Arguments mathématiques pour un nouveau modèle de plaques en élasticité linéaire

Régis MONNEAU

Résumé. Nous montrons comment le modèle bidimensionnel classique de *Kirchhoff-Love* décrivant les plaques en élasticité linéaire peut être rafiné pour rendre compte de façon optimale de la véritable solution tridimensionnelle. Nous donnons en particulier une estimation d'erreur optimale pour ce nouveau modèle, et ce sans supposer aucune régularité supplémentaire sur les forces appliquées. L'approche développée ici est potentiellement applicable à de nombreux autres problèmes de réduction de dimensions.

Mathematical arguments for a new plate model in linear elasticity.

Abstract. We show how the classical two-dimensional *Kirchhoff-Love* model describing plates in linear elasticity can be refined to take into account the true three-dimenional solution in an optimal way. We give in particular an error estimate which is optimal for this new model, without requiring any additional regularity on the forces. The approach developped here is potentially applicable to many other problems involving dimensional reduction.

Abridged English Version.

We consider the linear elastic plate problem on $\Omega = \omega \times (-1,1)$ where ω is an open set of $\mathbf{R}^2$. We introduce the set of displacements

$$V = \left\{ u = (u_1, u_2, u_3), \quad u_i \in H^1_{loc}(\Omega), \quad i = 1,2,3 \right\}$$

We note $e_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i\right)$ and $e^\varepsilon_{ij}(u) = \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}(u) & \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(u) \\ \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(u) & \frac{1}{\varepsilon^2} e_{33}(u) \end{pmatrix}$. We define the bilinear form on $V \times C^\infty_0(\omega \times [-1,1])$

$$a^\varepsilon(u,v) = \int_\Omega \lambda e^\varepsilon_{ii}(u) e^\varepsilon_{jj}(v) + 2\mu e^\varepsilon_{ij}(u) e^\varepsilon_{ij}(v)$$

and the linear form

$$l(v) = \int_\Omega f v + \int_{\partial\Omega} g v$$

for $f \in L^2_{loc}(\Omega)$ and $g \in H^{\frac{1}{2}}_{loc}(\partial\Omega)$. We consider the solutions $u \in V$ of the problem

$$a^\varepsilon(u,v) = l(v), \quad \forall v \in C^\infty_0(\omega \times [-1,1]) \tag{1}$$

It is well known that the singular perturbation theory applied to this problem allows to get error estimates on $u - U^0$ where U^0 is a Kirchhoff-Love displacement. Nevertheless these estimates are not obtained in the natural norms (i.e. H^2 norms here) except if we assume additional regularity on the data f, g. The purpose of this note is to present a new plate model which is a better approximation of the three-dimensional solution and allows to get optimal estimates in some natural norms. To this end we define

$$U^\varepsilon(\zeta) = \begin{pmatrix} \zeta_\alpha - x_3\partial_\alpha\zeta_3 & + & \varepsilon^2\left(\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{x_3^2}{2}\partial_\alpha \mathrm{div}\,'\zeta + a(x_3)\partial_\alpha\Delta'\zeta_3\right) \\ \\ \zeta_3 & + & \varepsilon^2\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(-x_3 \mathrm{div}\,'\zeta + \frac{x_3^2}{2}\Delta'\zeta_3\right) \end{pmatrix}$$

where

$$\mathrm{div}\,'\zeta = \partial_1\zeta_1 + \partial_1\zeta_2, \quad \Delta' = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad a(x_3) = \left(\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}\right)\frac{x_3^3}{3!} - 2\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right)x_3$$

Then we consider solutions ζ such that $u^\varepsilon(\zeta) \in V$ and

$$a^\varepsilon(U^\varepsilon(\zeta), U^\varepsilon(\xi)) = l(U^\varepsilon(\xi)), \quad \forall\xi \in C_0^\infty(\omega) \tag{2}$$

In this new model, the function ζ satisfies equations which depend on ε and which reduce to the classical Kirchhoff-Love model if we take formally $\varepsilon = 0$ in these equations. Moreover we prove the

