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\beta}\big) x_1 P_1(x)\, \mathbf{e}_1 + x_2 P_2(x)\, \mathbf{e}_2 + x_3 P_3(x)\, \mathbf{e}_3, \end{gathered}$$

où l'on a posé :

$$\begin{gathered} C_1 = a_3 - a_2, \quad C_2 = a_1 - a_3, \quad C_3 = a_2 - a_1, \\ P_1(x) = C_3 x_2^2 - C_2 x_3^2, \quad P_2(x) = C_1 x_3^2 - C_3 x_1^2, \quad P_3(x) = C_2 x_1^2 - C_1 x_2^2. \end{gathered}$$

Les équations (65) équivalent donc au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1x_2x_3R(x)+d_{23}x_1Q_1(x)+d_{31}x_2Q_2(x)+d_{12}x_3Q_3(x)=0,\\[2ex] \tau\big(C_1^2(x_2x_3)^2+C_2^2(x_3x_1)^2+C_3^2(x_1x_2)^2\big)+G(x)=0,\end{array}\right. \tag{67}$$

Pour chaque solution de la première équation (67) qui n'est pas une direction principale d'inertie les valeurs de τ et de $\boldsymbol{\gamma}$ sont ensuite déterminées par la seconde équation et par :

$$\boldsymbol{\gamma}=\rho(x_1P_1(x)\,\mathbf{e}_1+x_2P_2(x)\,\mathbf{e}_2+x_3P_3(x)\,\mathbf{e}_3)$$

où ρ est un facteur de normalisation. Notons que l'on peut démontrer que les équations $x_1P_1(x)=0$, $x_2P_2(x)=0$, $x_3P_3(x)=0$ n'ont en général pas d'autre solution réelle que $x_1=x_2=x_3=0$.

Dans (67), on a posé :

$$R(x)=d_{11}C_1P_1(x)+d_{22}C_2P_2(x)+d_{33}C_3P_3(x),$$

$$\left\{\begin{array}{l} Q_1(x)=C_3x_2^2P_2(x)+C_2x_3^2P_3(x),\\ Q_2(x)=C_1x_3^2P_3(x)+C_3x_1^2P_1(x),\\ Q_3(x)=C_2x_1^2P_1(x)+C_1x_2^2P_2(x),\end{array}\right.$$

$$G(x)=d_{11}x_1^2P_1(x)+d_{22}x_2^2P_2(x)+d_{33}x_3^2P_3(x)+$$

$$+d_{12}x_1x_2\big(P_1(x)+P_2(x)\big)+d_{23}x_2x_3\big(P_2(x)+P_3(x)\big)+d_{31}x_3x_1\big(P_3(x)+P_1(x)\big).$$

Plus explicitement on a :

$$R(x)(d_{33}-d_{22})C_2C_3x_1^2+(d_{11}-d_{33})C_3C_1x_2^2+(d_{22}-d_{11})C_1C_2x_3^2,$$

$$\left\{\begin{array}{l} Q_1(x)=C_1(C_3-C_2)\,x_2^2x_3^2+C_2^2x_3^2x_1^2-C_3^2x_1^2x_2^2,\\ Q_2(x)=C_2(C_1-C_3)\,x_3^2x_1^2+C_3^2x_1^2x_2^2-C_1^2x_2^2x_3^2,\\ Q_3(x)=C_3(C_2-C_1)\,x_1^2x_2^2+C_1^2x_2^2x_3^2-C_2^2x_3^2x_1^2,\end{array}\right.$$

$$G(x)\left\{\begin{array}{l} C_1(d_{22}-d_{33})(x_2x_3)^2+d_{23}x_2x_3\big((C_2-C_3)x_1^2+C_1(x_3^2-x_2^2)\big),\\ C_2(d_{33}-d_{11})(x_3x_1)^2+d_{31}x_3x_1\big((C_3-C_1)x_2^2+C_2(x_1^2-x_3^2)\big),\\ C_3(d_{11}-d_{22})(x_1x_2)^2+d_{12}x_1x_2\big((C_1-C_2)x_3^2+C_3(x_2^2-x_1^2)\big).\end{array}\right.$$

Le système (67) est formé de deux équations homogènes du cinquième et du quatrième degré représentant deux courbes algébriques projectives. Si, comme on le fait ici, l'on considère que τ est une inconnue du problème alors, chaque point de la courbe du cinquième degré qui diffère d'un axe principal d'inertie représente une orientation relative du corps par rapport à la normale à l'orbite et au centre d'attraction permettant un mouvement stationnaire avec une valeur déterminée de τ.

Par contre, si τ était donné, ce qui serait le cas si l'on considérait un problème de Cauchy, les orientations initiales du corps dans l'espace qui permettent un mouvement stationnaire avec cette valeur de τ seraient définies par les points d'intersection des deux courbes algébriques, ce qui conduit à un problème du vingtième degré dont il faut discuter l'existence et le nombre de solutions réelles ce qui est beaucoup plus difficile.

3.2.2 Solutions particulières.

1) Solutions de seconde espèce.

Comme on l'a vu, tout couple $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$ de vecteurs normés orthogonaux et qui sont respectivement vecteurs propres de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$, définit avec τ quelconque, une solution du système (S) pour laquelle les multiplicateurs de Lagrange sont (a et d désignant les valeurs propres) :

$$\lambda=\dot{\psi}^2a,\quad \mu=-Kd,\quad \nu=0.$$

Notons que les conditions d'existence d'un vecteur propre $\boldsymbol{\gamma}$ de $\mathbf{D}$ orthogonal au vecteur propre $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ou $\mathbf{e}_3$ de $\mathbf{A}$ sont respectivement :

$$\begin{array}{ll} (1) & (d_{33} - d_{22})d_{31}d_{12} + d_{32}(d_{12}^2 - d_{31}^2) = 0, \\ (2) & (d_{11} - d_{33})d_{12}d_{23} + d_{13}(d_{23}^2 - d_{12}^2) = 0, \\ (3) & (d_{22} - d_{11})d_{23}d_{31} + d_{21}(d_{31}^2 - d_{23}^2) = 0. \end{array} \qquad (68)$$

Lorsqu'une de ces conditions est satisfaite il existe une solution de seconde espèce.

Prouvons, par exemple que la seconde condition est nécessaire et suffisante pour que le vecteur $\boldsymbol{\gamma}$, supposé orthogonal à $\mathbf{e}_2$, soit un vecteur propre de la matrice $\mathbf{D}$ associé à la valeur propre d. On doit avoir

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

soit le système

$$\begin{cases} (d_{11} - d)\sin\theta + d_{13}\cos\theta = 0, \\ d_{12}\sin\theta + d_{23}\cos\theta = 0, \\ d_{13}\sin\theta + (d_{33} - d)\cos\theta = 0. \end{cases}$$

Lorsque $d_{12} = d_{23} = 0$ il est toujours possible de trouver d et θ vérifiant le système. Lorsque un au moins des nombres d_{12} et d_{23} est non nul, la seconde équation équivaut à

$$\exists k \neq 0 \ \text{ tel que } \ \sin\theta = k d_{23}, \quad \cos\theta = -k d_{12}.$$

Il existe toujours une solution k et θ est ensuite déterminé par :

$$\sin\theta = \pm\frac{d_{23}}{D_1}, \qquad \cos\theta = \mp\frac{d_{12}}{D_1}, \qquad D_1 = \left(d_{23}^2 + d_{12}^2\right)^{1/2}. \qquad (69)$$

Après simplification par k, les première et troisième équations du système donnent alors :

$$\begin{cases} (d_{11} - d)d_{23} - d_{13}d_{12} = 0, \\ d_{13}d_{23} - (d_{33} - d)d_{12} = 0. \end{cases}$$

En éliminant d, on obtient la condition nécessaire et suffisante d'existence de θ et d (qui, remarquons le, contient le cas $d_{12} = d_{23} = 0$) :

$$(d_{11} - d_{33})d_{12}d_{23} + d_{13}(d_{23}^2 - d_{12}^2) = 0.$$

2) Solutions telles que $x_1 = 0$.