Theorem 1 (Error estimates)
Let $\Omega = \omega \times (-1,1)$ with ω a general open set of $\mathbf{R}^2$ (possibly unbounded), and

$$\Omega_d = \omega_d \times (-1,1), \quad \textit{where} \quad \omega_d = \left\{x' \in \mathbf{R}^2, \quad \textit{dist}\,(x',\omega) < d\right\}$$

For $1 < p < +\infty$ we define the norm

$$|v|_{L^p_\varepsilon(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} |v|_{L^p(B_\varepsilon(x)\cap\Omega)}$$

and the following semi-norm

$$\mathcal{N}_{L^p_\varepsilon(\Omega)}(v) = \sup_{x\in\Omega} \quad \inf_{\xi\in\Xi_\varepsilon(x')} |v_3 - U_3^\varepsilon(\xi), \varepsilon\,(v_\alpha - U_\alpha^\varepsilon(\xi))|_{L^p(B_\varepsilon(x)\cap\Omega)}$$

where

$$\Xi_\varepsilon(x') = \left\{\xi \in C^\infty(B_{2\varepsilon}(x')), \quad M^0\xi = 0 \quad \textit{on} \quad B_{2\varepsilon}(x')\right\}$$

where the operator M^0 is given by (3)-(6). There exist two constants $C, c > 0$ only depending on λ, μ and p, such that for every solution ζ of (2) on ω_d with $g \equiv 0$ and for every solution u of (1), we have the following estimate on $w = u - U^\varepsilon(\zeta)$ (where the greek indices α, β, γ take the values $1, 2$)

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon^2\,|e^\varepsilon(w)|_{L^p_\varepsilon(\Omega)} \\ |\partial_{33}w_3|_{L^p_\varepsilon(\Omega)} \\ \varepsilon\,|\partial_{33}w_\alpha|_{L^p_\varepsilon(\Omega)}, \quad \varepsilon\,|\partial_{3\alpha}w_3|_{L^p_\varepsilon(\Omega)} \\ \varepsilon^2\,|\partial_{3\alpha}w_\beta|_{L^p_\varepsilon(\Omega)}, \quad \varepsilon^2\,|\partial_{\alpha\beta}w_3|_{L^p_\varepsilon(\Omega)} \\ \varepsilon^3\,|\partial_{\alpha\beta}w_\gamma|_{L^p_\varepsilon(\Omega)} \end{array}\right\} \leq C\begin{pmatrix} \varepsilon^3\left(|f_\alpha|_{L^p_\varepsilon(\Omega_d)} + \varepsilon\,|f_3|_{L^p_\varepsilon(\Omega_d)}\right) \\ \\ +\varepsilon^2 e^{-c\frac{d}{\varepsilon}}\left(|e^\varepsilon(w)|_{L^p_\varepsilon(\Omega_d)} + \mathcal{N}_{L^p_\varepsilon(\Omega_d)}(u)\right) \end{pmatrix}$$

It is also possible to give $W^{k,p}$ and $C^{k,\alpha}$ versions of this estimate with $g \not\equiv 0$.

I. INTRODUCTION.

Nous considérons une plaque tridimentionnelle $\Omega^\varepsilon = \omega \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ où ω est un ouvert quelconque de $\mathbf{R}^2$. Nous nous intéressons aux déplacements de cette plaque linéairement élastique sous l'action de forces de volume $f = (f_1, f_2, f_3)$ et de surface $g = (g_1, g_2, g_3)$. Une fois le problème renormalisé (cf. [2] Ciarlet), les déplacements $u = (u_1, u_2, u_3)$ définis sur $\Omega = \omega \times I$ avec $I = (-1, 1)$, sont solutions des équations de l'élasticité mises à l'échelle

$$L^\varepsilon u = f \quad \text{dans} \quad \omega \times I$$

où L^ε est un opérateur elliptique linéaire du second ordre dont les coefficients dépendent de ε. A ce système s'ajoutent les conditions au bord

$$B^\varepsilon u = g \quad \text{sur} \quad \omega \times \partial I$$

On notera $x' = (x_1, x_2)$ un point de ω et $x = (x', x_3)$ un point de Ω. On utilisera les indices grecs $\alpha, \beta, ...$ prenant les valeurs $\{1, 2\}$ et les indices latins $i, j, ...$ prenant les valeurs $\{1, 2, 3\}$. L'idée principale de l'hypothèse de Kirchhoff-Love (cf. [8, 10]) peut se résumer mathématiquement en disant que la solution tridimensionnelle u est bien représentée en première approximation par un déplacement (appelé de Kirchhoff-Love) du type

$$U^0(\zeta) = \begin{pmatrix} \zeta_\alpha(x') - x_3 \partial_\alpha \zeta_3(x') \\ \zeta_3(x') \end{pmatrix}$$

où $\zeta = (\zeta_\alpha, \zeta_3)$ satisfait les équations de Kirchhoff-Love de la théorie des plaques. Un abondante littérature mécanique et mathématique a été consacrée à ce sujet. Citons en particulier les travaux de Shoikhet [15] et Ciarlet, Destuynder [3, 6, 1] pour les premières estimations d'erreur rigoureuses sur la difference $u - U^0$ entre la solution tridimensionnelle et le déplacement de Kirchhoff-Love. Ces estimations d'erreur s'appuyent sur la théorie des perturbations singulières développée depuis les années 1960 (cf. [9]). Il est bien connu que les perturbations singulières présentent un phénomène de perte de régularité qui empèche d'estimer $u - U^0$ dans les normes naturelles. Par exemple même dans le cas très particulier d'une plaque périodique (i.e. $\omega = \mathbf{R}^2 \backslash \mathbf{Z}^2$), si $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, il n'est pas connu d'estimation de $|u - U^0|_{H^2(\Omega)}$ en $O(\varepsilon^2)$. Dans tous les cas connus il faut, ou bien se contenter d'une estimation de régularité plus faible sur $u - U^0$, ou bien demander plus de régularité sur les forces imposées f et g. Cette approche de perturbation singulière a été appliquée à de très nombreux problèmes de réduction de dimension. Cependant à notre connaissance, tous souffrent de cette même difficulté de régularité. Citons à ce propos Jacques-Louis Lions ([9], p. 92):

Les estimations données (...) sont dans l'espace H^1. En fait en utilisant les résultats classiques de régularité des problèmes aux limites elliptiques (...), les solutions u (...) sont dans des espaces plus petits (de Sobolev, de Schauder, etc.). Quelles sont les estimations d'erreur dans ces espaces?

L'objet de cette note est de proposer une réponse possible à cette question, en contournant la difficulté classique grâce à l'introduction d'un nouveau modèle réduit.

Ainsi sur le cas des plaques, nous sommes ammenés à remplacer le déplacement de Kirchhoff-Love $U^0(\zeta)$ par un déplacement plus complet $U^\varepsilon(\zeta)$ qui dépend de ε et qui se réduit au déplacement de Kirchhoff-Love en prenant formellement $\varepsilon = 0$. Par ailleurs $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ satisfait un système d'équations (cf. (6) pour une forme plus explicite)

$$M^\varepsilon \zeta = S^\varepsilon f + T^\varepsilon g \quad \text{sur} \quad \omega \tag{3}$$

Contrairement au modèle de Kirchhoff-Love, ce modèle bidimensionnel fait intervenir le paramètre ε et se réduit au modèle de Kirchhoff-Love lorsqu'on fait formellement $\varepsilon = 0$ dans ces équations.
Ce nouveau modèle de plaque présente un avantage majeur sur le modèle classique de Kirchhoff-Love: il évite les pertes de régularité inhérente à l'approche classique. Il est ainsi possible d'établir (théorème 1) une estimation d'erreur du type (en prenant $g \equiv 0$ pour simplifier)

$$\left| D^2 \left(u - U^\varepsilon(\zeta) \right) \right| \leq C \varepsilon^2 \left| f \right|$$

avec la même norme $|\cdot|$ à gauche et à droite. Ici $u - U^\varepsilon(\zeta)$ est bien mesuré avec deux degrés de régularité de plus que les forces f comme nous nous y attendions naturellement.
Signalons aussi un autre point fort de ce modèle: il est robuste face à une situation d'homogénéisation. Par exemple si les forces oscillent avec une fréquence en $1/\varepsilon$, la solution tridimenionnelle u est reste bien approximée par $U^\varepsilon(\zeta)$ avec la même estimation d'erreur.