Ces solutions sont telles qu'un axe principal d'inertie (disons $(G\,;\mathbf{e}_1)$) reste tangent à l'orbite (circulaire), le plan $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ est donc un plan principale d'inertie. L'inclinaison du corps par rapport au plan de l'orbite est alors déterminée par la matrice $\mathbf{D}$. Les solutions de (67) telles que $x_1 = 0$ sont déterminées par

$$x_2^2 x_3^2 (a_3 - a_2)^2 \big(d_{12}x_3 - d_{31}x_2\big) = 0.$$

Lorsque $\mathbf{e}_1$ n'est pas un vecteur propre de $\mathbf{D}$, d_{12} et d_{31} ne sont pas tous deux nuls et il existe alors cinq solutions $\boldsymbol{\beta}$ dans le plan $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$: une solution de première espèce de la forme

$$\boldsymbol{\beta} = \rho(0, d_{12}, d_{31}) \quad \text{avec } \ \boldsymbol{\gamma} = \rho(0, -d_{31}, d_{12})$$

où ρ est un facteur de normalisation, et les solutions $\boldsymbol{\beta} = \pm\mathbf{e}_2$ et $\boldsymbol{\beta} = \pm\mathbf{e}_3$ avec la multiplicité 2, qui sont éventuellement des solutions de seconde espèce du problème.

Lorsque $\mathbf{e}_1$ est un vecteur propre commun à $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$ on a $d_{12} = d_{31} = 0$, la courbe du cinquième degré est décomposée en une droite et une courbe du quatrième degré, et tous les couples $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ de vecteurs orthogonaux appartenant au plan $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, c'est-à-dire tels que $x_3 = 0$, sont des solutions de (67) ; les points $\boldsymbol{\beta}$ différents de $\pm\mathbf{e}_2$ et $\pm\mathbf{e}_3$ sont des solutions de première espèce, $\pm\mathbf{e}_2$ et $\pm\mathbf{e}_3$ sont éventuellement des solutions de seconde espèce.

3) Cas où les matrices **A** et **D** sont simultanément diagonalisables

Nous considérerons le cas où les valeurs propres a_1, a_2, a_3 de **A** d'une part et d_1, d_2, d_3 de **D** d'autre part sont deux à deux distinctes (ce qui entraîne en particulier que C_i est non nul pour $i = 1, 2, 3$) ; sans restreindre la généralité, on peut supposer que

$$a_1 < a_2 < a_3.$$

Les équations (67) se réduisent alors à

$$\begin{cases} x_1 x_2 x_3 R(x) = 0, \\ [C_1(d_2 - d_3) + \tau C_1^2](x_2 x_3)^2 + [C_2(d_3 - d_1) + \tau C_2^2](x_3 x_1)^2 + [C_3(d_1 - d_2) + \tau C_3^2](x_1 x_2)^2 = 0. \end{cases} \tag{70}$$

La courbe du cinquième degré est donc décomposée en trois droites d'équations respectives

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0,$$

et une conique, non dégénérée vu les hypothèses faites sur les valeurs propres, d'équation :

$$(d_3 - d_2) C_2 C_3 x_1^2 + (d_1 - d_3) C_3 C_1 x_2^2 + (d_2 - d_1) C_1 C_2 x_3^2 = 0, \tag{71}$$

(dont les trois droites constituent un triangle conjugué). L'étude des signes des coefficients de (71) montre que :

1. Lorsque $d_1 < d_2 < d_3$ ou bien $d_3 < d_2 < d_1$, la conique est imaginaire et les seules solutions sont les couples $(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ dans des plans principaux d'inertie.
2. Lorsque $d_1 < d_3 < d_2$ ou bien $d_2 < d_3 < d_1$, la conique est réelle et ne coupe pas la droite $x_1 = 0$ (en des points réels) et coupe les droites $x_2 = 0$ et $x_3 = 0$ en des points doubles de la courbe du cinquième degré. Aux solutions du cas 1) s'ajoutent donc les $\boldsymbol{\beta}$ appartenant à un cône du second ordre qui coupe chacun des plans principaux d'inertie orthogonaux à $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$.
3. Lorsque $d_2 < d_1 < d_3$ ou bien $d_3 < d_1 < d_2$, aux solutions du cas 1) s'ajoutent les $\boldsymbol{\beta}$ appartenant à un cône du second ordre qui coupe chacun des plans principaux d'inertie orthogonaux à $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$.

REMARQUE

Il est possible de calculer les solutions des équations (70). L'équation (71) peut être exprimée sous la forme

$$(d_3 - d_2)\frac{x_1^2}{C_1} + (d_1 - d_3)\frac{x_2^2}{C_2} + (d_2 - d_1)\frac{x_3^2}{C_3} = 0,$$

une équations linéaire par rapport à $\frac{x_1^2}{C_1}$, $\frac{x_2^2}{C_2}$, $\frac{x_3^2}{C_3}$. Comme

$$\begin{cases} (d_3 - d_2) + (d_1 - d_3) + (d_2 - d_1) = 0, \\ (d_3 - d_2) d_1 + (d_1 - d_3) d_2 + (d_2 - d_1) d_3 = 0 \end{cases}$$

la conique peut être représentée paramétriquement à l'aide de deux paramètres u et v en posant

$$\left(\frac{x_1^2}{C_1}, \frac{x_2^2}{C_2}, \frac{x_3^2}{C_3}\right) = u(1,1,1) + v(d_1, d_2, d_3)$$

et, à chaque couple (u, v) correspondent en général quatre points - distincts ou confondus, réels ou imaginaires - sur la conique. En substituant ces expressions dans la seconde équation (70) il vient (après division par $C_1C_2C_3$) :

$$\big(d_2 - d_3 + \tau C_1\big)(u + vd_2)(u + vd_3) + \big(d_3 - d_1 + \tau C_2\big)(u + vd_3)(u + vd_1) +$$
$$\big(d_1 - d_2 + \tau C_3\big)(u + vd_1)(u + vd_2) = 0$$

ce qui, compte tenu de la relation $C_1 + C_2 + C_3 = 0$, se réduit à une relation de la forme

$$v\,(Pu + Qv) = 0.$$

avec

$$\begin{cases} P = \tau[C_1(d_2 + d_3) + C_2(d_3 + d_1) + C_3(d_1 + d_2)[, \\ \\ Q = d_2d_3(d_2 - d_3) + d_3d_1(d_3 - d_1) + d_1d_2(d_1 - d_2) + \tau\big(C_1d_2d_3 + C_2d_3d_1 + C_3d_1d_2\big). \end{cases}$$

Pour étudier les solutions (u, v) de cette équation, toujours sous l'hypothèse faite sur les valeurs propres de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$, on peut d'abord démontrer les propriétés suivantes :

1. *Pour que $P = 0$ il faut et il suffit qu'il existe des nombres réels $\lambda \neq 0$ et μ tels que $\mathbf{A} = \lambda\mathbf{D} + \mu\mathbf{E}$.*
2. *Pour que $P = Q = 0$ il faut et il suffit que la condition précédente soit satisfaite et que de plus $\tau\lambda = 1$.*

En effet, compte tenu de la définition des C_i, la relation $P = 0$ équivaut au système

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0, \quad C_1(d_2 + d_3) + C_2(d_3 + d_1) + C_3(d_1 + d_2) = 0,$$

ou encore à

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0, \quad C_1d_1 + C_2d_2 + C_3d_3 = 0.$$

Le vecteur (C_1, C_2, C_3) doit donc être orthogonal à deux vecteurs indépendants, c'est-à-dire qu'il existe un nombre $\lambda\,(\neq 0)$ tel que, $\times$ désignant le produit vectoriel :

$$(C_1, C_2, C_3) = \lambda(1, 1, 1) \times (d_1, d_2, d_3)$$

Mais on peut remarquer que $(C_1, C_2, C_3) = (1, 1, 1) \times (a_1, a_2, a_3)$, de sorte que cette condition s'écrit aussi

$$(1, 1, 1) \times [(a_1, a_2, a_3) - \lambda(d_1, d_2, d_3)] = 0,$$

et équivaut à l'existence d'un nombre μ tel que :

$$(a_1, a_2, a_3) - \lambda(d_1, d_2, d_3) = \mu(1, 1, 1).$$

La première propriété en résulte. Pour établir la seconde propriété il suffit d'exprimer Q en tenant compte du résultat précédent ; on a

$$Q = \big(d_2d_3(d_2 - d_3) + d_3d_1(d_3 - d_1) + d_1d_2(d_1 - d_2)\big)(1 - \tau\lambda) = (d_2 - d_1)(d_3 - d_2)(d_1 - d_3)(1 - \tau\lambda).$$

Les valeurs propres de $\mathbf{D}$ étant deux à deux distinctes, la condition $Q = 0$ équivaut donc à $\tau\lambda = 1$.