II. RAPPEL DU MODELE TRIDIMENSIONNEL.

On définit l'espace des déplacements de la plaque

$$V = \left\{ u = (u_1, u_2, u_3), \quad u_i \in H^1_{loc}(\Omega), \quad i = 1, 2, 3 \right\}$$

On introduit $e_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i\right)$ et $e^\varepsilon_{ij}(u) = \begin{pmatrix} e_{\alpha\beta}(u) & \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(u) \\ \frac{1}{\varepsilon} e_{\alpha 3}(u) & \frac{1}{\varepsilon^2} e_{33}(u) \end{pmatrix}$. Ceci permet de définir la forme bilinéaire sur $V \times C^\infty_0(\omega \times [-1, 1])$

$$a^\varepsilon(u, v) = \int_\Omega \lambda e^\varepsilon_{ii}(u) e^\varepsilon_{jj}(v) + 2\mu e^\varepsilon_{ij}(u) e^\varepsilon_{ij}(v)$$

et la forme linéaire

$$l(v) = \int_\Omega f v + \int_{\partial\Omega} g v$$

pour $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. On considère les solutions $u \in V$ du problème

$$a^\varepsilon(u, v) = l(v), \quad \forall v \in C^\infty_0(\omega \times [-1, 1]) \tag{4}$$

III. UN NOUVEAU MODELE DE PLAQUE.

On définit

$$U^\varepsilon(\zeta) = \begin{pmatrix} \zeta_\alpha - x_3 \partial_\alpha \zeta_3 & + & \varepsilon^2 \left(\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{x_3^2}{2} \partial_\alpha \mathrm{div}\,' \zeta + a(x_3) \partial_\alpha \Delta' \zeta_3 \right) \\ \\ \zeta_3 & + & \varepsilon^2 \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(-x_3 \mathrm{div}\,' \zeta + \frac{x_3^2}{2} \Delta' \zeta_3 \right) \end{pmatrix}$$

où

$$\operatorname{div}'\zeta = \partial_1\zeta_1 + \partial_1\zeta_2, \quad \Delta' = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad a(x_3) = \left(\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}\right)\frac{x_3^3}{3!} - 2\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right)x_3$$

On cherche alors ζ tel que $U^\varepsilon(\zeta) \in V$ et

$$a^\varepsilon(U^\varepsilon(\zeta), U^\varepsilon(\xi)) = l(U^\varepsilon(\xi)), \quad \forall \xi \in C_0^\infty(\omega) \tag{5}$$

Il est possible de voir que (5) est équivalent à

$$\begin{cases} a_1\Delta'\zeta_\alpha + a_2\partial_\alpha \operatorname{div}'\zeta + \varepsilon^2 a_3 \partial_\alpha \Delta' \operatorname{div}'\zeta + \varepsilon^4 a_4 \partial_\alpha \Delta'^2 \operatorname{div}'\zeta = p_\alpha + \varepsilon^2 \partial_\alpha q \\ \\ a_5 \Delta'^2\zeta_3 + \varepsilon^2 a_6 \Delta'^3 \zeta_3 + \varepsilon^4 a_7 \Delta'^4 \zeta_3 = p_3 + \varepsilon^2 \Delta' q_3 \end{cases} \tag{6}$$

où $a_i, i = 1, ..., 7$ sont des constantes qui s'expriment en fonction de λ, μ, et p_α, p_3, q, q_3 sont des fonctions de $f_3, g_3, \operatorname{div}'f, \operatorname{div}'g, \lambda, \mu$.

Remarque 1 *La forme très particulière de $U^\varepsilon(\zeta)$ est déterminée de sorte que $M^0\zeta = 0$ dans ω implique $L^\varepsilon(U^\varepsilon(\zeta)) = 0$ dans $\omega \times I$ et $B^\varepsilon(U^\varepsilon(\zeta)) = 0$ sur $\omega \times \partial I$.*

IV. ESTIMATIONS D'ERREUR.

Dans les estimations suivantes nous prendrons $g = 0$ pour simplifier l'énnoncé, bien qu'un résultat similaire existe pour g non nul.