Revenons à l'étude des solutions du système (70) et notons d'abord que les solutions telles que $v = 0$ ne sont pas admissibles pour le problème mécanique posé vu qu'alors

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (C_1 + C_2 + C_3)u = 0$$

et qu'il n'existe donc pas de vecteur (réel) $\boldsymbol{\beta} \neq 0$. Les valeurs admissibles de (u, v) permettant de satisfaire les deux équations (70) sont donc :

- lorsque $P \neq 0$ (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de relation de la forme $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{D} + \mu \mathbf{E}$) :

$$u = -kQ, \quad v = kP, \quad k \in \mathbf{R}, \quad k \neq 0,$$

où k est déterminé de façon à normaliser $\boldsymbol{\beta}$. On obtient ainsi en général quatre solutions, admissibles si elles sont réelles, et les vecteurs $\boldsymbol{\beta}$ correspondants se déduisent de l'un d'entre eux par symétrie relativement aux plans principaux communs de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$.

- lorsque $P = Q = 0$: n'importe quel couple (u, v) avec $v \neq 0$ tel que $C_i(u + vd_i) \geq 0$ pour $i = 1, 2, 3$ (de façon à obtenir des solutions réelles) ; la conique déterminée par la première équation (70) est alors contenue dans la courbe du quatrième degré déterminée par la seconde équation et à chaque point (réel) de cette conique correspond donc une solution $\boldsymbol{\beta}$ et une valeur de τ déterminée.

3.3 Conditions suffisantes de stabilité des équilibres relatifs.

Etudions les conditions suffisantes de stabilité dans le cas simple où les tenseurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$ sont coaxiaux. Pour trouver les conditions suffisantes de stabilité il suffit d'étudier la signature de la restriction de la variation seconde de la fonction de Routh W sur la variété linéaire

$$\delta \mathcal{J} \big\{ (\delta \boldsymbol{\beta}, \delta \boldsymbol{\gamma}) \mid (\boldsymbol{\beta}, \delta \boldsymbol{\beta}) = 0, \quad (\boldsymbol{\gamma}, \delta \boldsymbol{\gamma}) = 0, \quad (\boldsymbol{\beta}, \delta \boldsymbol{\gamma}) + (\boldsymbol{\gamma}, \delta \boldsymbol{\beta}) = 0 \big\}.$$

La variation seconde, évaluée sur un équilibre relatif, peut être exprimée sous la forme

$$\begin{aligned} 2\delta^2 W &= \left(\frac{\partial^2 \pounds}{\partial \boldsymbol{\Omega}^2} \delta \boldsymbol{\Omega}, \delta \boldsymbol{\Omega} \right) + \left(\left(\frac{\partial^2 \pounds}{\partial \boldsymbol{\beta}^2} + \lambda \mathbf{E} \right) \delta \boldsymbol{\beta}, \delta \boldsymbol{\beta} \right) + \left(\left(\frac{\partial^2 \pounds}{\partial \boldsymbol{\gamma}^2} + \mu \mathbf{E} \right) \delta \boldsymbol{\gamma}, \delta \boldsymbol{\gamma} \right) + \\ &+ \quad 2 \left(\left(\frac{\partial^2 \pounds}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\gamma}} + \nu \mathbf{E} \right) \delta \boldsymbol{\gamma}, \delta \boldsymbol{\beta} \right) \end{aligned}$$

soit

$$2\delta^2 W \left(\mathbf{A} \delta \boldsymbol{\Omega}, \delta \boldsymbol{\Omega} \right) + \left(\left(\lambda \mathbf{E} - \dot{\psi}^2 \mathbf{A} \right) \delta \boldsymbol{\beta}, \delta \boldsymbol{\beta} \right) + \left(\left(\mu \mathbf{E} + K \mathbf{D} \right) \delta \boldsymbol{\gamma}, \delta \boldsymbol{\gamma} \right) + \nu \left(\delta \boldsymbol{\beta}, \delta \boldsymbol{\gamma} \right) \tag{72}$$

Sur les solutions les plus simples l'un des axes principaux des matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$ est dirigé selon $\boldsymbol{\beta}$ et un autre selon $\boldsymbol{\gamma}$. Alors, par exemple,

$$\boldsymbol{\alpha} = (\pm 1, 0, 0), \qquad \boldsymbol{\beta} = (0, \pm 1, 0), \qquad \boldsymbol{\gamma} = (0, 0, \pm 1).$$

Dans ce cas

$$\lambda = \dot{\psi}^2 a_2, \qquad \mu = -K d_3, \qquad \nu = 0,$$

et la variété linéaire est définie par les égalités

$$\delta \beta_2 = 0, \qquad \delta \gamma_3 = 0, \qquad \beta_2 \delta \gamma_2 + \gamma_3 \delta \beta_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta \gamma_2 = \pm \delta \beta_3 = \Delta \tag{73}$$

La restriction de la variation seconde à la variété linéaire donne alors

$$\begin{aligned} 2\delta^2 W \big|_{(73)} &= (A \delta \boldsymbol{\Omega}, \delta \boldsymbol{\Omega}) + \dot{\psi}^2 (a_2 - a_1) \delta \beta_1^2 + \dot{\psi}^2 (a_2 - a_3) \delta \beta_3^2 + \\ &+ K (d_1 - d_3) \delta \gamma_1^2 + K (d_2 - d_3) \delta \gamma_2^2 \\ &= (A \delta \boldsymbol{\Omega}, \delta \boldsymbol{\Omega}) + \dot{\psi}^2 (a_2 - a_1) \delta \beta_1^2 + K (d_1 - d_3) \delta \gamma_1^2 + \\ &+ \left[\dot{\psi}^2 (a_2 - a_3) \ + K (d_2 - d_3) \right] \Delta^2. \end{aligned} \tag{74}$$

Le premier terme est toujours positif d'après la positivité de l'énergie cinétique du système. Le deuxième terme est positif si

$$a_2 - a_1 > 0 \tag{75}$$

c'est-à-dire lorsque moment d'inertie généralisé par rapport à l'axe normal au plan de l'orbite est plus grand que le moment d'inertie généralisé par rapport à l'axe tangent à l'orbite. Le troisième terme est positif si

$$d_1 - d_3 > 0 \tag{76}$$

c'est-à-dire lorsque la valeur propre de la matrice $\mathbf{D}$ correspondant au vecteur propre dirigé selon la tangente est plus grande que la valeur propre de la matrice $\mathbf{D}$ correspondant au vecteur propre dirigé selon la verticale locale. La dernière condition de positivité définie est

$$\dot{\psi}^2 (a_2 - a_3) + K (d_2 - d_3) > 0. \tag{77}$$

L'annulation de l'un des membres de gauche de (75), (76) ou (77) provoque une bifurcation de la solution considérée. En particulier, la violation de la condition (77) implique la naissance des solutions du type (69). Si l'indice de la forme quadratique (74) c'est-à-dire le degré d'instabilité, est impair le mouvement considéré est instable. Si l'indice de cette forme est pair et non nul, alors il existe une possibilité de stabilisation gyroscopique, c'est-à-dire de stabilité en première approximation. Cette possibilité sera réalisée si toutes les racines de l'équation caractéristique sont purement imaginaires. Il faut noter que, d'après la théorie developpée dans [77], les mêmes conditions seront valables si on considère la stabilité des mouvements stationnaires, mais ces conditions douvent être complétées par les conditions appropriées sur le rayon de l'orbite.

3.3.1 Cas de l'approximation des satellites

Dans le cadre de cette approximation on utilise un repère tournant par rapport auquel le mouvement du corps à un point fixe. On peut aussi considérer le mouvement du système initial par rapport au repère $NX_1'X_2'X_3'$ tournant à vitesse angulaire constante autour d'un axe fixe dans l'espace absolu, par exemple autour de l'axe NX_2 coïncidant avec l'axe NX_2'. Dans ce cas, le mouvement du corps n'a pas de point fixe par rapport au repère tournant. Soit ψ l'angle de la rotation, les vecteurs unitaires de ces deux repères sont alors reliés par

$$\boldsymbol{\alpha}' = \boldsymbol{\alpha} \cos\psi - \boldsymbol{\gamma} \sin\psi, \qquad \boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\beta}, \qquad \boldsymbol{\gamma}' = \boldsymbol{\alpha} \sin\psi + \boldsymbol{\gamma} \cos\psi \tag{78}$$

ou bien

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}' \cos\psi + \boldsymbol{\gamma}' \sin\psi, \qquad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}', \qquad \boldsymbol{\gamma} = -\boldsymbol{\alpha}' \sin\psi + \boldsymbol{\gamma}' \cos\psi \tag{79}$$

Les vitesses angulaire et linéaires absolues $\boldsymbol{\omega}$ et $\mathbf{v}$ et les vitesse angulaire et linéaires $\boldsymbol{\Omega}$ et $\mathbf{V}$ relatives au repère tournant sont toujours reliées par

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \dot{\psi}\boldsymbol{\beta}, \qquad \mathbf{v} = \mathbf{V} + \dot{\psi}\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r} \tag{80}$$

Considérons maintenant la fonction Λ telle que

$$\Lambda(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{V}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\psi}) \equiv L(\boldsymbol{\Omega} + \dot{\psi}\boldsymbol{\beta}, \mathbf{V} + \dot{\psi}\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}) \tag{81}$$

On a

$$\begin{aligned}
\Lambda(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{V}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\psi}) &= \tfrac{1}{2}\Big(\mathbf{A}\left(\boldsymbol{\Omega} + \dot{\psi}\boldsymbol{\beta}\right), \left(\boldsymbol{\Omega} + \dot{\psi}\boldsymbol{\beta}\right)\Big) + \Big(\mathbf{B}\left(\boldsymbol{\Omega} + \dot{\psi}\boldsymbol{\beta}\right), \mathbf{V} + \dot{\psi}\left(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}\right)\Big) \\
&+ \frac{1}{2}\Big(\mathbf{C}\left(\mathbf{V} + \dot{\psi}\left(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}\right)\right), \mathbf{V} + \dot{\psi}\left(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}\right)\Big) \\
&- \frac{\kappa}{2r^5}\left(\mathbf{Dr}, \mathbf{r}\right) + fM\frac{M_G - M_L}{r}
\end{aligned}$$

Notons que l'approximation utilisée pour les termes de la dernière ligne ne joue aucun rôle dans la suite, ces termes pourraient être remplacés par $-U_2(\mathbf{r})$. En développant :

$$\Lambda(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{V}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}, \dot{\psi})\Lambda_2(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{V}) + \Lambda_1(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{V}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{r}) + \Lambda_0(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{r})$$

où Λ_2, Λ_1 et Λ_0 sont des fonctions homogènes de degré 2, 1 et 0 respectivement par rapport à $\mathbf{\Omega}$ et $\mathbf{V}$ définies par : que :

$$\begin{cases} \Lambda_2(\mathbf{\Omega},\mathbf{V}) = \dfrac{1}{2}(\mathbf{A\Omega},\mathbf{\Omega}) + (\mathbf{B\Omega},\mathbf{V}) + \dfrac{1}{2}(\mathbf{CV},\mathbf{V}) \\[2ex] \Lambda_1(\mathbf{\Omega},\mathbf{V},\beta,\mathbf{r}) = \dot\psi\,[(\mathbf{A\Omega},\boldsymbol{\beta}) + (\mathbf{B\Omega},\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{r}) + (\mathbf{B}\boldsymbol{\beta},\mathbf{V}) + (\mathbf{CV},\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{r})] \\[2ex] \Lambda_0(\boldsymbol{\beta},\mathbf{r}) = \dfrac{\dot\psi^2}{2}\,[(\mathbf{A}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}) + 2(\mathbf{B}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{r}) + (\mathbf{C}(\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{r}),\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{r})] - \dfrac{\kappa}{2r^5}\,(\mathbf{Dr},\mathbf{r}) + fM\dfrac{M_G - M_L}{r} \end{cases}$$

La fonction

$$W_a(\boldsymbol{\beta},\mathbf{r}) = -\Lambda_0(\boldsymbol{\beta},\mathbf{r}) \tag{82}$$

est *le potentiel augmenté* du système complet. Le coefficient

$$J(\beta,\mathbf{r}) = (\mathbf{A}\beta,\beta) + 2(\mathbf{B}\beta,\beta\times\mathbf{r}) + (\mathbf{C}(\beta\times\mathbf{r}),\beta\times\mathbf{r}) \tag{83}$$

du terme $\dot\psi^2/2$ est une extension du moment d'inertie classique par rapport à l'axe de rotation NX_2'.

Supposons maintenant que le repère mobile tourne *uniformément,* c'est-à-dire que $\dot\psi =$ constante, et exprimons les équations de la dynamique (1) à l'aide des vitesses relatives à ce repère. Par différentiation de (81) on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Lambda}{\partial\mathbf{\Omega}} = \dfrac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\omega}}, \qquad \dfrac{\partial\Lambda}{\partial\mathbf{V}} = \dfrac{\partial L}{\partial\mathbf{v}}, \\[2ex] \dfrac{\partial\Lambda}{\partial r_1} = \dfrac{\partial L}{\partial r_1} + \dfrac{\partial L}{\partial v_1}\cdot 0 + \left(\dfrac{\partial L}{\partial v_2}\cdot(\beta_3) + \dfrac{\partial L}{\partial v_3}\cdot(-\beta_2)\right)\dot\psi \qquad \Longleftrightarrow \\[2ex] \dfrac{\partial\Lambda}{\partial\mathbf{r}} = \dfrac{\partial L}{\partial\mathbf{r}} + \dot\psi\dfrac{\partial\Lambda}{\partial\mathbf{V}}\times\boldsymbol{\beta} \\[2ex] \dfrac{\partial\Lambda}{\partial\beta_1} = \dot\psi\dfrac{\partial L}{\partial\boldsymbol{\omega}_1}\cdot 0 + \left(\dfrac{\partial L}{\partial v_1}\cdot 0 + \dfrac{\partial L}{\partial v_2}\cdot(-r_3) + \dfrac{\partial L}{\partial v_3}\cdot(r_2)\right)\dot\psi \qquad \Longleftrightarrow \\[2ex] \dfrac{\partial\Lambda}{\partial\boldsymbol{\beta}} = \dot\psi\left(\dfrac{\partial\Lambda}{\partial\mathbf{\Omega}} + \mathbf{r}\times\dfrac{\partial\Lambda}{\partial\mathbf{V}}\right) \end{cases} \tag{84}$$

En substituant ces expressions dans les équations (1) on obtient les équations dynamiques exprimées en fonction des vitesses relatives au repère mobile $NX_1'X_2'X_3'$ et de la fonction Λ :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\Lambda}{\partial\mathbf{\Omega}} = \dfrac{\partial\Lambda}{\partial\mathbf{\Omega}}\times\mathbf{\Omega} + \dfrac{\partial\Lambda}{\partial\mathbf{V}}\times\mathbf{V} + \dfrac{\partial\Lambda}{\partial\mathbf{r}}\times\mathbf{r} + \dfrac{\partial\Lambda}{\partial\boldsymbol{\beta}}\times\boldsymbol{\beta} \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\Lambda}{\partial\mathbf{V}} = \dfrac{\partial\Lambda}{\partial\mathbf{V}}\times\mathbf{\Omega} + \dfrac{\partial\Lambda}{\partial\mathbf{r}} \end{cases} \tag{85}$$

Pour trouver la loi du changement d'orientation du corps il faut compléter ce système par les équations cinématiques pour $\mathbf{r}$ et les équations de Poisson pour le repère $NX_1'X_2'X_3'$

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V} + \mathbf{r}\times\mathbf{\Omega}, \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\alpha' = \alpha'\times\mathbf{\Omega}, \quad \dfrac{d}{dt}\beta = \beta\times\mathbf{\Omega}, \quad \dfrac{d}{dt}\gamma' = \gamma'\times\mathbf{\Omega}. \end{cases} \tag{86}$$

En effet, en utilisant l'identité de Jacobi

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) + \mathbf{y} \times (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) + \mathbf{z} \times (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0,$$

les membres de droite de la première et la seconde des équations (1) s'expriment respectivement par :

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{\Omega}} \times \Big(\mathbf{\Omega} + \dot{\psi}\boldsymbol{\beta}\Big) + \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{V}} \times \Big(\mathbf{V} + \dot{\psi}(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r})\Big) + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{r}} - \dot{\psi}\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{V}} \times \boldsymbol{\beta}\right) \times \mathbf{r}$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{\Omega}} \times \mathbf{\Omega} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{V}} \times \mathbf{V} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{r}} \times \mathbf{r} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \boldsymbol{\beta}} \times \boldsymbol{\beta},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{V}} \times (\mathbf{\Omega} + \dot{\psi}\boldsymbol{\beta}) + \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{r}} - \dot{\psi}\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{V}} \times \boldsymbol{\beta}\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{V}} \times \mathbf{\Omega} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{r}}$$

D'après (80) on a

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{V} + \mathbf{r} \times \mathbf{\Omega}.$$

On trouve aussi que la dérivée

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{\psi}} &= \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\beta}\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}, \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}, \boldsymbol{\beta}\right) \\ &= \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{\Omega}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{V}}, \boldsymbol{\beta}\right) \end{aligned} \tag{87}$$

est exactement égale à l'intégrale de la projection du moment cinétique sur l'axe $\boldsymbol{\beta}$. Les fonctions

$$\begin{aligned} \mathcal{J}'_{\alpha} = \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{\Omega}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{V}}, \boldsymbol{\alpha}'\right) &= \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{\Omega}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{V}}, \boldsymbol{\alpha}\cos\psi - \boldsymbol{\gamma}\sin\psi\right) \\ &= \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{\Omega}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{V}}, \boldsymbol{\alpha}\right)\cos\psi - \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{\Omega}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{V}}, \boldsymbol{\gamma}\right)\sin\psi = 0 \\ \mathcal{J}_{\boldsymbol{\gamma}'} = \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{\Omega}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{V}}, \boldsymbol{\gamma}'\right) &= \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{\Omega}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{V}}, \boldsymbol{\alpha}\sin\psi + \boldsymbol{\gamma}\cos\psi\right) \\ &= \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{\Omega}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{V}}, \boldsymbol{\alpha}\right)\sin\psi + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{\Omega}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{V}}, \boldsymbol{\gamma}\right)\cos\psi = 0 \end{aligned} \tag{88}$$

ne changent pas de valeur au cours des mouvements, c'est-à-dire qu'elles sont aussi des intégrales premières. On voit aussi que l'intégrale de l'énergie – Painlevé-Jacobi du système initial

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0 &= \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{\omega}\right) + \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}, \mathbf{v}\right) - L\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{\Omega}}\mathbf{\Omega} + \dot{\psi}\boldsymbol{\beta}\right) + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{V}}, \mathbf{V} + \dot{\psi}\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{r}\right) - L \\ &= \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{\Omega}}, \mathbf{\Omega}\right) + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{V}}, \mathbf{V}\right) - \Lambda + \dot{\psi}\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{\Omega}} + \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{V}} \times \mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}\right) \\ &= \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{\Omega}}, \mathbf{\Omega}\right) + \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \mathbf{V}}, \mathbf{V}\right) - \Lambda + \dot{\psi}p_{\psi} \\ &= \Lambda_2 - \Lambda_0 + \dot{\psi}p_{\psi} \end{aligned} \tag{89}$$

diffère d'une constante additive de la même intégrale par rapport au système tournant.

Comme on l'a signalé, c'est dans le cadre de l'approximation des satellites que la considération des repères tournant uniformément est la plus utile, en dehors de ce cas les repères de ce type ne s'introduisent pas aussi naturellement. Néanmoins, d'après la théorie développée par [77], les points critiques du potentiel augmenté sont en correspondance bijective avec les mouvements stationnaires. De plus, pour les points critiques indépendants de la valeur du paramètre $\dot{\psi}$, les conditions suffisantes coïncident. Pour l'études des équilibres relatifs et des conditions suffisantes de leur stabilité dans notre problème, cette circonstance justifie la considération de la restriction de la fonction Λ_0 aux variétés de niveau de l'intégrale géométrique $\mathcal{J}_{\beta\beta}$.

4 Emploi de la théorie de Routh

Pour obtenir des mouvements stationnaires on peut aussi considérer directement des valeurs critiques de l'intégrale d'énergie J_0 sur un niveau fixé des intégrales $J_\beta = p_\psi$, $J_\alpha = J_\gamma = 0$ et de toutes les intégrales géométriques. En utilisant la méthode de Routh construisons une *fonction de Routh* sous la forme

$$J_\lambda = J_0 + \sum_{\sigma=\alpha,\beta,\gamma} \lambda_\sigma J_\sigma + \sum_{\sigma,\delta=\alpha,\beta,\gamma} \frac{\mu_{\sigma\delta}}{2} J_{\sigma\delta}, \qquad \mu_{\sigma\delta} = \mu_{\delta\sigma}. \tag{90}$$

Les points critiques de cette fonction peuvent être déduits des équations

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_\lambda}{\partial \boldsymbol{\omega}} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{\omega}^2}\boldsymbol{\omega} + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \frac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{\omega}\partial \mathbf{v}}\mathbf{v} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \sum_\sigma \lambda_\sigma \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{\omega}^2}\sigma + \frac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{\omega}\partial \mathbf{v}}(\sigma \times \mathbf{r})\right) \\
&\equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{\omega}^2}\left(\boldsymbol{\omega} + \sum_\sigma \lambda_\sigma \sigma\right) + \frac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{\omega}\partial \mathbf{v}}\left(\mathbf{v} + \sum_\sigma \lambda_\sigma \sigma \times \mathbf{r}\right) = 0, && (91) \\
\frac{\partial J_\lambda}{\partial \mathbf{v}} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{v}\partial \boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\omega} + \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{v}^2}\mathbf{v} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} + \sum_\sigma \lambda_\sigma \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{v}\partial \boldsymbol{\omega}}\mathbf{v}, \sigma + \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{v}^2}(\sigma \times \mathbf{r})\right) \\
&\equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{v}\partial \boldsymbol{\omega}}\left(\boldsymbol{\omega} + \sum_\sigma \lambda_\sigma \sigma\right) + \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{v}^2}\left(\mathbf{v} + \sum_\sigma \lambda_\sigma \sigma \times \mathbf{r}\right) = 0, && (92) \\
\frac{\partial J_\lambda}{\partial \mathbf{r}} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{r}\partial \boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\omega} + \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{r}\partial \mathbf{v}}\mathbf{v} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} + \sum_\sigma \lambda_\sigma \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{r}\partial \boldsymbol{\omega}}\sigma + \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{r}\partial \mathbf{v}}(\sigma \times \mathbf{r}) + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \times \sigma\right) \\
&\equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{r}\partial \boldsymbol{\omega}}\left(\boldsymbol{\omega} + \sum_\sigma \lambda_\sigma \sigma\right) + \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{r}\partial \mathbf{v}}\left(\mathbf{v} + \sum_\sigma \lambda_\sigma \sigma \times \mathbf{r}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \\
&\quad + \sum_\sigma \lambda_\sigma \sigma \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = 0, && (93)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_\lambda}{\partial \boldsymbol{\alpha}} &= \lambda_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right) + \mu_{\alpha\alpha}\boldsymbol{\alpha} + \mu_{\alpha\beta}\boldsymbol{\beta} + \mu_{\alpha\gamma}\boldsymbol{\gamma} = 0, && (94) \\
\frac{\partial J_\lambda}{\partial \boldsymbol{\beta}} &= \lambda_\beta \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right) + \mu_{\beta\alpha}\boldsymbol{\alpha} + \mu_{\beta\beta}\boldsymbol{\beta} + \mu_{\beta\gamma}\boldsymbol{\gamma} = 0, && (95) \\
\frac{\partial J_\lambda}{\partial \boldsymbol{\gamma}} &= \lambda_\gamma \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right) + \mu_{\gamma\alpha}\boldsymbol{\alpha} + \mu_{\gamma\beta}\boldsymbol{\beta} + \mu_{\gamma\gamma}\boldsymbol{\gamma} = 0. && (96)
\end{aligned}$$

Considérons d'abord les équations (94) – (95). Après multiplication de chacune de ces équations par $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{\gamma}$, compte tenu des valeurs des intégrales premières on a

$$\begin{array}{lll}
\mu_{\alpha\alpha} = 0, & \lambda_\alpha p_\psi + \mu_{\alpha\beta} = 0, & \mu_{\alpha\gamma} = 0, \\
\mu_{\beta\alpha} = 0, & \lambda_\beta p_\psi + \mu_{\beta\beta} = 0, & \mu_{\beta\gamma} = 0, \\
\mu_{\gamma\alpha} = 0, & \lambda_\gamma p_\psi + \mu_{\gamma\beta} = 0, & \mu_{\gamma\gamma} = 0.
\end{array}$$

D'après la symétrie de la matrice $\mu_{\sigma\delta}$ on en déduit

$$\lambda_\alpha = \lambda_\gamma = 0 \tag{97}$$

Toutes le composantes de la matrice $\mu_{\sigma\delta}$ sauf $\mu_{\beta\beta}$ sont égales à zéro. Alors si les indices de λ_β et de $\mu_{\beta\beta}$ sont suprimés on a les équations

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_\lambda}{\partial \boldsymbol{\omega}} &\equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{\omega}^2}(\boldsymbol{\omega}+\lambda\boldsymbol{\beta}) + \frac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{\omega}\partial \mathbf{v}}\,(\mathbf{v}+\lambda\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{r}) = 0, &(98)\\
\frac{\partial J_\lambda}{\partial \mathbf{v}} &\equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{v}\partial \boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\omega}+\lambda\boldsymbol{\beta}) + \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{v}^2}(\mathbf{v}+\lambda\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{r}) = 0, &(99)\\
\frac{\partial J_\lambda}{\partial \boldsymbol{\beta}} &\equiv \lambda\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{r}\times\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right) + \mu\boldsymbol{\beta} = 0, &(100)\\
\frac{\partial J_\lambda}{\partial \mathbf{r}} &\equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{r}\partial \boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{\omega}+\lambda\boldsymbol{\beta}) + \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{r}\partial \mathbf{v}}\,(\mathbf{v}+\lambda\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{r}) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} + \lambda\boldsymbol{\beta}\times\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = 0. &(101)
\end{aligned}$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{\omega}^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{\omega}\partial \mathbf{v}} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{v}\partial \boldsymbol{\omega}} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{v}^2} \end{pmatrix},$$

qui correspond à l'énergie cinétique, est définie positive, donc inversible. Le système formé des équations (98), (99) admet donc pour solution unique :

$$\boldsymbol{\omega}+\lambda\boldsymbol{\beta} = 0, \qquad \mathbf{v}+\lambda\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{r} = 0, \tag{102}$$

c'est-à-dire qu'au cours des mouvements stationnaires le système tourne autour l'axe $\boldsymbol{\beta}$ avec la vitesse angulaire $-\lambda$ et le point C, dont la vitesse est $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$, est fixe par rapport au repère tournant.

L'équation (100) conduit à deux cas :

– Premier cas :

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{r}\times\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right)\times\boldsymbol{\beta} \neq 0,$$

alors nécessairement $\lambda = \mu = 0$ et $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{v} = 0$. Le système est alors en équilibre absolu et $\mathbf{r}$ est déterminé par :

$$-\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \equiv \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = 0.$$

– Second cas :

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{r}\times\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right)\times\boldsymbol{\beta} = 0,$$

il existe alors des solutions λ, μ non nulles de (100) et elles sont déterminées à une constante multiplicative près par

$$\lambda\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \mathbf{r}\times\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}, \boldsymbol{\beta}\right) + \mu = 0,$$

Pour traiter le second cas, remarquons que, compte tenu de (102) le système (101) se réduit à :

$$-\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} + \lambda\,\boldsymbol{\beta}\times\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = 0 \tag{103}$$

ce qui équivaut à :

– soit

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}\times\left(\boldsymbol{\beta}\times\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right) = 0, \quad \left(\boldsymbol{\beta}\times\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right) \neq 0 \text{ et } \lambda \text{ est déterminé de façon unique,} \tag{104}$$

– soit

$$\left(\boldsymbol{\beta}\times\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right)\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}0 \;\text{ et } \lambda \text{ est indéterminé.} \tag{105}$$

L'équation (103) entraîne toujours :

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}, \boldsymbol{\beta}\right) = 0, \qquad \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}, \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right) = 0.$$

La première égalité signifie que le point C se meut dans le plan orthogonale au moment cinétique seulement pour la première approximation ; en situation réelle le point C quitte ce plan. Des phénomènes de ce type concernant la position du centre d'inertie sont connus en dynamique des systèmes dans le vide (voir par exemple, [52] pour les références).

Pour préciser les mouvements stationnaires il faut préciser la distribution des masses et la forme du corps.

Remarque. Nous avons seulement discuté ici le cas de la vitesse angulaire $\dot{\psi}$ constante. Lorsque ce paramètre peut être considéré comme une fonction d'état du système on peut alors utiliser l'idée de Lyapunov sur l'extension de la méthode de Routh aux systèmes de ce type. Pour ce faire, on peut par exemple modifier les arguments de la publication [52]. En pratique il faut choisir la vitesse angulaire du repère mobile de façon que l'intégrale linéaire de la projection du moment cinétique total sur $\boldsymbol{\beta}$ soit identiquement satisfaite, c'est-à-dire que le moment cinétique du système par rapport au repère mobile soit identiquement nul.

REMERCIEMENTS *Cette recherche a été soutenue par l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (CERMICS, Paris), la Fondation Autrichienne Scientifique (FWF) sous forme d'une Bourse de Lise Meitner, Grant M00282TEC, l'INTAS, Grant 93-1621-ext, par RFBR, Projets 96-015-96051 et 96-001-00261, par le Programme Nationale INTEGRATION et par la Faculté Universitaires Notre Dame de la Paix de Namur pour A.Burov qui souhaite remercier particulièrement le Professeur Hans Troger (TUWien) et le Professeur Galina Plotnikova (FUNDP, Namur) pour leur invitation à travailler dans leurs Instituts.*

Références

[1] Sir THOMSON, W.G. and P.TAIT. *Treatise on Natural Philosophy.* Vol.1. Oxford. 1867. 728 p.

[2] PETROV, A.G. *Printsip Gamil'tona i nekotorye zadachi dinamiki ideal'noi zhidkosti. (The Principle of Hamilton and some problems of dynamics of an ideal fluid)* // J. Appl. Math. Mech. (PMM) 1983. Vol.47. No.1. P.48 – 55.

[3] LAMB, H. *Hydrodynamics.* Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1932. Sixth edition, reissued by Dover publications, Inc. 1945.

[4] KOCHIN, N.E., KIBEL', I.A., ROZE, N.V. *Teoreticheskaya Gidromekhanika. Part 1.* Moscow : GITTL. 1955 - 560 p. Translated as *Theoretical Hydromechanics.* New York - London - Sydney : Interscience Publishers John Wiley and Sons. 1964. v + 577 p.

[5] BATCHELOR, G.K. *An introduction to Fluid Dynamics.* Cambridge : Cambridge University Press. 1967.

[6] BLOCH, A.M., KRISHNAPRASAD, P.S., MARSDEN, J.E. SÁNCHEZ DE ALVAREZ. *Stabilization of rigid body dynamics by internal and external torques* // Automatica J. IFAC. 1992. Vol.28. No.4. P.745 - 756.

[7] TAYLOR, G.I. *The forces on a body placed in a curved or convrging stream of fluid* // Proc. Royal Soc. Lond. A. 1928. Vol.120. P.260 – 283.

[8] TAYLOR, G.I. *Analysis of a swimming of long and narrow animals* // Proc. Royal Soc. Lond. A. 1952. Vol.214. P.158 – 183.

[9] CUMMINS, W. E. *The forces and moments acting on a body moving in an arbitrary potential stream* // The David W. Taylor Model Basin, Washington, D. C. 1953. Rep.780. v+47 pp.

[10] CUMMINS, W. E. *Hydrodynamic forces and moments acting on a slender body of revolution moving under a regular train of waves* // The David W. Taylor Model Basin, Washington, D. C. 1954. Rep. 910. vi+33 pp.

[11] LANDWEBER, L. *The axially symmetric potential flow about elongated bodies of revolution*// The David W. Taylor Model Basin. Publisher unknown. 1951. Rep.761. 61 pp.

[12] LANDWEBER, L. *On a generalization of Taylor's virtual mass relation for Rankine bodies* // Quart. Appl. Math. 1956. Vol.14. P. 51–56.

[13] LANDWEBER, L., YIH, C. S. *Forces, moments, and added masses for Rankine bodies* // J. Fluid Mech. 1956. Vol.1. P. 319–336.

[14] LANDWEBER, L., MACAGNO, M. *Force on a prolate spheroid in an axisymmetric potential flow* // J. Ship Res. 1964/1965. Vol.8. No. 1. P. 24–37.

[15] STRETTER, V.L. (Editor-in-Chief) *Handbook of Fluid Dynamics.* New York - Toronto - London : McGraw-Hill. 1961.

[16] YIH, C.S. *Fluid mechanics : A coincise introduction to the theory.* Ann Arbor, Michigan. : West River Press. 1977. xviii. 624 p.

[17] HASKIND, M.D. *Unsteady motion of a rigid body in an accelerated flow of an unbounded fluid* // J. Appl. Math. Mech. (PMM). 1956. Vol.20. No.1. P.120 – 123.

[18] CHERNOUS'KO, F.L. *On motion of a rigid body with a cavity containing an ideal fluid and a bubble of air* // J. Appl. Math. Mech. (PMM). Vol.28. No.4. 1964. P.735 - 745.

[19] LIGHTHILL, M.J. *Note on swimming of slender fishs* // J. Fluid Mechanics. 1960. Vol.9. P.305 – 317.

[20] MILOH, T. *Forces and moments on a tri-axial ellipsoid in potential flow* // Israel J. Tech. 1973. Vol.11. No. 1-2. P.63–74 ; corrections, ibid. 1973. Vol.11. no. 3. P.166.

[21] MILOH, T. *Conical potential flow about bodies of revolution* // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1976. Vol.29. No. 1. P.35–60.

[22] MILOH, T. *Hydrodynamics of deformable contiguous spherical shapes in an incompressible inviscid fluid* // J. Engrg. Math. 1977. Vol.11. No. 4. P.349–372.

[23] MILOH, T., WEISMAN, G., WEICHS, D. *The added mass coefficient of a torus* // J. Eng. Maths. 1978. Vol.12. P.1 -13.

[24] MILOH, T., LANDWEBER, L. *Generalization of the Kelvin-Kirchhoff equations for the motion of a body through a fluid* // Phys. Fluids. 1981. Vol.24. No. 1. P.6–9.

[25] MILOH, T. *Hydrodynamic self - propulsion of deformable bodies and oscillating bubbles* // Mathematical approaches in hydrodynamics. 1991. SIAM. Philadelphia. PA. P.21 - 37.

[26] MILOH, T. *Pressure forces on deformable bodies in non-uniform inviscid flows* // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1994. Vol.47. No.4. P.635 - 661.

[27] GALPER, A., MILOH, T. *Self - propulsion of bubbles in a weakly nonuniform flow field. Bubble dynamics and interface phenomena* (Birmingham, 1993) // Fluid Mech. Appl. 1994. Vol.23. Kluwer Acad. Publ. Dordrecht. 1994. P.73 - 80.

[28] GALPER, A., MILOH, T. *Generalized Kirchhoff equations for a deformable body moving in a weakly non-uniform flow field* // Proc. Roy. Soc. London Ser. 1994. A 446. No. 1926. P.169 - 193.

[29] GALPER, A., MILOH, T. *Dynamic equations of motion for a rigid or deformable body in an arbitrary non-uniform potential flow field* // J. Fluid Mech. 1995. Vol.295.

[30] GALPER, A., MILOH, T. *On the motion of a non-rigid sphere in a perfect fluid. Theoretical, experimental, and numerical contributions to the mechanics of fluids and solids* // Z. Angew. Math. Phys. 1995. Vol. 46. Special Issue, S627–S642.

[31] GALPER, A. R., MILOH, T. *Motion stability of a deformable body in an ideal fluid with applications to the N spheres problem* // Phys. Fluids. 1998. Vol. 10. No. 1. P. 119–130.

[32] GALPER, A. R., MILOH, T. *Curved slender structures in non-uniform flows* // J. Fluid Mech. 1999. Vol.385. P.21–40.

[33] GALPER, A. R., MILOH, T. *Hydrodynamics and stability of a deformable body moving in the proximity of interfaces* // Phys. Fluids. 1999. Vol.11. No. 4. P. 795–806.

[34] VOINOV, V. V., VOINOV, O. V., PETROV, A.G. *A method of calculating the potential flow of an incompressible fluid around a solid revolution* // J. Comp. Math. and Math. Phys. (ZhVMMF). 1974. Vol.14. P. 797–802, 816.

[35] VOINOV, O. V., PETROV, A. G. *On the equations of motion of a liquid with bubbles* // J. Appl. Math. Mech. (PMM). 1975. Vol.39. No. 5. P. 811–822 (1976). ; translated from Prikl. Mat. Meh. 1975. Vol.39. No.5. P.845–856 (Russian).

[36] PETROV, A. G. *The Lagrange function for vortex flows and dynamics of deformed drops.* // J. Appl. Math. Mech. (PMM) 1977. Vol.41. No. 1. P.72–86. ; translated from Prikl. Mat. Meh. 1977. Vol.41. P.79–94 (Russian).

[37] VOINOV, O. V., PETROV, A. G. *The stability of a small body in an inhomogeneous flow* // Dokl. Akad. Nauk SSSR 1977. Vol.237. No.6. P.1303–1306.

[38] PETROV, A. G. *The minimum principle and the stability of the steady-state motion of a bubble in a fluid that has surface tension* // Vestnik Moskov. Univ. Ser.I. Math. Mekh. 1981. No.3. P. 71 – 75.

[39] PETROV, A. G. *The resistance force acting on an axisymmetric nonthin body for small cavitation numbers* // Dokl. Akad. Nauk SSSR. 1985. Vol.282. No. 6. P.1320 – 1323.

[40] PETROV, A. G. *Variatsionnye metody v dinamike neszhimaemoi zhidkosti* [Variational methods in incompressible fluid dynamics]. Moscow : Moscow State Univ. Fac. Mech. Math. 1985. 104 p.

[41] PETROV, A. G. *Lagrangian systems in hydrodynamics.* // Istor. Metodol. Estestv. Nauk. 1986. No. 32. P. 204 – 210.

[42] PETROV, A. G. *Incompressible fluid flows with free boundary and the methods for their research. Free boundary problems in continuum mechanics* (Novosibirsk, 1991) // P. 245 – 252. In : Internat. Ser. Numer. Math., 106, Birkhäuser, Basel, 1992.

[43] PETROV, A. G. *A proof of the instability of the equilibrium position of a ball in a nonhomogeneous potential flow* // Dokl. Akad. Nauk. 1998. Vol. 359. No.6. P.769 – 772, translation in Dokl. Phys. 1998. Vol.43. No.4. P. 256 – 259.

[44] PETROV, A.G. *Instability of the equilibrium position of a heavy ball in a steady potential nonhomogeneous flow* // J. Appl. Mat. Mech. (PMM). 1999. Vol. 63. No.3. P. 481 – 488.

[45] VLADIMIROV, V.A., ILIN, K.I. *Stability of a solid in a vortex flow of an ideal fluid* // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 1994. Vol. 35. No.1. P.84 – 92.

[46] VLADIMIROV, V.A., ILIN, K.I. *On the stability of rigid body in rotational flow of an ideal incompressible fluid* // Bulletin of the Hong Kong Math. Soc.. 1996. Vol.1. P.103 – 131.

[47] VLADIMIROV, V.A., ILIN, K.I. *On the Arnold Stability of a Solid in a Plane Steady Flow of an Ideal Incompressible Fluid* // J. of the Theoretical and Computational Fluid Dynamics. 1998. Vol.10. No. 1. P. 425 – 438.

[48] Mu MU, VLADIMIROV, V.A., Wu YONG-HUI *Applications of Energy - Casimir and Energy - Lagrange Methods to the Nonlinear Symmetric Stability Problems.* // Journal of Atmospheric Sciences. 1999. Vol. 56. No.3. P.400 – 411.

[49] Vladimirov, V.A., Ilin, K.I. *On the stability of a Dynamical System 'Rigid Body+ Inviscid Fluid'. Variational Principles* // J. Fluid Mech. 1999. Vol.386. P. 43 – 75.

[50] MANNERS, *Hydrodynamic force on a moving circular cylinder submerged in a general fluid flow* // Proc. Royal Soc. London A. 1992. Vol.498. P.331 – 339.

[51] BUROV, A.A., CHEVALLIER, D.P. *On motion of a rigid body about a fixed point with respect to a rotating frame* // Regular and Chaotic Dynamics. 1998. Vol. 3. No.1. P.66 – 75.

[52] BUROV, A.A., CHEVALLIER, D.P. *On Routh Reduction and its Application in Rigid Body Dynamics* // ZAMM. 1998. Vol.78. No.10. P. 695 – 702.

[53] van WIJNGAARDEN, L. *On the motion of gas bubbles in a perfect fluid* // Arch. Mech. (Arch. Mech. Stos.) 1982. Vol.34. No.3. P.343 – 349.

[54] BENJAMIN, T. B. *Impulse, flow force and variational principles* // IMA J. Appl. Math. 1984. Vol.32. No. 1-3. P. 3 – 68.

[55] BENJAMIN, T. B. *Errata : "Impulse, flow force and variational principles"* // IMA J. Appl. Math. 1984. Vol.33. No.1. P.i.

[56] BENJAMIN, T. B. *Hamiltonian theory for motions of bubbles in an infinite liquid* // J. Fluid Mech. 1987. Vol.181. P.349 – 379.

[57] AUTON, T. R., HUNT, J. C. R., Prud'homme, M. *The force exerted on a body in inviscid unsteady nonuniform rotational flow* // J. Fluid Mech. 1988. Vol.197. P.241 – 257.

[58] EAMES, I., HUNT, J. C. R. *Forces on bodies moving in a weak density gradient without buoyancy effects* // IUTAM Symposium on Variable Density Low-speed Turbulent Flows (Marseille, 1996). P. 135 – 142. Fluid Mech. Appl. Vol.41. Dordrecht : Kluwer Acad. Publ. 1997.

[59] EAMES, I., HUNT, J. C. R. *Inviscid flow around bodies moving in weak density gradients without buoyancy effects* // J. Fluid Mech. 1997. Vol.353. P.331 – 355.

[60] DOBROKHOTOV, O.S. *Integrable cases in the problem on motion of a heavy cylindric rigid body in a fluid* // Bull. Moscow State University. Ser.1. Mathematics, mechanics. 1999. No.1 P.63 – 65.

[61] LEONARD N.E. *Periodic Forcing, Dynamics and Control of Underactuated Spacecraft and Underwater Vehicles* // Proc. of the 34th IEEE Conference on Decision and Control, 1995.

[62] LEONARD N.E. *Control Synthesis and Adaptation for an Underactuated Autonomous Underwater Vehicle* // IEEE Journal of Oceanic Engineering, July 1995.

[63] LEONARD, N.E. *Compensating for Actuator Failures : Dynamics and Control of Underactuated Underwater Vehicles* // Proc. of the 9th Int. Symp. on Unmanned Untethered Submersible Technology, September 1995.

[64] LEONARD N.E. *Geometric Methods for Robust Stabilization of Autonomous Underwater Vehicles* // Proc. of the 1996 Symposium on Autonomous Underwater Vehicle Technology.

[65] LEONARD N.E. *Stabilization of Steady Motions of an Underwater Vehicle* // Proc. of the 35th IEEE Conference on Decision and Control, 1996.

[66] LEONARD N.E., MARSDEN J.E. *Stability and Drift of Underwater Vehicle Dynamics : Mechanical Systems with Rigid Motion Symmetry* // Physica D. June 1997.

[67] LEONARD N.E. *Stability of a Bottom-Heavy Underwater Vehicle* // Automatica. March 1997.

[68] LEONARD N.E. *Stabilization of Underwater Vehicle Dynamics with Symmetry-Breaking Potentials* // Systems and Control Letters. October 1997.

[69] HOLMES Ph., JENKINS J., LEONARD N.E. *Dynamics of the Kirchhoff Equations I : Coincident Centers of Gravity and Buoyancy* // Physica D. 1998.

[70] GRAVER J., LEONARD N.E., LIU J., WOOLSEY C.A. *Design and Analysis of an Underwater Vehicle for Controlled Gliding* // Conference on Information Sciences and Systems. 1998.

[71] LEONARD N.E., WOOLSEY C.A. *Internal Actuation for Intelligent Underwater Vehicle Control* // Tenth Yale Workshop on Adaptive and Learning Systems. 1998.

[72] BULLO F., LEONARD N.E. *Motion Primitives for Stabilization and Control of Underactuated Vehicles* // IFAC Nonlinear Control Design Symposium (NOLCOS). 1998.

[73] LEONARD N.E. *Mechanics and Nonlinear Control : Making Underwater Vehicles Ride and Glide* // IFAC Nonlinear Control Design Symposium (NOLCOS). 1998.

[74] LEONARD N.E., WOOLSEY C.A. *Underwater Vehicle Stabilization by Internal Rotors* // American Control Conference. 1999.

[75] BLOCH A.M., LEONARD N.E., MARSDEN J.E. *Potential Shaping and the Method of Controlled Lagrangians* // Proc. of the 38th IEEE Conference on Decision and Control. 1999.

[76] SAMSONOV V.A., ROUBANOVSKII V.N. *Stabilité de movement aux exemples et problèmes.* Moscou : Nauka. 1987.

[77] KARAPETYAN A.V., STEPANOV S.Ya. *Steady motions and relative equilibria of mechanical systems with symmetry.* // J. Appl. Maths Mechs. (PMM) 1996. Vol.60. No.5. P.729 – 735.