Nous commençons par une estimation d'erreur intérieure dans le cas d'un ouvert général (non périodique). Cette estimation est optimale en ce qui concerne la régularité.

Théorème 1 (Estimations d'erreur)
Soit $\Omega = \omega \times (-1, 1)$ avec ω un ouvert quelconque (eventuellement non borné) de $\mathbf{R}^2$, et

$$\Omega_d = \omega_d \times I, \quad \textit{où} \quad \omega_d = \left\{x' \in \mathbf{R}^2, \quad dist(x', \omega) < d\right\}$$

On définit la norme pour $1 < p < +\infty$

$$|v|_{L^p_\varepsilon(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} |v|_{L^p(B_\varepsilon(x)\cap\Omega)}$$

et la semi-norme

$$\mathcal{N}_{L^p_\varepsilon(\Omega)}(v) = \sup_{x\in\Omega} \inf_{\xi\in\Xi_\varepsilon(x')} |v_3 - U_3^\varepsilon(\xi), \varepsilon\left(v_\alpha - U_\alpha^\varepsilon(\xi)\right)|_{L^p(B_\varepsilon(x)\cap\Omega)}$$

où

$$\Xi_\varepsilon(x') = \left\{\xi \in C^\infty(B_{2\varepsilon}(x')), \quad M^0\xi = 0 \quad on \quad B_{2\varepsilon}(x')\right\}$$

où l'opérateur M^0 est donné par (3)-(6). Il existe deux constantes $C, c > 0$ dépendant uniquement de λ, μ et p , telles que pour toute solution ζ de (6) sur ω_d avec $f \in L^p_{loc}(\Omega_d)$, $g \equiv 0$, *et pour toute solution u de (4), on a l'estimation suivante sur $w = u - U^\varepsilon(\zeta)$ (où les indices grecs prennent les valeurs $1, 2$)*

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon^2 \left|e^\varepsilon(w)\right|_{L^p_\varepsilon(\Omega)} \\ \left|\partial_{33} w_3\right|_{L^p_\varepsilon(\Omega)} \\ \varepsilon \left|\partial_{33} w_\alpha\right|_{L^p_\varepsilon(\Omega)}, \quad \varepsilon \left|\partial_{3\alpha} w_3\right|_{L^p_\varepsilon(\Omega)} \\ \varepsilon^2 \left|\partial_{3\alpha} w_\beta\right|_{L^p_\varepsilon(\Omega)}, \quad \varepsilon^2 \left|\partial_{\alpha\beta} w_3\right|_{L^p_\varepsilon(\Omega)} \\ \varepsilon^3 \left|\partial_{\alpha\beta} w_\gamma\right|_{L^p_\varepsilon(\Omega)} \end{array}\right\} \quad \leq \quad C \left(\begin{array}{l} \varepsilon^3 \left(\left|f_\alpha\right|_{L^p_\varepsilon(\Omega_d)} + \varepsilon \left|f_3\right|_{L^p_\varepsilon(\Omega_d)}\right) \\ \\ +\varepsilon^2 e^{-c\frac{d}{\varepsilon}} \left(\left|e^\varepsilon(w)\right|_{L^p_\varepsilon(\Omega_d)} + \mathcal{N}_{L^p_\varepsilon(\Omega_d)}(u)\right) \end{array} \right)$$

Il est aussi possible de donner des versions $W^{k,p}$ et $C^{k,\alpha}$ de cette estimée.

Remarque 2 *Ce résultat serait faux en remplacant $U^\varepsilon(\zeta)$ par le déplacement U^0 de Kirchhoff-Love (il suffit de considérer des déplacements de la forme $u = u^\varepsilon(\zeta)$ avec $\zeta = \phi(\varepsilon^\delta x')$).*

A titre d'illustration, on en déduit le

Corollaire 1 (Bornes L^∞ dans le cas périodique)
Il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de λ, μ telle que pour la plaque périodique (i.e. $\omega = \mathbf{R}^2 \backslash \mathbf{Z}^2$), si $f \in L^\infty(\Omega)$ et $g = 0$ alors

$$\left|e^\varepsilon_{ij}(u) - e^\varepsilon_{ij}(U^\varepsilon(\zeta))\right|_{L^\infty(\Omega)} \quad \leq \quad C\varepsilon \left(\left|f_\alpha\right|_{L^\infty(\Omega)} + \varepsilon \left|f_3\right|_{L^\infty(\Omega)}\right)$$

V. CONCLUSION ET QUESTIONS OUVERTES.

Le nouveau modèle que nous avons présenté est un rafinement du modèle de Kirchhoff-Love qui approxime mieux la solution tridimensionnelle à l'intérieur de la plaque. La question de savoir s'il existe une estimée de $u - U^\varepsilon(\zeta)$ dans $H^2(\Omega)$ sans recourrir au sup sur des boules (théorème 1) reste ouverte. Une autre question particulièrement intéressante serait de chercher un modèle equivalent tenant compte des conditions aux bord sur $\partial\omega \times I$. Dans ce cadre une étude plus poussée des couches limites semble faisable, mais reste à faire.
Enfin il serait intéressant d'appliquer notre approche à de nombreux autres problèmes dans des ouverts minces avec phénomène de réduction de dimension, tels que par exemple, les plaques anisotropes, les coques, les arcs, les problèmes similaires en élasticité non linéaire, les équations d'évolutions, les problèmes d'homogénéisation, etc.

REMERCIEMENTS

Je remercie P.G. Ciarlet, F. Murat et A. Raoult pour les discussions stimulantes que nous avons eues ensemble.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] P.G. Ciarlet, *Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures: An Asymptotic Analysis.*, R.M.A. 14. Masson and Springer-Verlag, Paris and Heidelberg, 1990.

[2] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Vol II: Theory of Plates*, North-Holland, Amsterdam, 1997.

[3] P.G. Ciarlet, P. Destuynder, *A justification of the two-diemnsional plate model*, J. Mécanique 18 (1979) 315-344.

[4] M. Dauge, I. Gruais, *Développement asymptotique d'ordre arbitraire pour une plaque élastique mince encastrée*, Note aux Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, t. 321, Série I, (1995) 375-380.

[5] M. Dauge, I. Gruais, *Asymptotics of arbitrary order for a thin elastic clamped plate, I. Optimal error estimates*, Asymptotic Analysis 13 (1996) 197-197.

[6] P. Destuynder, *Sur une justification des modèles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques*, Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1980.

[7] F. John, *Estimates for the Derivatives of the Stress in a Thin Shell and Interior Shell Equations*, Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965) 235-267.

[8] G. Kirchhoff, *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Schribe*, J. Reine Angew. Math. 40 (1850) 51-58.

[9] J.-L. Lions, *Perturbations Singulières dans les Problèmes aux Limites et en Contrôle Optimal*, Lecture Notes in Math. 323, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[10] A.E.H. Love, *A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Fourth Edition*, Cambridge University Press, Cambridge (reprinted by Dover Publications, New York, 1944).

[11] A. Mielke, *On the Justification of Plate Theories in Linear Elasticity Theory Using Exponential Decay Estimates*, J. of Elasticity, 38 (1995) 165-208.

[12] R. Monneau, *Uniform elliptic estimate for an infinite plate in linear elasticity*, en préparation.

[13] R. Monneau, *Error estimates for a new plate model in linear elasticity*, en préparation.

[14] J.-C. Paumier, *Existence and convergence of the expansion in the asymptotic theory of elastic thin plates*, Math. Modelling and Numerical Analysis 25(3) (1991) 371-391.

[15] B.A. Shoikhet, *An energy identity in physically nonlinear elasticity and error estimates of the plate equations*, Prikl. Matem. Mekhan. 40 (2) (1976) 317-326. English translation J. Appl. Maths. Mechs. (1976) 291-301.

R. M. : CERMICS, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées