

*Une méthode des caractéristiques d'ordre deux sur
maillages mobiles pour la résolution des équations
de Navier-Stokes incompressible par éléments finis*

Gilles Fourestey

N° 4448

Avril 2002

THÈME 4



*Rapport
de recherche*

Une méthode des caractéristiques d'ordre deux sur maillages mobiles pour la résolution des équations de Navier-Stokes incompressible par éléments finis

Gilles Fourestey*

Thème 4 — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Caiman

Rapport de recherche n° 4448 — Avril 2002 — 55 pages

Résumé : Dans ce rapport, nous proposons une étude de la discrétisation des équations de Navier-Stokes pour un fluide visqueux incompressible par une méthode de Lagrange-Galerkin (ou méthode des caractéristiques) d'ordre 2 en maillage mobile. Après avoir rappelé les principaux résultats théoriques liés à la discrétisation de ces équations en maillage fixe, nous proposons un schéma numérique qui permet de conserver une approximation d'ordre élevé en temps par la méthode des caractéristiques en formulation Arbitrairement Lagrangienne-Eulérienne (ALE). Enfin, nous terminons sur quelques tests numériques qui mettent en évidence l'apport de l'ordre deux par rapport à l'ordre un.

Mots-clés : Equations de Navier-Stokes, fluide incompressible, éléments finis, méthode des caractéristiques, formulation ALE

* E-mail: Gilles.Fourestey@sophia.inria.fr

A second-order characteristic method on moving grids for the FEM solution of incompressible Navier-Stokes equations

Abstract: This report deals with the discretisation of the incompressible Navier-Stokes equations with a second order Lagrange-Galerkin method (also known as the method of characteristics) valid for moving meshes. A standard finite elements analysis is first detailed, then a numerical scheme that preserves the high order of the method in Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) formulation is considered. Finally, numerical results which justify the use of the second order characteristics method over the first order are proposed.

Key-words: Navier-Stokes equations, incompressible fluid, finite elements, characteristics method, ALE formulation

Table des matières

1	Introduction	5
2	Les équations de Navier-Stokes	7
2.1	Définition	7
2.2	Formulations de Lagrange-Galerkin	8
2.3	Formulation faible du problème de Stokes généralisé	9
2.3.1	Notations	9
2.3.2	La formulation faible	10
3	Discrétisation en espace	11
3.1	Le problème de Stokes généralisées	11
3.2	La condition inf-sup	13
3.3	Les éléments P1-bulle / P1	13
3.3.1	La fonction bulle	13
3.3.2	Le problème de Stokes	14
3.4	L'élément P1/P1 régularisé	19
4	Discrétisation en temps : méthode des caractéristiques	21
4.1	Introduction	21
4.2	Définitions	21
4.3	Discrétisation en temps	22
4.4	La construction des caractéristiques	23
4.5	Approximation de la dérivée totale: maillages fixes	28
4.5.1	Approximation du premier ordre	28
4.5.2	Ordre 2	31
4.6	Approximation de la dérivée totale: maillages mobiles	33
4.6.1	Formulation ALE	33
4.6.2	Méthode des caractéristiques en formulation ALE	33
4.6.3	Algorithme général de résolution	34
4.7	Méthode ALE du premier ordre	35
4.8	Méthode ALE d'ordre 2	36
5	Résultats numériques	38
5.1	La cavité entraînée	38
5.1.1	Introduction	38
5.1.2	Définition du problème.	39
5.1.3	Résultats numériques	39
5.1.4	Conclusion	44
5.2	Écoulement autour d'un cylindre	48
5.2.1	Introduction	48
5.2.2	Définition du problème.	49

5.2.3	Résultats numériques	50
5.2.4	Conclusion	53
References		54

1 Introduction

Les instabilités aéroélastiques de certaines constructions souples du Génie Civil, par exemple les ponts suspendus, les passerelles élancées, les réfrigérants de centrales nucléaires, etc... ont été l'objet de nombreuses études aussi bien expérimentales que numériques (voir [25] et [15] pour des collections de références bibliographiques).

Dans ce rapport, nous nous concentrons sur des simulations numériques d'un écoulement instationnaire visqueux (équations de Navier-Stokes) incompressible laminaire. Celui-ci est approché ici par éléments finis. Pour cela, le fluide est caractérisé localement par deux variables : sa vitesse $u(x,t) = (u_i(x,t))_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^d$ et sa pression $p(x,t) \in \mathbb{R}$, définies pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $t \in]0, T[$. Les équations de Navier-Stokes sont définies en deux groupes. Le premier est la réalisation de la seconde loi de la dynamique de Newton (ou de la conservation de la quantité de mouvement) et le second est la traduction de l'incompressibilité du fluide (ou l'expression de la conservation de la masse) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p & = f \\ \nabla \cdot u & = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ici, ν définit la viscosité du fluide. Si $\frac{\nu}{|u|}$ est grand, alors le comportement du fluide sera elliptique car dominé par le laplacien, alors que si $\frac{\nu}{|u|}$ est petit, le terme de convection non linéaire sera prépondérant et donnera au fluide un caractère hyperbolique. Dans ce dernier cas, le comportement à l'infini peut se révéler chaotique, notamment près des couches limites où un fort gradient de vitesse peut apparaître. La discrétisation des équations de Navier-Stokes devient critique et nécessite l'utilisation de d'équations de fermeture de type $k - \epsilon$.

Nous utilisons un code développé à l'INRIA par plusieurs projets : initialement développé en maillage fixe [10], le code NSI3 a ensuite été étendu aux maillages mobiles grâce à une formulation Arbitrairement Lagrangienne-Eulérienne [15]. La version initiale du code était fondée sur une discrétisation en éléments finis mixtes P1bulle / P1, utilisant une méthode des caractéristiques du premier ordre pour le traitement du terme non-linéaire de convection, comme la plupart des schémas d'intégration utilisés pour la discrétisation des équations de Navier-Stokes.

Pour des calculs instationnaires, dont le but pourrait être par exemple de simuler des instabilités aéroélastiques pour des profils de ponts en mouvement, il est crucial de bien évaluer les échanges énergétiques entre le vent (moteur de l'instabilité, malgré le rôle a priori amortissant de sa viscosité) et la structure. Or la méthode des caractéristiques d'ordre un initialement développée dans le code NSI3 apporte une part non-négligeable d'amortissement, uniquement due à la viscosité artificielle et numérique introduite. Afin d'éliminer cette viscosité artificielle, susceptible de polluer significativement les résultats de notre soufflerie numérique, nous avons envisagé de passer à une précision supérieure. Un autre résultat attendu pourrait être l'accélération d code et l'augmentation de ses performances, notamment par l'utilisation d'un pas de temps plus grand pour des résultats de qualité similaire.

Le but de ce rapport est donc de proposer une discrétisation des équations de Navier-Stokes par la méthode des caractéristiques, aussi appelée méthode de Lagrange-Galerkin, d'ordre 2 en maillage fixe et mobile. La méthode de Lagrange-Galerkin permet de découpler la partie purement convective du reste des équations de Navier-Stokes. Cette approche est justifiée par la définition même de l'équation de convection. En effet, l'opérateur $\partial_t + u \cdot \nabla$ peut être considéré comme une dérivée particulaire qui transforme les coordonnées Eulériennes en coordonnées Lagrangienne. Grâce à cette formulation, il est théoriquement possible de suivre les particules au cours du temps le long de leur trajectoire en résolvant, pour chaque particule, une équation différentielle dite équation de caractéristiques :

$$\frac{dX}{dt}(x,s;t) = u(X(x,s;t),t)$$

où $X(x,s;t)$ définit la position d'une particule à l'instant t qui était en x à l'instant s , soit $X(x,s;s) = x$. Le traitement du terme de convection non-linéaire se réduit donc à un problème de recherche de pied de caractéristiques, c'est à dire de position de la particule à l'instant précédent considéré. Cette approche nous permet théoriquement d'éviter la contrainte d'une CFL pour la discrétisation en temps. Il a en effet été démontré [17] que si la trajectoire caractéristique est calculée exactement, le schéma obtenu est inconditionnellement stable. Au final, l'utilisation de la méthode de Lagrange-Galerkin pour la discrétisation des équations de Navier-Stokes pour les fluides incompressibles se résume en deux étapes : la première est la résolution d'une équation de type advection pour déterminer la trajectoire des particules du fluide puis la résolution d'équations de type Stokes généralisées. Ces dernières équations sont définies comme suit, pour $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \alpha u - \nu \Delta u + \nabla p &= f \\ \nabla \cdot u &= 0 \end{aligned}$$

Les équations de Stokes généralisées possèdent, mis à part le terme de non-linéarité, toutes les caractéristiques des équations de Navier-Stokes : en particulier, leur intégration par éléments finis nécessite l'utilisation d'espaces de discrétisation possédant certaines particularités afin de garantir l'existence de l'unicité de solutions. Ceci est dû au fait qu'à cause du terme d'incompressibilité, ces équations définissent un problème de type point selle. L'existence et l'unicité d'une solution pour le problème de Stokes est garantie si, et seulement si les espaces de discrétisation X pour u et M pour p satisfont la condition de Babuska-Brezzi, aussi appelée condition inf-sup, qui s'écrit :

$$\inf_{p \in M} \sup_{v \in X} \frac{|(\nabla \cdot v, p)|}{\|v\|_X \|p\|_M} \geq \gamma$$

Un exemple d'espace qui satisfait cette équation est $H^1(\Omega)$ pour u et $L^2(\Omega)$ pour p . Cette contrainte nous impose en général, sauf utilisation d'artifices numériques, et choisir u et p dans des espaces différents.

Ce rapport présente des résultats préliminaires. On se limitera notamment à la présentation des méthodes proposées et à quelques tests sur des configurations simples en maillages fixes. Ce rapport est organisé ainsi. Dans la Section 2, nous présentons les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible, puis la formulation variationnelle. La discrétisation en espace en éléments finis mixtes est présentée dans la Section 3. L'accent sera ensuite mis plus spécifiquement sur la nouvelle discrétisation d'ordre deux en temps proposée ici, dans la Section 4. Finalement, des résultats numériques préliminaires en maillage fixe seront présentés pour le problème très classique de la cavité entraînée (Section 5.1) puis pour des écoulements autour de cylindres circulaires, écoulements extérieurs plus proches des configurations du Génie Civil (Section 5.2).

2 Les équations de Navier-Stokes

2.1 Définition

On considère donc les équations de Navier-Stokes dans un domaine à d dimensions. Si l'on note $u = (u_i)_{1 \leq i \leq d} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ la vitesse du fluide, P sa pression, $f = (f_i)_{1 \leq i \leq d}$ l'ensemble des forces exercées sur le fluide par unité de masse et $\sigma = (\sigma_{i,j})_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq d}$ le tenseur des contraintes, nous avons :

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^d u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{i,j}}{\partial x_j} = \rho f_i, \quad 1 \leq i \leq d, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad 1 \leq i \leq d, \quad (3)$$

avec $\sigma_{i,j} = -P\delta_{i,j} + 2\mu D_{i,j}(u)$. ρ et μ sont des constantes positives (μ peut être nulle pour un fluide non-visqueux) qui représentent respectivement la densité du fluide et sa viscosité, Les équations (2) expriment la conservation de la quantité de mouvement du fluide tandis que (3) exprime la conservation de la masse pour un fluide incompressible. En posant $p = \frac{P}{\rho}$, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ nous obtenons la forme classique des équations de Navier-Stokes incompressible :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p & = f \\ \nabla \cdot u & = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Dans ces équations, ν représente la constante de viscosité cinématique du fluide. Si l'on se donne une longueur caractéristique du fluide L , on peut définir le nombre de Reynolds Re :

$$Re = \frac{|u|L}{\nu}$$

qui représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses du fluide. Pour un ν assez grand, les forces visqueuses l'emportent sur les forces d'inertie et le terme de convection peut être négligé. Dans ce cas, nous obtenons une l'équation linéaire :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \nabla p & = f \\ \nabla \cdot u & = 0 \end{cases}$$

De plus, si l'écoulement devient stationnaire, nous pouvons écrire l'équation dite de Stokes :

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + \nabla p & = f \\ \nabla \cdot u & = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Les preuves de l'existence et de l'unicité de la solution de l'équation de Stokes peuvent se trouver dans [4]. L'équation de Stokes ne présente que peu d'intérêt sur le plan physique mais sa résolution permet d'obtenir une solution initiale de bonne qualité pour des écoulements plus complexes. Sa discrétisation fera l'objet d'un paragraphe un peu plus loin dans ce rapport.

2.2 Formulations de Lagrange-Galerkin

Nous allons maintenant récrire l'équation (4) en redéfinissant l'opérateur de convection. Pour cela, considérons le problème de Cauchy défini par :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u & = 0 & \text{in } \Omega \times]0, T[\\ u(t = 0) & = u_0 \end{cases} \quad (6)$$

Soit maintenant une courbe caractéristique, solution du l'équation différentielle ordinaire définie par :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} & = u(X(x, s; t), t) \\ X(x, s; s) & = x \end{cases} \quad (7)$$

Si nous posons $v(t) = u(X(t), t)$, nous obtenons :

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} u + u \cdot \nabla u \right) (X(x, s; t), t) = 0$$

Donc, le long des courbes caractéristiques, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - \nu \Delta u + \nabla p & = f \\ \nabla \cdot u & = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Dans cette formulation, le terme de convection est en fait inclus dans la dérivée totale. Ainsi la non-linéarité dans les équations de Navier-Stokes se trouve reportée dans une dérivée

particulière. Celle-ci peut-être naturellement traitée par la dérivée temporelle le long des courbes caractéristiques, qu'il reste quand même à calculer. La résolution des équations de Navier-Stokes pourra donc s'effectuer en deux étapes :

- la première étape consistera à discrétiser l'opérateur de dérivée particulière (appelée aussi dérivée totale) en recherchant les courbes caractéristiques
- la seconde se ramènera à la résolution d'un problème de Stokes généralisé, que l'on peut écrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} \alpha u - \nu \Delta u + \nabla p &= g \\ \nabla \cdot u &= 0 \end{cases} \quad (9)$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante et g une fonction rassemblant les forces exercées sur le fluide et les termes de discrétisation de l'opérateur de transport.

2.3 Formulation faible du problème de Stokes généralisé

La résolution du problème de Stokes généralisé par éléments finis passe évidemment par une formulation variationnelle (ou formulation faible). Avant de définir cette formulation, nous rappelons différentes notions cruciales d'analyse fonctionnelle, et en particulier les espaces de Sobolev.

2.3.1 Notations

On introduit l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions dont le carré est intégrable au sens de Lebesgues sur Ω , par :

$$L^2(\Omega) = \left\{ \psi \mid \int_{\Omega} \psi^2 < \infty \right\}.$$

Il est doté d'une norme :

$$\|\psi\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \psi^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ de dimension d , on peut définir l'opérateur différentiel linéaire suivant :

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

On définit alors, pour tout entier s non-négatif, l'espace de Sobolev $H^s(\Omega)$ défini par :

$$H^s(\Omega) = \left\{ \psi \in L^2(\Omega) \mid D^m \psi \in L^2(\Omega), m = 1, \dots, s \right\}.$$

On notera que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$. On associe à cet espace la norme suivante :

$$\|\psi\|_{H^s(\Omega)} = \left(\|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{\alpha=1}^s \|D^\alpha \psi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Enfin, on notera H_0^1 le sous espace de H^1 défini par :

$$H_0^1(\Omega) = \{\psi \in H^1 \mid \psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

$\partial\Omega$ étant la frontière supposée assez régulière de Ω . Cet espace possède un espace dual, noté H^{-1} , associé à la norme :

$$\|\psi\|_{-1,\Omega} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0} \frac{\int_{\Omega} \psi v}{\|v\|_{1,\Omega}}.$$

Nous pouvons maintenant définir la formulation faible du problème de Stokes généralisé.

2.3.2 La formulation faible

Pour écrire la formulation faible des équations (4), plaçons nous dans l'espace $X = (H_0^1(\Omega))^d$ pour la vitesse et $M = L^2(\Omega)$ pour la pression. Si $g \in H^{-1}(\Omega)$, alors on définit la formulation faible du problème de Stokes généralisé par :

$$\begin{cases} \alpha(u,v) + \nu(\nabla u, \nabla v) - (p, \nabla \cdot v) = (g, v) & \forall v \in X \\ -(q, \nabla \cdot u) = 0 & \forall q \in M \end{cases} \quad (10)$$

Cette formulation peut s'écrire en terme de formes bilinéaires :

$$\begin{aligned} \forall u, v \in H^1(\Omega) & : a(u, v) = \nu \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ \forall v \in H^1(\Omega), q \in L^2(\Omega) & : b(v, q) = \int_{\Omega} q \nabla \cdot v \, dx \end{aligned}$$

La formulation variationnelle du problème de Stokes généralisé: soit $g \in H^{-1}(\Omega)$, trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ et $p \in L_0^2(\Omega)$ tels que :

$$\begin{cases} \alpha(u, v) + a(u, v) + b(v, p) = (g, v) & \forall t \in (0, T), \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ b(u, q) = 0 & \forall t \in (0, T), \forall q \in L_0^2(\Omega) \end{cases} \quad (11)$$

A cette équation, nous devons rajouter des conditions aux limites. En général, nous utiliserons des conditions de types Dirichlet $u_{\partial\Omega} = 0$. Cette condition est dite condition de non-glisement qui peut se généraliser en posant :

$$u|_{\partial\Omega} = h,$$

avec $h \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^d$ et

$$\int_{\partial\Omega} h \cdot n = 0.$$

La démonstration de l'existence et de l'unicité pour ce problème à été proposée par Raviart et Girault [4] ou Pironneau [16] pour des conditions aux limites de type Dirichlet homogène $u|_{\partial\Omega} = 0$. D'autres conditions aux limites peuvent cependant être utilisées :

- Conditions de glissement : $u|_{\partial\Omega} \cdot n = 0$

– Conditions de sortie libre : $p.n - \nu(\nabla u|_{\partial\Omega} + \nabla u^T|_{\partial\Omega}) = 0$

Remarque: dans l'équation (11), la pression est fixée à une constante près si par exemple aucune condition de sortie libre n'est imposée. Afin de lever cette indétermination dans le cas de conditions de type $u|_{\partial\Omega} = h$, une solution par exemple consistera à fixer la pression en un point du domaine considéré.

3 Discrétisation en espace

3.1 Le problème de Stokes généralisées

Le but de cette partie est de l'étude de la discrétisation en espace des équations de Stokes généralisées. Il est bien connu que les équations de type Navier-Stokes ne peuvent être discrétisées que dans des espaces satisfaisant certaines conditions [3]. Comme précédemment, X et M désignent respectivement les espaces fonctionnels des champs de vitesse et de pressions. Choisissons alors une triangulation T_h de Ω , de longueur caractéristique h . Nous noterons alors $X_h \subset X$ et $M_h \subset M$ les sous-espaces fonctionnels discrets engendrés par cette triangulation et un choix d'éléments finis, ainsi que u_h et p_h deux éléments quelconques de X_h et M_h respectivement. Nous pouvons réécrire l'équation (11) sous sa forme discrète, c'est-à-dire trouver $u_h \in X_h$ et $p_h \in M_h$ tels que :

$$\begin{cases} \alpha(u_h, v) + \nu(\nabla u_h, \nabla v) - (p_h, \nabla \cdot v) = (g, v) & \forall v \in X_h \\ -(q, \nabla \cdot u_h) = 0 & \forall q \in M_h \end{cases} \quad (12)$$

Soient maintenant $\{\phi_i\}_{i=1, \dots, I}$ et $\{\psi_j\}_{j=1, \dots, J}$ une base de X_h et M_h respectivement, avec $I = \dim[X_h]$ et $J = \dim[M_h]$. Alors,

$$\begin{aligned} u_h &= \sum_{i=1}^I u_i \phi_i \\ p_h &= \sum_{j=1}^J p_j \psi_j \end{aligned}$$

Cette formulation, injectée dans (12), nous permet de définir les opérateurs discrets \mathcal{I} suivants : $X_h \rightarrow X_h$, $\mathcal{A} : X_h \rightarrow X_h$, $\mathcal{B} : X_h \rightarrow M_h$ et $\mathcal{C} : X_h \rightarrow X_h$ définis par

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}u_h, v_h) &= (u_h, v_h) & \forall u_h, v_h \in X_h \\ (\mathcal{A}u_h, v_h) &= (\nabla u_h, \nabla v_h) & \forall u_h, v_h \in X_h \\ (\mathcal{B}u_h, q_h) &= -(\nabla \cdot u_h, q_h) & \forall u_h \in X_h, q_h \in M_h \end{aligned}$$

Grâce à ces matrices, réécrivons le système (12) sous sa forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \alpha I + \nu A & B^t \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_h \\ p_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

en considérant les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= (\nabla\phi_i, \nabla\phi_j) \\ B_{i,j} &= (\nabla\cdot\phi_i, \psi_j) \\ I_{i,j} &= (\phi_i, \phi_j) \\ \tilde{g}_i &= (g, \phi_i) \end{aligned}$$

Il nous faut maintenant définir les espaces X_h et M_h de telle façon que le problème variationnel (12) soit bien posé. Le choix le plus simple consiste à choisir une approximation $P1$ pour u_h et p_h , ce qui nous permet d'utiliser la même triangulation pour X_h et M_h et fixer les inconnues sur les points de discrétisation de X_h et M_h . Malheureusement, une telle approximation nous donne un problème mal posé (voir [16] ou [14] pour la démonstration).

Afin d'illustrer ce phénomène, considérons une approximation $P1$ pour u_h et p_h sur un domaine défini par la Figure 1. Si nous imposons à p_h de valoir alternativement -1,0 et 1 sur chaque sommet des triangles T_h du domaine, nous avons alors :

$$(\nabla\cdot v, p_h) = \frac{1}{3} \sum_{\kappa} (\nabla\cdot v)|_{\kappa} \left(\sum_{j=1,2,3} p_h(q_{\kappa}^j) \right) = 0$$

pour tout v_h affine par morceau sur T_h .

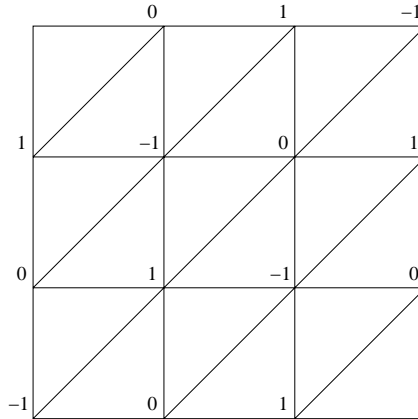


FIG. 1 – Exemple de pression pour une interpolation d'ordre égal en u et p

Il existe toutefois un critère définissant les espaces susceptibles d'éviter de tels problèmes. Ce critère est appelé condition inf-sup ou LBB du nom des auteurs Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi [3].

3.2 La condition inf-sup

Nous venons de voir que le problème variationnel (12) était mal posé pour une approximation d'ordre 1 en vitesse et en pression. En fait, toute approximation polynomiale de même ordre pour u et p conduira aux mêmes problèmes [11]. Cependant, le critère inf-sup sur les espaces d'approximation nous permet, s'il est vérifié, de nous assurer de l'existence et de l'unicité des solutions du problème de Stokes généralisé. Ce critère est donné [3] par :

$$\inf_{p \in M_h \setminus Q_h} \sup_{v \in X_h} \frac{|(\nabla \cdot v, p)|}{\|v\|_X \|p\|_M} \geq \gamma > 0 \quad (14)$$

pour $Q_h = \{q \in M_h \mid (q, \nabla \cdot v) = 0 \quad \forall v \in X_h\}$ et γ constante indépendant de h . Il découle de cette condition que :

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2} + \|p - p_h\|_{L^2} \leq C_1 \inf_{v \in X_h} \|\nabla(u - v)\|_{L^2} + C_2 \inf_{q \in M_h} \|p - q\|_{L^2}$$

Il en résulte que l'erreur d'interpolation est bornée pour p et u . Pour plus de détails, voir [11]. Il est à noter que (14) peut s'écrire sous la forme matricielle [22]. Grâce aux notations définies précédemment, nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} \max_{v \in X_h} \frac{p^t B v}{(v^t A v)^{\frac{1}{2}}} &\leq \gamma (p^t I p)^{\frac{1}{2}} \\ &= \max_u \frac{p^t B A^{-\frac{1}{2}} u}{(u^t u)^{\frac{1}{2}}} \\ &= (p^t B A^{-1} B^t p)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Si nous posons $u = A^{\frac{1}{2}} v$ et puisque le maximum est atteint quand $u = A^{-\frac{1}{2}} B^t p$, alors :

$$\gamma^2 = \min_{p \neq 0} \frac{p^t B A^{-1} B^t p}{p^t G p} \quad (15)$$

avec $B A^{-1} B^t$ symétrique définie positive. Nous obtenons alors une interprétation du nombre γ qui devient la racine carrée de la plus petite valeur propre de la matrice $I^{-1} B A^{-1} B^t$.

Il existe de nombreux exemples d'espaces vérifiant la condition inf-sup. Une description de certains de ces espaces peut se trouver dans [13], [16] ou [11] par exemple. Afin de satisfaire la condition inf-sup, nous allons enrichir l'espace des vitesses $P1$ en lui ajoutant un degré de liberté par triangle.

3.3 Les éléments P1-bulle / P1

3.3.1 La fonction bulle

Nous supposons maintenant que Ω est une partie bornée de \mathbb{R}^d et T_h est une triangulation de $\bar{\Omega}$ composée de triangle κ , avec h une longueur caractéristique de la triangulation :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \kappa$$

Soit alors les espaces de discrétisation P1 en vitesse et en pression, comme défini dans [4] :

$$\begin{cases} W_h = \{w \in C^0(\bar{\Omega})^d; w|_\kappa \in P1(\kappa) \forall \kappa \in \mathcal{T}_h\} \\ X_{h,1} = W_h \cap H_0^1(\Omega)^2 \\ \\ Q_h = \{q \in L^2(\Omega); q|_\kappa \in P1(\kappa) \forall \kappa \in \mathcal{T}_h\} \\ M_h = Q_h \cap L_0^2(\Omega) \end{cases} \quad (16)$$

Nous noterons $\{\lambda_{i,\kappa}\}_{i=1,\dots,d+1}$ les fonctions de bases définies sur $\kappa \in \mathcal{T}_h$. Nous alors enrichir $X_{h,1}$ afin de satisfaire (14). Soit $\phi_\kappa(x)$, $x \in \mathcal{K}$ la fonction bulle, définie par :

$$\phi_\kappa(x) = \begin{cases} \prod_{j=1..n+1} \lambda_{j,\kappa} \text{ sur } \kappa \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Nous appellerons Φ_h l'espace discret engendré par ces fonctions, c'est-à-dire :

$$\Phi_h = \left\{ u_h \in X_h \mid u_h = \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} u_\kappa \phi_\kappa, \forall \kappa \in \mathcal{T}_h \right\}.$$

Une propriété immédiate de ϕ_κ est que son support est réduit au triangle κ . Il en résulte que $X_{h,1}$ et Φ_h sont orthogonaux dans H_1^0 , et ont peut donc définir :

$$X_h = X_{h,1} \oplus \Phi_h.$$

l'espace d'approximation P1 - bulle pour la vitesse. La Figure (2) représente les degrés de liberté associés à X_h et M_h . Comme démontré dans [16], l'élément fini P1 - Bulle/P1 satisfait la condition inf-sup, ce qui entraîne l'existence et l'unicité de la solution.

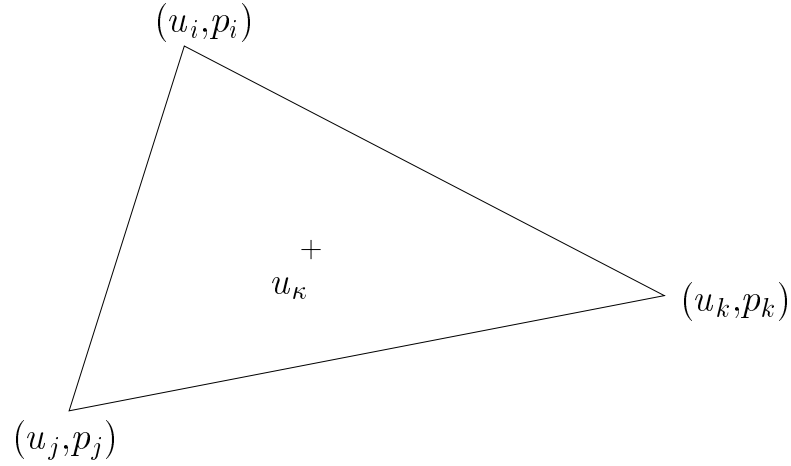
3.3.2 Le problème de Stokes

Intéressons nous maintenant au problème de Stokes à proprement parler, c'est-à-dire quand α est nul dans (9). La résolution de ce problème, bien que moins générale, nous permettra d'obtenir une bonne solution initiale et d'accélérer ainsi la convergence des solutions du problème (4). De plus, l'utilisation de l'élément P1-Bulle / P1 pour sa résolution met en évidence certaines propriétés qui nous seront utiles pour la suite. Soit donc le problème suivant : trouver $u_h \in X_h$ et $p_h \in M_h$ tels que :

$$\begin{cases} \nu(\nabla u_h, \nabla v) - (p_h, \nabla \cdot v) = (f_h, v) & \forall v \in X_h \\ -(q, \nabla \cdot u_h) = 0 & \forall q \in M_h \end{cases} \quad (17)$$

D'après la définition de X_h , nous pouvons développer l'écriture de u_h en :

$$u_h = u_{h,1} + \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \phi_\kappa u_\kappa = \sum_j u_j \lambda_j + \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \phi_\kappa u_\kappa$$

FIG. 2 – Degrés de liberté pour l'élément $P1$ -bulle / $P1$ en dimension 2

où u_j et u_k représentent respectivement les degrés de liberté pour la composante de la vitesse $P1$ et la bulle. Comme $u_{h,1}$ est un polynôme de degré un, il est facile de démontrer que :

$$\int_{\Omega} \nabla u_{h,1} \cdot \nabla (\phi_k u_k) = 0, \quad \forall u_h \in X_h.$$

Considérons maintenant deux triangles quelconques κ_1 et κ_2 de T_h . Comme $\kappa_1 \cap \kappa_2 = \emptyset$, il vient que :

$$\int_{\Omega} \nabla (\phi_{\kappa_1} u_{\kappa_1}) \cdot \nabla (\phi_{\kappa_2} u_2) = 0$$

Enfin, considérons un degré de liberté pour la bulle u_k quelconque pour $\kappa \in T_h$:

$$\int_{\Omega} \nabla (\phi_k u_k) \cdot \nabla (\phi_k u_k) = \left(\int_{\kappa} \nabla \phi_k \cdot \nabla \phi_k \right) u_k^2 = A_k u_k^2.$$

En utilisant ces trois propriétés, nous allons injecter u_h dans (17). Soient donc u_h et $v_h \in X_h$:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h &= \int_{\Omega} \nabla u_{h,1} \cdot \nabla v_{h,1} + \int_{\Omega} \sum_{\kappa \in T_h} (\nabla \phi_{\kappa} u_{\kappa}) \cdot \sum_{\kappa \in T_h} (\nabla \phi_{\kappa} v_{\kappa}) \\
&= \int_{\Omega} \nabla u_{h,1} \cdot \nabla u_{h,1} + \sum_{\kappa \in T_h} A_{\kappa} u_{\kappa}^2 \\
\int_{\Omega} p_h \nabla \cdot v_h^b &= \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot v_h + \sum_{\kappa \in T_h} \int_{\kappa} p_h \nabla \cdot (\phi_{\kappa} u_{\kappa}) \\
&= \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot v_h + \sum_{\kappa \in T_h} \left(\int_{\kappa} p_h \nabla \cdot \phi_{\kappa} \right) u_{\kappa}
\end{aligned}$$

D'où, en utilisant (17) :

$$\nu \sum_{\kappa \in T_h} \left(A_{\kappa} u_{\kappa} + \nabla p_h|_{\kappa} \int_{\kappa} \phi_{\kappa} \right) = \sum_{\kappa \in T_h} \int_{\kappa} f \phi_{\kappa}$$

L'équation de continuité est donc modifiée comme suit :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \nabla \cdot u_h q^h &= \int_{\Omega} \nabla \cdot u_{h,1} q^h - \nu \sum_{\kappa \in T_h} \left(\int_{\kappa} \phi_{\kappa} u_{\kappa} \right) \nabla q_h|_{\kappa} \\
&= \int_{\Omega} \nabla \cdot u_{h,1} q^h - \nu \sum_{\kappa \in T_h} \left(\int_{\kappa} \phi_{\kappa} \right) u_{\kappa} \nabla q_h|_{\kappa} \\
&= \int_{\Omega} \nabla \cdot u_{h,1} q^h - \nu \sum_{\kappa \in T_h} \frac{1}{A_{\kappa}} \left(\int_{\kappa} \phi_{\kappa} \right) \left(\int_{\kappa} (f_h - \nabla p_h) \phi_{\kappa} \right) \nabla q_h|_{\kappa}
\end{aligned}$$

D'où nous tirons le schéma suivant, en posant $C_k h_{\kappa}^2 = \int_{\kappa} \phi_{\kappa}$:

$$\begin{cases} \nu(\nabla u_{h,1}, \nabla v) - (p_{h,1}, \nabla \cdot v) &= (f_h, v) & \forall v \in X \\ -(q, \nabla \cdot u_{h,1}) + \sum_{\kappa \in T_h} \frac{C_k}{A_k} h_{\kappa}^2 \int_{\kappa} (f_h - \nabla p_h) \cdot \nabla q_h \phi_{\kappa} &= 0 & \forall q \in M \end{cases} \quad (18)$$

La plupart du temps, f sera nul pour le problème de Stokes, d'où :

$$-(q, \nabla \cdot u_h) - \sum_{\kappa \in T_h} \frac{(\int_{\kappa} \phi_{\kappa})^2}{|\kappa|(\nabla \phi_{\kappa}, \nabla \phi_{\kappa})} (\nabla p_h, \nabla q) = 0 \quad \forall q \in M_h \quad (19)$$

$|\kappa|$ étant une mesure de κ . Nous allons maintenant déterminer la valeur de la norme L^2 de $\nabla\phi_\kappa$. En développant, il vient que :

$$\begin{aligned}\nabla\phi_\kappa &= \nabla(\lambda_1\lambda_2\lambda_3) \\ &= \nabla\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\nabla\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\nabla\lambda_3 \\ &= \frac{\vec{n}_1}{h_1}\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\frac{\vec{n}_2}{h_2}\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\frac{\vec{n}_3}{h_3}\end{aligned}$$

Dans la suite (voir Figure 3), nous appelons h_i la hauteur relativement au i -ème sommet de κ , \vec{c}_i le côté du triangle κ opposé au sommet i -ème sommet (de telle sorte que \vec{c}_i tourne en sens direct autour du i -ème sommet) et nous notons \vec{n}_i la normale unitaire extérieure à κ relative au côté \vec{c}_i . Nous avons alors :

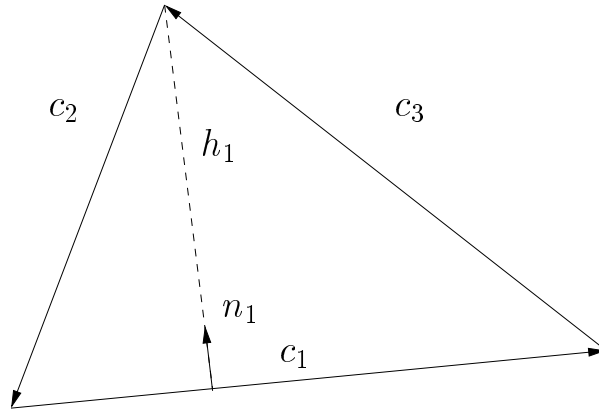


FIG. 3 – *Eléments géométriques dans l'élément P1-bulle/P1*

$$\begin{aligned}I_\kappa &= \int_\kappa \nabla\phi_\kappa \nabla\phi_\kappa \\ &= \int_\kappa \left(\frac{\vec{n}_1}{h_1}\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\frac{\vec{n}_2}{h_2}\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\frac{\vec{n}_3}{h_3} \right)^2 \\ &= 2|\kappa| \left(\frac{1}{h_1^2} \left(\int_{\kappa_0} \lambda_2^2\lambda_3^2 \right) + 2\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{h_1h_2} \left(\int_{\kappa_0} \lambda_1\lambda_2\lambda_3^2 \right) + 2\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3}{h_1h_3} \left(\int_{\kappa_0} \lambda_2^2\lambda_1\lambda_3 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h_2^2} \left(\int_{\kappa_0} \lambda_1^2\lambda_3^2 \right) + 2\frac{\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3}{h_2h_3} \left(\int_{\kappa_0} \lambda_1^2\lambda_2\lambda_3 \right) + \frac{1}{h_3^2} \left(\int_{\kappa_0} \lambda_1^2\lambda_2^2 \right) \right)\end{aligned}$$

Chaque intégrale peut être calculée exactement sur le triangle de référence κ_0 . De plus, comme $\vec{c}_i = \vec{c}_j + \vec{c}_k$, on a :

$$\frac{\vec{n}_i \cdot \vec{n}_j}{h_i h_j} = \frac{\vec{c}_i \cdot \vec{c}_j}{4|\kappa|} \quad \forall i, j = 1..3 \text{ and } i \neq j$$

Finalement, I_κ s'écrit :

$$\begin{aligned} I_\kappa &= \frac{2|\kappa|}{180} \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{4|\kappa|^2} (\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 + \vec{c}_1 \cdot \vec{c}_3 + \vec{c}_2 \cdot \vec{c}_3) \right) \\ &= \frac{2|\kappa|}{180} \left(\frac{1}{8|\kappa|^2} (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) \right) \\ &= \frac{1}{720|\kappa|} (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) \end{aligned}$$

Il en résulte que, en rassemblant tous les résultats :

$$\frac{(\int_\kappa \phi_\kappa)^2}{|\kappa|(\nabla \phi_\kappa, \nabla \phi_\kappa)} = \frac{|\kappa|^2}{5(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)}$$

D'où, (17) devient :

$$\begin{cases} \nu(\nabla u_{h,1}, \nabla v) - (p_h, \nabla \cdot v) = 0 & \forall v \in X_h \\ -(q, \nabla \cdot u_{h,1}) - \sum_{\kappa \in \mathcal{T}_h} \frac{|\kappa|^2}{5(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)} (\nabla p_h, \nabla q) = 0 & \forall q \in M_h \end{cases} \quad (20)$$

Pour le cas particulier d'une triangulation T_h de Ω faite de triangles rectangles isocèles, une expression plus simple peut être donnée pour (20). En effet, si $c_1 = c_2 = h$ définissent les deux côtés égaux de l'angle droit de κ , nous avons : $|\kappa| = \frac{h^2}{2}$ et $c_3^2 = 2h^2$, d'où

$$\frac{|\kappa|^2}{5(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)} = \frac{h^2}{80}.$$

Nous avons donc, grâce à l'utilisation des fonctions bulles, réussi à trouver un schéma pour l'équation de Stokes avec l'élément fini P1/P1. Pour cela, nous avons relaxé la condition d'incompressibilité en lui rajoutant un terme de régularisation. Bien sur, ce terme ruine a priori la consistance du schéma, pourtant, les résultats numériques mettent en évidence la bonne qualité des solutions obtenues à l'aide de ce schéma. En fait, R. Pierre a démontré (voir [13] et [14]) que (u_h, p_h) est solution de (17) si et seulement si $(u_{h,1}, p_h)$ est solution (18). De plus, si (u_h, p_h) est solution de (17), alors on a le résultat de convergence suivant : il existe une constante C positive telle que :

$$\|u - u_h\|_{H_0^1} + \|p - p_h\|_{L^2} \leq Ch \|f\|_{L^2}.$$

Il faut noter que dans (17), le majorant dépend à la fois des forces volumiques et des conditions aux limites qui sont imposées aux bords du domaine. Outre ses bons résultats, l'intérêt de cette méthode repose sur le fait que nous pouvons utiliser le même maillage pour u_h et p_h . En effet, le nombre d'inconnues à calculer pour un problème de type P1-bulle / P1 en deux dimensions s'élève à $3Ns + 2Nt$ avec Ns le nombre de points de maillage et Nt le nombre de triangles, alors que pour une formulation de type P1, il est de $3Ns$. Comme $Nt \simeq 2Ns$, le fait de calculer la bulle double au moins le nombre d'inconnues. Nous allons maintenant étudier plus en détail l'utilisation des interpolations P1 régularisés.

3.4 L'élément P1/P1 régularisé

L'utilisation de différents espaces d'interpolation pour la vitesse et la pression, dans le but de satisfaire la très contraignante condition inf-sup, augmente considérablement la difficulté de codage d'une routine de résolution des équations de Navier-Stokes. Le but des méthodes de régularisation est de modifier l'équation de continuité afin de relaxer la condition inf-sup, et ainsi permettre l'emploi d'une interpolation d'ordre égal pour u et v . Cette interpolation nous permet d'utiliser les mêmes points de maillage pour le calcul de u_h et p_h tout en limitant le nombre de variables. Les méthodes de stabilisation reposent sur le fait que la contrainte

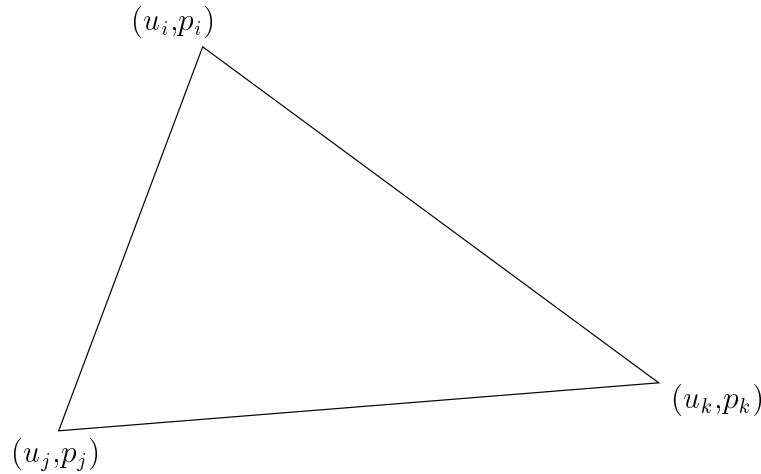


FIG. 4 – Degrès de liberté pour l'élément P1/P1 en dimension 2

d'incompressibilité empêche, dans le cas P1/P1 par exemple, la réalisation de la condition inf-sup car il est possible de construire une solution au problème (4) telle que γ dans (14) soit nul. Pour cela, nous introduisons une forme bilinéaire, notée s et nous considérons la

formulation variationnelle stabilisée suivante :

$$\begin{cases} \alpha(u_h, v) + \nu(\nabla u_h, \nabla v) - (p_h, \nabla \cdot v) & = (f, v) & \forall v \in X_h, \\ -(q, \nabla \cdot u_h) - s(p_h, q) & = 0 & \forall q \in M_h. \end{cases} \quad (21)$$

Cette équation peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \alpha I + \nu A & B^t \\ B & -S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_h \\ p_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Il existe différentes formules pour s , parmi lesquelles [20] :

$$s(p_h, q) = -\epsilon(p_h, q), \quad (23)$$

$$s(p_h, q) = -\epsilon\left(\frac{\partial p}{\partial t}, q\right), \quad (24)$$

$$s(p_h, q) = \epsilon(\Delta p, q) \quad \text{with } \frac{\partial p}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (25)$$

$$s(p_h, q) = \epsilon(\Delta p_t, q) \quad \text{with } \frac{\partial p_t}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (26)$$

où ϵ est un paramètre supposé petit. (23) est la méthode de pénalisation, (24) la méthode de compressibilité artificielle et (25) la méthode de stabilisation de pression. (26) à récemment été introduite par Jie Shen (voir [20]). Grâce à (22), nous pouvons réécrire la forme matricielle de la condition inf-sup :

$$\gamma^2 = \min_{p \neq 0} \frac{p^t B A^{-1} B^t p + S}{p^t Q p},$$

qui est équivalente à la forme définie précédemment si $\|s\| \rightarrow 0$. Il est aussi possible de trouver des estimations d'erreurs, voir par exemple [21]. L'utilisation de ces régularisations pour résoudre les équations de Navier-Stokes pose néanmoins un problème auquel ils n'est pas toujours facile de répondre. En effet, nous avons implicitement introduit un paramètre ϵ fixant l'intensité de la stabilisation dont la valeur ne peut pas être calculée de façon simple dans la plupart des cas. De plus, si ϵ est choisi trop petit, le système (21) devient de plus en plus mal conditionné, alors que si ϵ est trop grand, nous perdons la consistance et l'incompressibilité du système peut être totalement perdue. Il existe cependant des cas pour lesquels ϵ peut être calculé exactement. Nous avons vu, dans la partie précédente, que pour l'équation de Stokes, l'emploi de la fonction bulle dans l'espace des vitesse peut être considéré comme une stabilisation de type (24), donnée par

$$s(p_h, q) = \sum_{\kappa} \int_{\kappa} \epsilon_{\kappa} \nabla p_h \cdot \nabla q, \quad (27)$$

où d'après (20) ϵ_{κ} est donné par

$$\epsilon_{\kappa} = \frac{|\kappa|^2}{5(c1^2 + c2^2 + c3^2)}.$$

4 Discrétisation en temps : méthode des caractéristiques

4.1 Introduction

Nous allons, dans cette section, nous concentrer sur la discrétisation en temps des équations de Navier-Stokes par la méthode des caractéristiques. Cette méthode, aussi connue sous le nom de méthode de Lagrange-Galerkin, a été introduite par Benqué [1]. Le but de cette méthode est d'introduire une discrétisation en temps qui permet d'éviter les conditions de stabilité contraignantes des schémas de discrétisation classiques partiellement explicites.

4.2 Définitions

Soient $u \in \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}^d$ et $p \in \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ solutions du système (4) défini précédemment, que l'on rappelle ici :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p & = f & \text{in } \Omega \times]0, T[\\ \nabla \cdot u & = 0 & \text{in } \Omega \times]0, T[\\ u(t=0) & = u_0 \\ u & = u|_{\Gamma} & \text{in } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

Notre but dans cette section est de trouver une approximation du terme non-linéaire de convection $\partial_t u + (u \cdot \nabla)u$ à l'aide de méthodes des caractéristiques d'ordre un et plus en maillage fixe ou mobile. On rappelle ici que le système (4) peut s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - \nu \Delta u + \nabla p & = f & \text{in } \Omega \times]0, T[\\ \nabla \cdot u & = 0 & \text{in } \Omega \times]0, T[\\ u(t=0) & = u_0 \\ u & = u|_{\Gamma} & \text{in } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \quad (28)$$

où la dérivée "droite" d/dt signifie qu'une dérivée particulaire (dite aussi totale) a été calculée, c'est-à-dire une dérivée simple par rapport au temps, prise le long des courbes caractéristiques définies par :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} & = u(X(x, s; t), t) \\ X(x, s; s) & = x \end{cases} \quad (29)$$

Dans ce système, le terme de convection non-linéaire est désormais caché dans la dérivée totale de la première équation. Son calcul reviendra en fait à déterminer les courbes caractéristiques issues des points d'intégration définis un peu plus loin. Pour cela, il nous faut théoriquement déterminer une solution de (29). Bien sur, dans l'espace de discrétisation en éléments finis X_h défini précédemment, ceci n'est pas possible et il nous faudra interpoler une telle solution au cours du temps et un bon moyen de calculer ces interpolations consiste à utiliser la solution formelle de (29), qui s'écrit aussi :

$$X(x, s; t) = x + \int_s^t u(X(x, s; \tau), \tau) d\tau \quad (30)$$

On peut alors voir que dans le cas d'une approximation par éléments finis de type P1 $X(x,s;t)$ est facilement calculable.

4.3 Discrétisation en temps

Nous allons maintenant proposer une discrétisation en temps de l'équation (28) grâce à la méthode des caractéristiques. Si l'on pose $t^n = n\Delta t$ pour $\Delta t > 0$, nous pouvons définir les fonctions discrètes en temps $v^n : \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que :

$$v^n(x) = v(x, t^n) = v(x, n\Delta t)$$

où le temps final T est de la forme $T = N\Delta t$ avec $N \in \mathbb{N}$. Nous noterons maintenant u_h^{n+1} et p_h^{n+1} les approximations par éléments finis de u^{n+1} et p^{n+1} solutions des équations de Navier-Stokes (28) à l'instant t^{n+1} . Alors u_h^{n+1} et p_h^{n+1} sont solutions de la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left(\frac{du_h^{n+1}}{dt}, v \right) + \nu(\nabla u_h^{n+1}, \nabla v) - (p_h^{n+1}, \nabla \cdot v) = (f^n, v) & \forall v \in X_h \\ -(q, \nabla \cdot u_h^{n+1}) = 0 & \forall q \in M_h \end{array} \right. \quad (31)$$

Il nous faut maintenant discrétiser la dérivée totale $\frac{du_h^{n+1}}{dt}$. Pour cela, définissons une approximation h^{n+1} de l'opérateur de convection $\partial_t u + (u \cdot \nabla)u$, c'est-à-dire :

$$h^{n+1}(x) = \left(\frac{\partial u_h}{\partial t} + u_h \cdot \nabla u_h \right) (x) + O(\Delta t^p) \quad \text{avec } p \in \mathbb{N} \quad (32)$$

Comme nous cherchons à approcher une dérivée totale, nous pouvons par exemple prendre pour h^{n+1} une combinaison linéaire des valeurs de u prises sur les caractéristiques à des instants précédents, utilisant donc les $\{u_h^i\}_{1 \leq i \leq n+1}$ mais aussi les courbes caractéristiques elles-mêmes définies en (29). Un exemple est donné ici :

$$h^{n+1}(x) = \alpha_{m+1} u^{n+1}(x) + \sum_{i=1}^m \alpha_i u_h^{n+1-i} \circ X_{(-i\Delta t)}(x),$$

avec $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq m+1} \in \mathbb{R}$ et $X_{(-i\Delta t)} = X(x, t^{n+1}; t^{n+1-i})$ une solution de (29). Il en résulte que $h^{n+1}(x)$ est une approximation de la dérivée totale de $u_h^{n+1}(x)$ en temps et donc nous pouvons l'injecter dans la formulation variationnelle des équations de Navier-Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha_{n+1}(u_h^{n+1}, v) + \nu(\nabla u_h^{n+1}, \nabla v) - (p_h^{n+1}, \nabla \cdot v) = (g^n, v), & \forall v \in X_h \\ -(q, \nabla \cdot u_h^{n+1}) = 0, & \forall q \in M_h \\ \text{avec } (g^n, v) = (f^n, v) - \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i (u_h^{n-i} \circ X_{(-(i+1)\Delta t)}(x), v), & \forall v \in X_h \end{array} \right. \quad (33)$$

Nous pouvons reconnaître ici la formulation faible de l'équation de Stokes généralisée définie en (12). Nous pouvons donc utiliser les formules de discrétisation en espace définies dans la partie précédente, du moins pour le membre de gauche. Le seul point délicat à traiter est en fait l'intégration des termes $(u_h^{n+1-i} oX_{(-i\Delta t)}(x), v)$. En effet, $X_{(-i\Delta t)}$ n'est en général pas dans l'espace de discrétisation X_h . Il nous faut alors définir une formule de quadrature pour l'intégration des termes :

$$(u_h^{n-i} oX_{(-(i+1)\Delta t)}(x), v) = \sum_{\mathcal{T}} \sum_j u_h^{n-i} oX_{(-(i+1)\Delta t)}(g_j) v(g_j) \pi_j,$$

$\{g_j\}$ étant les points de Gauss et $\{\pi_i\}$ leur poids respectifs. Il est cependant à noter que ces intégrations par quadratures sont les causes principales d'instabilités numériques, comme nous le verrons loin.

Finalement, définissons l'erreur de consistance $e(x, t^{n+1})$ qui nous permettra de définir l'ordre de la méthode employée :

$$e(x, t^{n+1}) = (h(x, t^{n+1}) - \nu \Delta u(x, t^{n+1}) + \nabla p(x, t^{n+1}) - f(x, t^{n+1})).$$

En utilisant (4), la définition de $h^{n+1}(x)$ et sous certaines conditions sur u qui restent à déterminer, nous avons :

$$e(x, t^{n+1}) = O(\Delta t^p).$$

La constante p représente l'ordre de la méthode.

Nous allons maintenant nous attacher à définir un moyen de construire une approximation des courbes caractéristiques.

4.4 La construction des caractéristiques

Comme nous venons de le voir, la prise en compte du calcul du terme non-linéaire de convection repose sur la détermination des courbes caractéristiques issues des points de Gauss utilisés pour l'approximation du second membre. Il nous faut donc, si l'on se donne la position x d'une particule de vitesse u^{n+1} à l'instant t^{n+1} , calculer par exemple le pied de la caractéristique, noté x^n , à l'instant t^n . Pour cela, nous devons approcher la formule qui découle de (30) :

$$X(x, t^{n+1}; t^n) = x^n = x - \int_{t^n}^{t^{n+1}} u(X(x, t^n; \tau), \tau) d\tau.$$

Comme nous ne connaissons que les $\{u^i\}_{i=0}^n$, et pas u^{n+1} , nous approchons cette formule avec la formule d'Euler de premier ordre en utilisant u^n :

$$\bar{x} = x - u^n(x) \Delta t \tag{34}$$

Si nous utilisons un développement limité autour de t^{n+1} , nous obtenons :

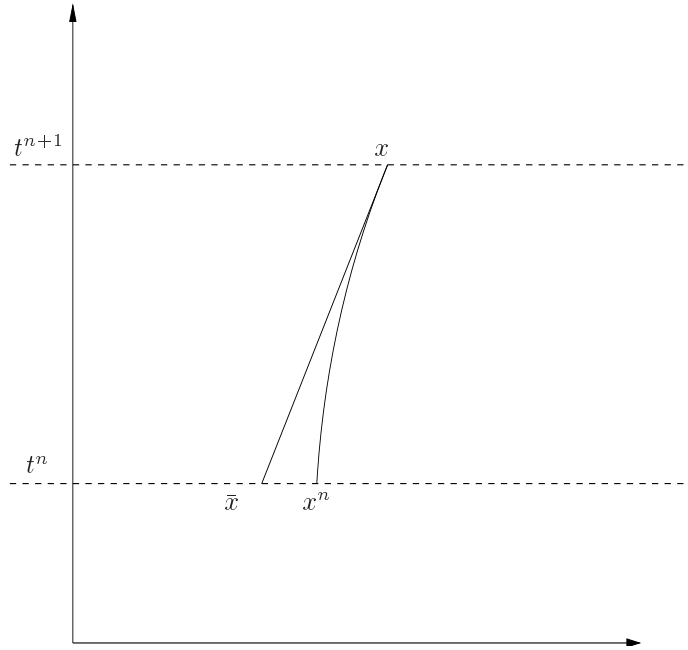


FIG. 5 – Approximation linéaire des caractéristiques

$$\begin{aligned} u^n &= u(t^{n+1} - \Delta t) \\ &= u(t^{n+1}) - \Delta t \frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial t^2} + O(\Delta t^3) \end{aligned}$$

Donc, si $\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial t^2}$ est régulier et localement borné :

$$\bar{x} = x - \Delta t u^{n+1} + \Delta t^2 \frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} + O(\Delta t^3) \quad (35)$$

De plus, nous avons :

$$x^n = x(t^{n+1} - \Delta t) = x^{n+1} - \Delta t \frac{dx^{n+1}}{dt} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2 x^{n+1}}{dt^2} + O((\Delta t)^3)$$

Maintenant, en utilisant la définition des courbes caractéristiques :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u(x(t), t) \\ \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{du(x(t), t)}{dt} \end{aligned}$$

Au final, comme par définition $x^{n+1} = x$ et en soustrayant (35) au développement de x^n autour de t^{n+1} , nous obtenons la formule suivante :

$$x^n - \bar{x} = \frac{\Delta t^2}{2} (\nabla u^{n+1} \cdot u^{n+1} - \frac{\partial u^{n+1}}{\partial t}) + O((\Delta t)^3).$$

Cette formule définit une approximation au premier ordre du pied de la caractéristique x^n issue du point x^{n+1} . L'utilisation d'une formule d'ordre plus élevé peut se montrer nécessaire. On propose par exemple :

$$u^{n+1} = 2u^n - u^{n-1} + O((\Delta t)^2).$$

Alors, en utilisant le même raisonnement que précédemment avec :

$$\bar{x} = x - (2u^n(x) - u^{n-1}(x)) \Delta t,$$

nous obtenons :

$$x^n - \bar{x} = \frac{\Delta t^2}{2} (\nabla u^{n+1} \cdot u^{n+1} + \frac{\partial u^{n+1}}{\partial t}) + O((\Delta t)^3)$$

Ceci implique que les deux approximations de u^{n+1} à l'ordre 1 et 2 nous donnent une approximation x^n du premier ordre. Mais, comme nous le verrons un peu plus loin, ces deux approximations ne se comportent pas de la même façon dans des schémas d'ordres différents en temps.

Afin d'améliorer la position de \bar{x} dans le maillage, notamment pour des pas de temps assez grands, il est possible de subdiviser le pas de temps Δt . Si l'on considère une constante $l \in \mathbb{N}^*$ comme le paramètre de subdivision et en posant que $\tau = \frac{\Delta t}{l}$, cette méthode consiste à recalculer des approximations successives $\{x_i\}$ de \bar{x} en recalculant la vitesse aux points x_i par projection sur l'espace de discrétisation. On obtient donc l'algorithme suivant, pour $1 \leq i \leq l$:

$$\begin{aligned} x_0 &= x \\ x_i &= x_{i-1} - u^n(x_{i-1})\tau \\ \bar{x} &= x_l \end{aligned}$$

La Figure 6 représente un exemple de cette méthode en dimension 2 pour un maillage triangulaire. L'algorithme général de cette méthode est représenté par la Figure 7, avec :

$$u^* = \begin{cases} u^n \\ \text{ou} \\ 2u^n - u^{n-1} \end{cases}$$

suivant l'approximation de u^{n+1} qui sera utilisée. La subdivision du pas de temps est un bon moyen de coller le plus possible aux courbes caractéristiques. De plus, comme nous utilisons une méthode implicite couplée à la méthode des caractéristiques, il nous est possible d'utiliser un pas de temps assez grand; il faudra donc néanmoins veiller à ce que l'algorithme de

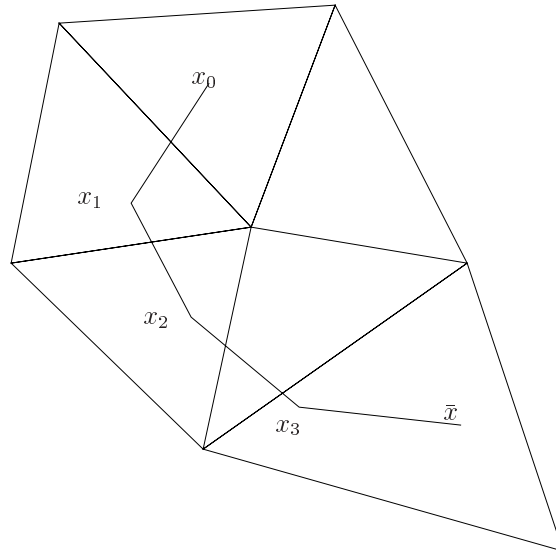


FIG. 6 – Méthode de subdivision

recherche du pied des caractéristiques ne saute trop d'éléments à la fois, ce qui pourrait ruiner l'approximation de \bar{x} . Malheureusement, cette méthode possède plusieurs désavantages. En effet, l'étape 2 de l'algorithme général est critique et demande un algorithme optimal de recherche de position dans un maillage optimal. Cet algorithme doit être capable de donner l'élément du maillage dans lequel se trouve un point x_i quelconque sachant la position de x_{i-1} et son élément et peut s'avérer très coûteux si l'on saute à chaque sous-cycle plusieurs éléments à la fois. Nous serions alors tenté de choisir l le plus grand possible, mais ceci entraînerait l'apparition de deux problèmes : premièrement, le temps global de l'algorithme aurait tendance à augmenter de façon prohibitive du fait des nombreuses interpolations de vitesse à effectuer. De plus, comme les x_i ne sont pas en général parmi les points de discrétisation, les interpolations induites de $u^n(x_i)$ produisent une erreur numérique qui risque de s'accumuler au fur et à mesure que l'on remonte la courbe caractéristique. Deuxièmement, dans les parties du domaine où la vitesse du fluide est constante, un temps de calcul énorme serait alors perdu pour calculer toujours la même vitesse. L'idéal serait d'être capable de trouver une subdivision du pas de temps qui s'adapterait au maillage. Si une telle subdivision est triviale pour un maillage régulier, il n'en est pas de même pour un maillage quelconque.

Néanmoins, si l'on suppose que la vitesse est supposée constante dans chaque élément du maillage, nous pouvons décider de ne recalculer la vitesse dans chaque sous-cycle que si la courbe caractéristique intersecte le côté d'un élément : si l'on considère un point x_i de vitesse u_i^n et κ_i l'élément qui le contient. C'est l'algorithme qui était utilisé dans le code initial [10]. Il nous faut donc calculer l'intersection de la droite issue de x_i et de vecteur

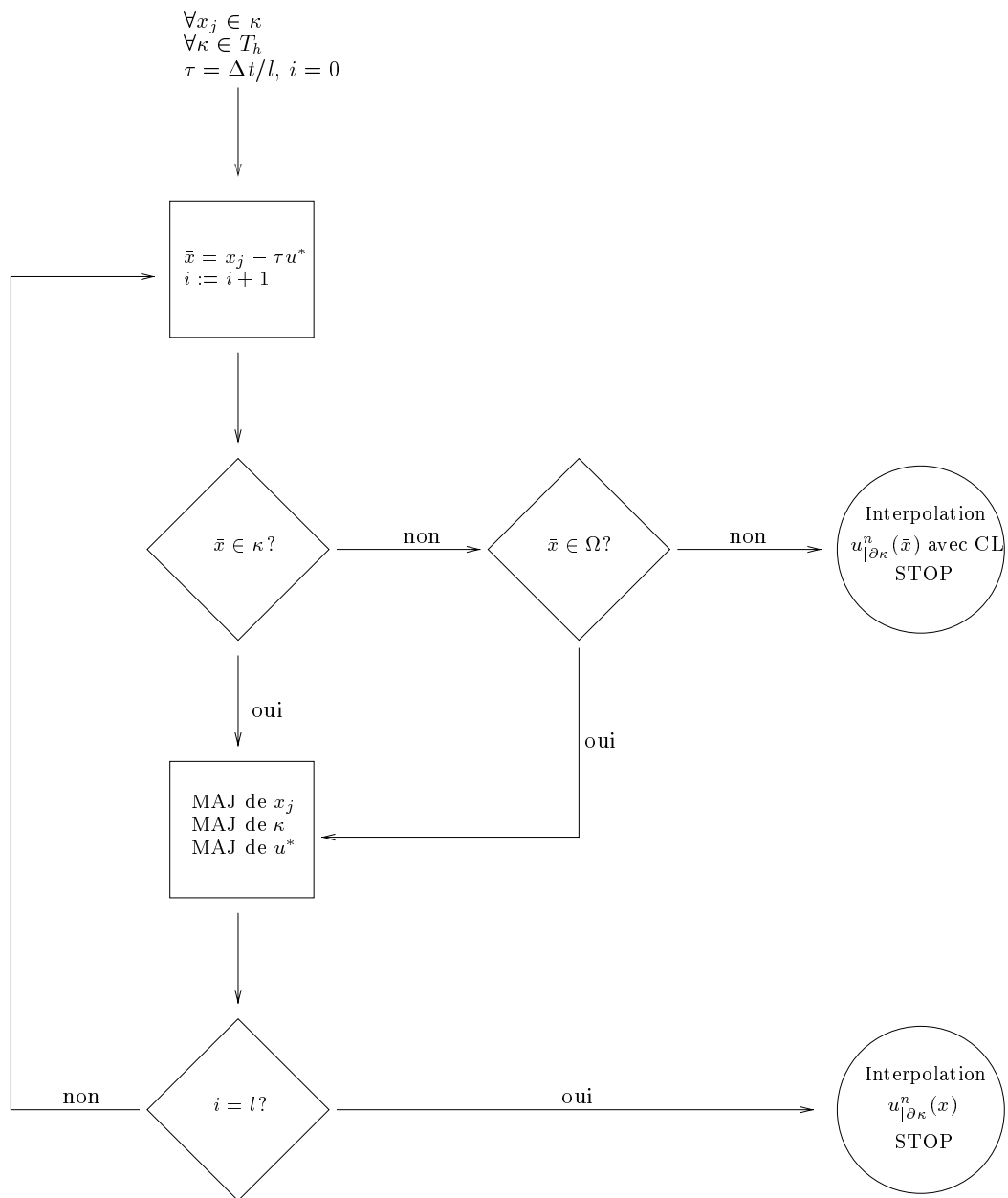


FIG. 7 – Algorithme général de subdivision

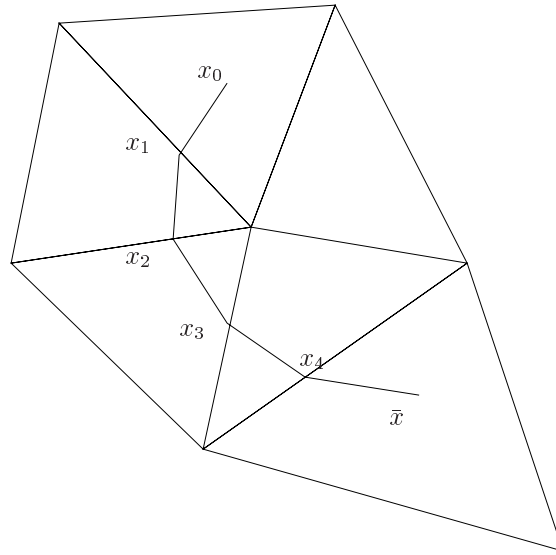


FIG. 8 – Méthode d'intersection

directeur u_i et la frontière de l'élément κ_i . Pour cela, on détermine quel côté va être coupé par le vecteur vitesse u_i^n : si l'on appelle A , B et C les trois sommets de l'élément κ_i (on se place en deux dimensions d'espace pour simplifier; voir Figure 9), $a = A - x_i$ et $b = B - x_i$, alors la demi-droite issue de x_i de vecteur directeur u_i intersecte le côté AB si, et seulement si :

$$\frac{u_i^n}{\|u_i^n\|} \cdot \left(\frac{a}{\|a\|} + \frac{b}{\|b\|} \right) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\|a\|} + \frac{b}{\|b\|} \right)^2,$$

formule valable pour tout point de l'élément κ_i , y compris sa frontière. Grâce à ce critère, il est facile de déterminer le côté que va emprunter la courbe caractéristique. La Figure 10 représente l'algorithme d'intersection. Passons maintenant à la discrétisation de la dérivée totale proprement dite.

4.5 Approximation de la dérivée totale : maillages fixes

4.5.1 Approximation du premier ordre

Maintenant que nous avons déterminé comment remonter les courbes caractéristiques, il nous est possible d'approcher la dérivée totale $\frac{du}{dt}$. Pour cela, considérons une triangulation

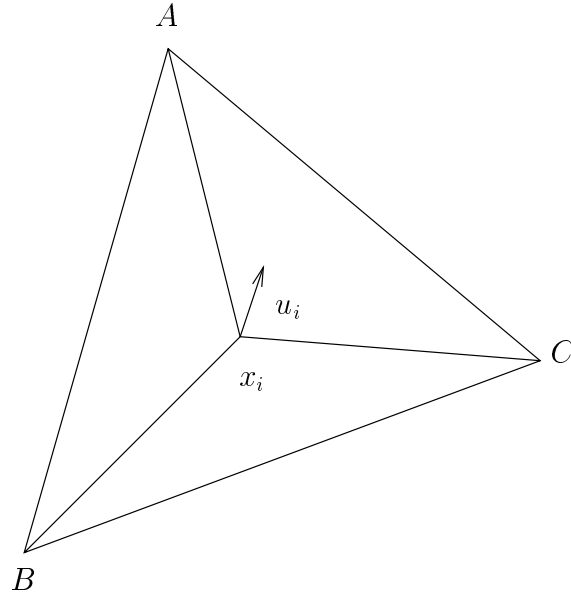


FIG. 9 – Calcul de la face de sortie d'une caractéristique dans un triangle

T_h fixe de Ω . Soit alors l'approximation en différences finies de la dérivée totale suivante :

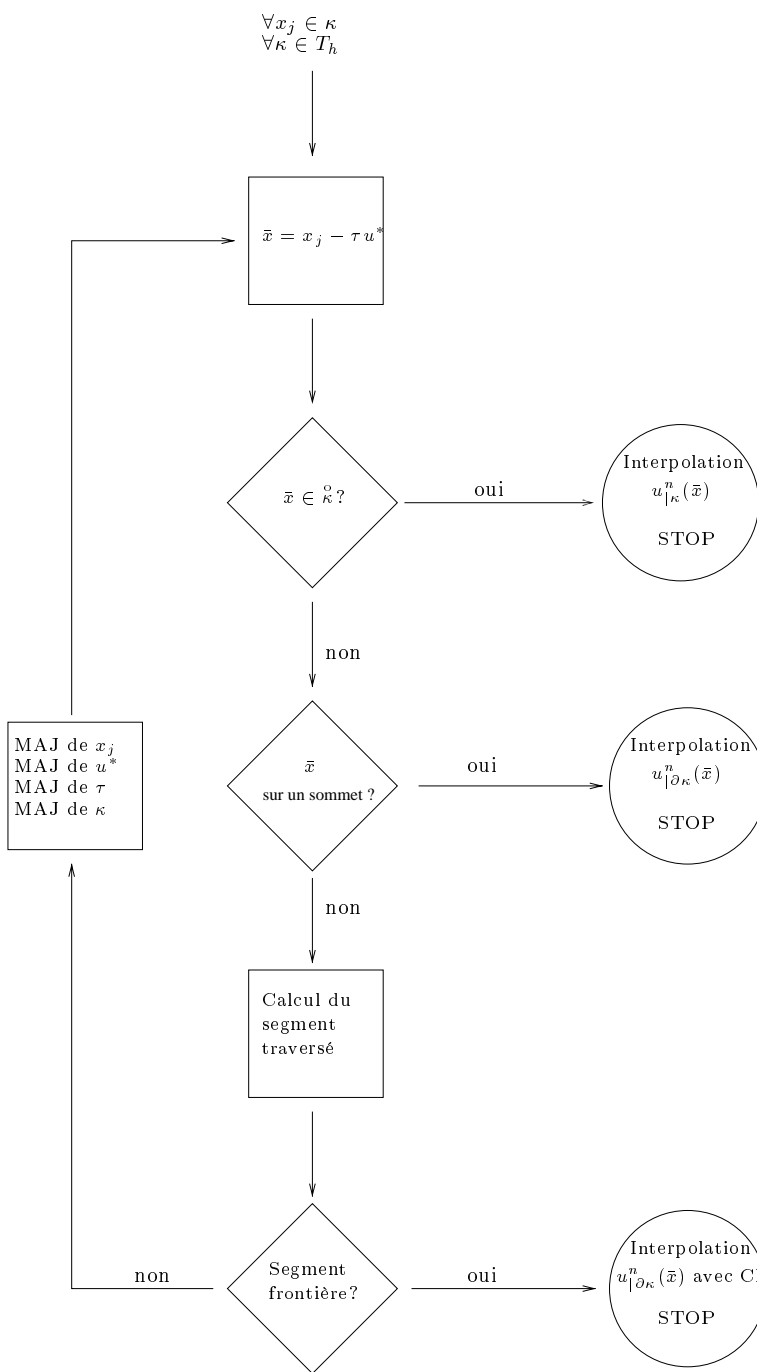
$$\left\{ \begin{array}{l} h(x, t^{n+1}) := \frac{u(x, t^{n+1}) - u(\bar{x}, t^n)}{\Delta t}, \\ \text{avec} \\ \bar{x} \equiv X_{(u^n, \Delta t)}(x) = x - \Delta t u^n(x). \end{array} \right. \quad (36)$$

Ce schéma, appelé schéma d'Euler rétrograde, induit le schéma par éléments finis suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(u_h^{n+1}, v)}{\Delta t} + \nu(\nabla u_h^{n+1}, \nabla v) - (p_h^{n+1}, \nabla \cdot v) = (f^n, v) + \frac{(u^n \circ X_{(u^n, \Delta t)}, v)}{\Delta t} \quad \forall v \in X_h \\ -(q, \nabla \cdot u_h^{n+1}) = 0 \quad \forall q \in M_h \end{array} \right. \quad (37)$$

L'utilisation des caractéristiques pour la résolution de (4) se fait donc en deux temps :

- d'abord, il nous faut remonter les caractéristiques à partir de points de Gauss utilisés pour la quadrature du second membre. On détermine ainsi les $u^n(\bar{x})$. Ceci peut se faire en utilisant une des deux méthodes présentées précédemment.
- une fois les courbes caractéristiques déterminées et le second membre calculé, il ne reste plus qu'à inverser la matrice issue de la discrétisation de (12).

FIG. 10 – *Algorithme général d'intersection.*

Examinons la précision de cette méthode. En utilisant un développement limité, il vient, en utilisant (34) et $\|x - \bar{x}\| = O(\Delta t)$:

$$\begin{aligned} u(x, t^{n+1}) - u(\bar{x}, t^n) &= \nabla u^{n+1}(x - \bar{x}) - \Delta t \frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} \\ &+ \frac{1}{2} \left(\Delta t^2 \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial t^2} + 2\Delta t(x - \bar{x}) \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial t \partial x} + |x - \bar{x}|^2 \frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} \right) + O(\Delta t^2) \\ &= \nabla u^{n+1}(\Delta t u^{n+1} + O(\Delta t^2)) - \Delta t \frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} + O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

et donc :

$$\frac{u(x, t^{n+1}) - u(\bar{x}, t^n)}{\Delta t} = \nabla u^{n+1} \cdot u^{n+1} + \frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} + O(\Delta t).$$

Il en résulte que le schéma d'Euler rétrograde (37) permet de construire un schéma en temps au moins du premier ordre, pour les équations de Navier-Stokes incompressible.

Remarque : il faut garder à l'esprit que l'approximation de la dérivée totale en temps proposée dans (36) n'est pas directement implémentée telle quelle, mais plus précisément suivant l'une des deux stratégies proposées à la section précédente. Lorsque le pas de temps Δt est assez petit (en fait lorsque le nombre de Courant local est plus petit que un), toutes les stratégies sont à peu près équivalentes à l'approximation directe $\bar{x} = x - \Delta t u^n(x)$ proposée dans (36).

Le principal avantage de la discrétisation des équations de Navier-Stokes par (37) réside dans le fait qu'à chaque itération, il nous suffit de conserver un seul champ de vitesse, à savoir u^n . Ainsi, u^{n+1} peut être déduit uniquement de u^n . Ceci est très appréciable quand le nombre d'inconnues devient très grand. Malheureusement, ce schéma induit une quantité de diffusion numérique parfois inacceptable, surtout dans le cas d'un écoulement à haut nombre de Reynolds (la viscosité physique est noyée dans la viscosité numérique artificiellement introduite). Afin de réduire cet diffusion, numérique, nous examinons maintenant une discrétisation précise à l'ordre deux.

4.5.2 Ordre 2

Nous allons considérer le schéma de discrétisation de la dérivée totale suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} h(x, t^{n+1}) = \frac{3u^{n+1}(x) - 4u^n(\bar{x}) + u^{n-1}(\bar{\bar{x}})}{2\Delta t} \\ \text{avec :} \\ \bar{x} \equiv X_{(2u^n - u^{n-1}, \Delta t)}(x) = x - \Delta t (2u^n - u^{n-1}) \\ \bar{\bar{x}} \equiv X_{(2u^n - u^{n-1}, 2\Delta t)}(x) = x - 2\Delta t (2u^n - u^{n-1}) \end{array} \right. \quad (38)$$

Ce schéma fut introduit par Boukir et al [2]. Il découle de ce schéma la formulation faible suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3(u_h^{n+1}, v)}{2\Delta t} + \nu(\nabla u_h^{n+1}, \nabla v) - (p_h^{n+1}, \nabla \cdot v) = \\ (f^n, v) + \frac{[2u^n \circ X_{(2u^n - u^{n-1}, \Delta t)} - 1/2u^{n-1} \circ X_{(2u^n - u^{n-1}, 2\Delta t)}], v)}{\Delta t} \quad \forall v \in X_h \\ -(q, \nabla \cdot u_h^{n+1}) = 0 \quad \forall q \in M_h \end{array} \right. \quad (39)$$

Comme précédemment, examinons l'erreur de consistance en temps de ce schéma. En écrivant un développement limité de u autour de (x, t^{n+1}) (les dérivées partielles sont notées de manière abrégée, sans rappeler qu'elles sont ici toutes prise en (x, t^{n+1})), il vient :

$$\begin{aligned} u(\bar{x}, t^n) &= u - \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \overline{\overline{\overline{u}}}(\bar{x} - x) + \frac{1}{2} \overline{\overline{\overline{\nabla \nabla u}}}(\bar{x} - x)(x - \bar{x}) \\ &+ \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \overline{\overline{\overline{\nabla u}}}(\bar{x} - x) + O(\Delta t^3, |\bar{x} - x|^3) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} u(\bar{\bar{x}}, t^{n-1}) &= u - 2\Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + 2\Delta t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \overline{\overline{\overline{u}}}(\bar{\bar{x}} - x) + \frac{1}{2} \overline{\overline{\overline{\nabla \nabla u}}}(\bar{\bar{x}} - x)(x - \bar{\bar{x}}) \\ &- 2\Delta t \overline{\overline{\overline{\nabla u}}} \frac{\partial u}{\partial t}(\bar{\bar{x}} - x) + O(\Delta t^3, |\bar{\bar{x}} - x|^3) \end{aligned}$$

Finalement, nous pouvons écrire :

$$\frac{3u^{n+1}(x) - 4u^n(\bar{x}) + u^{n-1}(\bar{\bar{x}})}{2\Delta t} = \overline{\overline{\overline{\nabla u}}} \cdot u + \frac{\partial u}{\partial t} + O(\Delta t^2),$$

ce qui prouve que notre schéma en temps est précis au moins au deuxième ordre. La détermination de $h(x, t^{n+1})$ dans la formule (38) diffère de (36) par le nombre de champs, et donc de caractéristiques, à remonter. Ici, il nous faut connaître les valeurs de $u^n(\bar{x})$ et $u^{n-1}(\bar{\bar{x}})$. Il nous faudra donc remonter deux champs différents (avec des durées de remontée différentes). Le coût de la partie caractéristique s'en trouvera donc grandement augmentée, mais le schéma global d'ordre deux obtenu sera débarrassé d'une grande partie de la diffusion numérique induite par le schéma du premier ordre.

Il est intéressant de noter que seule la formule d'ordre un (38) pour $\bar{\bar{x}}$ nous permet d'atteindre une erreur de consistance d'ordre 2 en temps pour (39) (voir [2] et [6]). Nous serions tentés d'utiliser un schéma plus naturel pour $\bar{\bar{x}}$:

$$\bar{\bar{x}} = \bar{x} - \Delta t(2u^n(\bar{x}) - u^{n-1}(\bar{x})).$$

Ce schéma possède des qualités indéniables, la plus attrayante étant que pour déterminer le second pied de caractéristique $\bar{\bar{x}}$, nous pourrions prendre comme point de départ le premier pied \bar{x} au lieu de x . Ceci entraîne un coût de calcul bien inférieur à (36) dans lequel il nous faut repartir de x afin d'obtenir $\bar{\bar{x}}$.

4.6 Approximation de la dérivée totale : maillages mobiles

4.6.1 Formulation ALE

Nous avons jusqu'à présent considéré que le fluide s'écoulait dans un domaine borné qui ne subissait aucune déformation. Dans ce cadre, nous avons utilisé une formulation eulérienne du fluide : nous nous sommes intéressé à l'instant t aux particules se trouvant dans un volume fixe \mathcal{V} quelconque qui restait inchangé au cours du temps. Les particules se trouvant en un point M quelconque de \mathcal{V} à l'instant t sont repérées grâce aux coordonnées eulériennes x qui représentent les coordonnées d'un point du domaine en considérant le laboratoire comme référentiel. Ainsi, à deux instants différents, le volume de contrôle \mathcal{V} ne contient pas les mêmes particules. Cette formulation convient bien à l'observation d'un écoulement dans un domaine fixe mais trouve ses limites en cas de domaines déformables et en particulier le long de l'interface fluide-structure dans le cas d'une structure mobile. Il vaut mieux, dans ce cas, utiliser une formulation lagrangienne, beaucoup plus efficace près de cette interface. Avec cette formulation, plutôt que de nous intéresser au volume fixe \mathcal{V} , nous allons suivre au cours du temps les particules contenues dans un volume $\mathcal{V}(t)$ qui va donc évoluer au cours du temps. Ce volume est appelé volume matériel et les particules qu'il contient sont repérées grâce à des coordonnées matérielles notées a . En utilisant cette formulation, il nous sera facile de contrôler le fluide près de l'interface fluide-structure mobile. Cette formulation pose néanmoins deux problèmes : premièrement, on ne peut suivre correctement le fluide sur des temps très longs. Deuxièmement, dans le cas d'écoulements complexes, tracer la trajectoire des particules devient problématique.

Considérons maintenant un maillage mobile, dont la vitesse vaut w . Dans le cas d'une description purement eulérienne, w est nulle alors que pour une approche lagrangienne, w est égale à la vitesse du fluide. Le but de la formulation ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) est de proposer une approche qui permet de passer de l'une à l'autre des formulations décrites ci-dessus de façon arbitraire et continue. Pour plus de détails sur la formulation ALE, voir par exemple [24]. Nous allons maintenant nous intéresser à la méthode des caractéristiques couplée à la formulation ALE.

4.6.2 Méthode des caractéristiques en formulation ALE

Réécrivons l'équation de continuité de (28) en faisant apparaître les coordonnées eulériennes implicitement utilisées : u et p étant en coordonnées eulériennes, il vient :

$$\frac{du(X(x,s;t),t)}{dt} - \nu \Delta u(x,t) + \nabla p(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in \Omega \times]0,T[\quad (40)$$

Rappelons que $X(x,s;t)$ est la position de la courbe caractéristique passant au point x à $t = s$, c'est-à-dire qui vérifie le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = u(X(x,s;t),t) \\ X(x,s;s) = x \end{cases}$$

Nous appelons ξ les coordonnées mixtes du maillage mobile. Ces coordonnées fictives restent constantes lorsque l'on suit un point du maillage dans son mouvement : si le maillage est fixe, ces coordonnées sont équivalentes aux coordonnées eulériennes, tandis que si le maillage est mobile et lié au fluide, ces coordonnées sont égales aux coordonnées lagrangiennes. Nous pouvons réécrire (40) grâce aux coordonnées eulériennes $x(\xi, t)$ en :

$$\frac{du(X(x(\xi, s), s; t), t)}{dt} - \nu \Delta u(x(\xi, t), t) + \nabla p(x(\xi, t), t) = 0 \quad \forall (x, t) \in \Omega \times]0, T[\quad (41)$$

Par la suite, nous écrirons n'importe quelle quantité en fonction des coordonnées mixtes (ceci demande l'introduction de fonctions annexes, surmontés d'une barre). Le passage aux coordonnées eulériennes et aux fonctions précédemment étudiées est toujours possible, grâce à la définition ci-dessous :

$$u(\xi, t) \leftarrow \bar{u}(x(\xi, t), t).$$

Dans la suite, une fonction notée \bar{u} est implicitement exprimée en fonction des coordonnées Eulériennes, tandis que la fonction correspondante u est implicitement exprimée en fonction des coordonnées mixtes. En utilisant la fonction inverse qui à un couple (x, t) fait correspondre sa coordonnée mixte $\xi = \xi(x, t)$, nous obtenons alors les équations de Navier-Stokes en coordonnées mixtes, en réécrivant l'équation (41) :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(u(\xi(X(x(\xi, t), s; t), t), t) \right) - \nu \Delta_x u(\xi, t) + \nabla_x p(\xi, t) = 0 & \forall (x, t) \in \Omega \times]0, T[\\ \nabla_x \cdot u(\xi, t) = 0 & \forall (x, t) \in \Omega \times]0, T[\end{cases} \quad (42)$$

Dans l'équation précédente, le passage en coordonnées mixtes (et maillage mobile) n'introduit pas véritablement de difficulté supplémentaire pour les termes autres que la dérivée particulaire. En effet, la construction de espaces d'approximation en éléments finis passe par des éléments de base et des assemblages de matrices élémentaires. L'information est implicitement reliée au maillage lui-même et non pas par exemple aux coordonnées eulériennes de ses points. Ainsi, la philosophie éléments finis est naturellement formulée en coordonnées mixtes!

Nous allons voir maintenant qu'il n'en va pas de même pour le terme de dérivée totale, pour lequel il faut modifier la méthode des caractéristiques.

4.6.3 Algorithme général de résolution

Afin d'intégrer (42) de t^n à t^{n+1} en maillage mobile, nous devons à chaque pas de temps :

1. Recalculer le maillage : les points de l'interface fluide-structure se déplacent et modifient le maillage dans son ensemble.
2. Calculer la vitesse w de tous les points du maillage.
3. Modifier la matrice d'assemblage pour tenir compte du mouvement de maillage.
4. Calculer les pieds des caractéristiques et assembler le second membre.
5. Résoudre le système linéaire correspondant au problème de Stokes généralisé.

Comme nous l'avons vu précédemment, pour résoudre (42) à l'instant t^{n+1} , nous devons connaître la vitesse du fluide à la position (dans l'espace des coordonnées mixtes) des pieds des caractéristiques \bar{x} à $t = t^n$ pour l'ordre 1 et $\bar{\bar{x}}$ à $t = t^{n-1}$ pour l'ordre 2. Malheureusement, ces valeurs ne sont pas directement accessibles, du fait que $X(x(\xi, t^{n+1}), t^{n+1}; t^n)$ et $X(x(\xi, t^{n+1}), t^{n+1}; t^{n-1})$ sont des coordonnées eulériennes. Il y a donc une étape supplémentaire de traduction en coordonnées mixtes.

4.7 Méthode ALE du premier ordre

Soit ξ un point quelconque du maillage à l'instant t^{n+1} et écrivons le schéma des caractéristiques à l'ordre 1 en maillage mobile :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u(\xi, t^{n+1}) - u(\bar{\xi}, t^n)}{\Delta t} - \nu \Delta u(\xi, t) + \nabla p(\xi, t) = 0 \\ \nabla \cdot u(\xi, t) = 0 \end{array} \quad \forall (x, t) \in \Omega \times]0, T[\right. \quad (43)$$

Nous devons déterminer le pied de la caractéristique $\bar{\xi}$ issue de ξ à l'instant t^{n+1} . On a :

$$\xi \longrightarrow x(\xi, t^{n+1}) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = u(X(t), t) \\ X(t^{n+1}) = x(\xi, t^{n+1}) \end{array} \right. \longrightarrow \bar{\xi} = \xi(X(t^n), t^n)$$

Le graphe ci-dessus signifie qu'on remonte la même caractéristique qu'en maillage fixe, mais des opérations de passage des coordonnées eulériennes aux coordonnées mixtes et inversement sont nécessaires. Après avoir remonté la caractéristique, on a bien $u(\bar{\xi}, t^n) = u(\xi(X(t^n), t^n), t^n) = u(X(t^n), t^n)$.

Pour simplifier la procédure, on peut aussi remonter une caractéristique dans un champ différent, afin d'éviter les passages entre coordonnées mixtes et Eulériennes. De toute façon, on a seulement besoin d'une approximation précise au moins au premier ordre de $\bar{\xi}$. On propose de remonter la caractéristique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dY}{dt} = v(Y(t), t) \\ Y(t^{n+1}) = x(\xi, t^{n+1}) \end{array} \right. \longrightarrow \bar{\bar{\xi}} = \xi(Y(t^n), t^{n+1})$$

où $v(\xi)$ est un champ qui reste à déterminer. On a par définition :

$$x(\bar{\bar{\xi}}, t^{n+1}) = Y(t^n) = x(\xi, t^{n+1}) - \Delta t v(\xi) + O(\Delta t^2)$$

où $O(\Delta t^2)$ dépend du schéma numérique pour la recherche des caractéristiques. On a :

$$x(\bar{\xi}, t^n) = X(t^n) = x(\xi, t^{n+1}) - \Delta t u(\xi, t^n) + O(\Delta t^2).$$

Comme le maillage bouge, nous avons exactement :

$$x(\bar{\xi}, t^{n+1}) = x(\bar{\xi}, t^n) + \Delta t w(\bar{\xi}),$$

où $w(\xi) \equiv w(\xi, t^{n+\frac{1}{2}})$ est la vitesse locale moyenne du maillage entre t^n et t^{n+1} . Comme on a également $\bar{\xi} = \xi + O(\Delta t)$, on en déduit aussi que

$$x(\bar{\xi}, t^{n+1}) = x(\bar{\xi}, t^n) + \Delta t w(\xi) + O(\Delta t^2).$$

Il en résulte alors :

$$x(\bar{\xi}, t^{n+1}) = x(\xi, t^{n+1}) - \Delta t (u(\xi, t^n) - w(\xi)) + O(\Delta t^2).$$

Il suffit donc de prendre

$$v(\xi) = u(\xi, t^n) - w(\xi), \quad (44)$$

pour avoir $x(\bar{\bar{\xi}}, t^{n+1}) = x(\bar{\xi}, t^{n+1}) + O(\Delta t^2)$ et donc $\bar{\bar{\xi}} = \bar{\xi} + O(\Delta t^2)$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{u(\xi, t^{n+1}) - u(\bar{\bar{\xi}}, t^n)}{\Delta t} &= \frac{u(\xi, t^{n+1}) - u(\bar{\xi}, t^n)}{\Delta t} + O(\Delta t) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(\xi, t^{n+1}) + (u \cdot \nabla)u(\xi, t^{n+1}) + O(\Delta t). \end{aligned}$$

En conclusion, nous venons de démontrer que notre schéma est d'ordre un en maillage mobile à condition de prendre $v(\xi) = u(\xi, t^n) - w(\xi)$. De plus, si la vitesse du maillage est nulle, nous retrouvons les équations obtenues en maillage fixe. Voyons maintenant comment s'écrit le schéma d'ordre deux en maillage mobile.

4.8 Méthode ALE d'ordre 2

Rappelons le schéma des caractéristiques d'ordre deux :

$$\begin{cases} h(\xi, t^{n+1}) - \nu \Delta u(\xi, t) + \nabla p(\xi, t) = 0 & \forall (x, t) \in \Omega \times]0, T[\\ \nabla \cdot u(\xi, t) = 0 \end{cases} \quad (45)$$

avec

$$h(\xi, t^{n+1}) = \frac{3u(\xi, t^{n+1}) - 4u(X(\xi, t^{n+1}; t^n); t^n) + u(X(\xi, t^{n+1}; t^{n-1}); t^{n-1})}{2\Delta t},$$

et la caractéristique $X(\xi, t^{n+1}; t)$ est définie par :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = u(X(\xi, t^{n+1}; t), t) \\ X(\xi, t^{n+1}; t^{n+1}) = x(\xi, t^{n+1}) \end{cases}$$

Il est clair que le schéma précédent fournit une approximation d'ordre deux en temps de la dérivée totale, et donc est globalement d'ordre deux en temps. Comme pour le premier ordre, pour simplifier la procédure, on peut aussi remonter une (ou des) caractéristique(s) dans un (des) champ(s) différent(s), afin d'éviter les passages entre coordonnées mixtes et

Eulériennes. Il suffit simplement d'obtenir une approximation précise au moins au second ordre de $h(\xi, t^{n+1})$. On propose de remonter la caractéristique suivante :

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = z(Y(t), t) \\ Y(t^{n+1}) = x(\xi, t^{n+1}) \end{cases}$$

où $z(\xi)$ est un champ à déterminer et on définit $\bar{\xi}$ et $\bar{\bar{\xi}}$ par

$$\begin{aligned} x(\bar{\xi}, t^{n+1}) &= Y(t^n), \\ x(\bar{\bar{\xi}}, t^{n+1}) &= Y(t^{n-1}). \end{aligned}$$

On définit alors $\tilde{h}(\xi, t^{n+1})$ par

$$\tilde{h}(\xi, t^{n+1}) = \frac{3u(x(\xi, t^{n+1}), t^{n+1}) - 4u(x(\bar{\xi}, t^n), t^n) + u(x(\bar{\bar{\xi}}, t^{n-1}), t^{n-1})}{2\Delta t}. \quad (46)$$

Pour démontrer que le schéma en maillage mobile ainsi construit est d'ordre deux en temps, il suffit de démontrer que, pour un champ z bien choisi, $\tilde{h}(\xi, t^{n+1}) = h(\xi, t^{n+1}) + O(\Delta t^2)$. Le schéma précédent (46) est "en maillage mobile" au sens où les caractéristiques peuvent être remontées dans une seule configuration de maillage (à t^{n+1}) et les valeurs de u dans (46) peuvent être obtenues sans passage aux coordonnées Eulériennes grâce au fait que

$$\tilde{h}(\xi, t^{n+1}) = \frac{3u(\xi, t^{n+1}) - 4u(\bar{\xi}, t^n) + u(\bar{\bar{\xi}}, t^{n-1})}{2\Delta t}.$$

On introduit les deux différences entre caractéristiques suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{D} &= X(\xi, t^{n+1}; t^n) - x(\bar{\xi}, t^n) \\ \bar{\bar{D}} &= X(\xi, t^{n+1}; t^{n-1}) - x(\bar{\bar{\xi}}, t^{n-1}) \end{aligned}$$

Pour les calculs qui suivent, les valeurs des fonctions, sauf mention contraire explicite, sont prises en $(x(\xi, t^{n+1}), t^{n+1})$. Par définition de la caractéristique X définie ci-dessus, on a :

$$X(\xi, t^{n+1}; t^n) = x(\xi, t^{n+1}) - \Delta t u + \frac{\delta t^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) + O(\Delta t^3). \quad (47)$$

De même, pour la caractéristique Y , on a :

$$x(\bar{\xi}, t^{n+1}) = x(\xi, t^{n+1}) - \Delta t z + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial t} + (z \cdot \nabla) z \right) + O(\Delta t^3). \quad (48)$$

En particulier, on déduit de (48) que $\bar{\xi} = \xi - \Delta t J^{-1} z + O(\Delta t^2)$, où $J = \frac{\partial x}{\partial \xi}$. Donc on a aussi :

$$\begin{aligned} x(\bar{\xi}, t^n) &= x(\bar{\bar{\xi}}, t^{n+1}) - \Delta t w(\bar{\xi}) \\ x(\bar{\xi}, t^n) &= x(\bar{\bar{\xi}}, t^{n+1}) - \Delta t w(\xi) + \Delta t^2 \frac{\partial w}{\partial x} J^{-1} z + O(\Delta t^3). \end{aligned} \quad (49)$$

De (47)-(48)-(49), on déduit que

$$\bar{D} = \Delta t (z + w - u) + \frac{\Delta t^2}{2} A + O(\Delta t^3), \quad (50)$$

où $A = \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \frac{\partial z}{\partial t} - (z \cdot \nabla)z - 2\frac{\partial w}{\partial x} J^{-1}z$. On démontre de même que

$$\bar{\bar{D}} = 2\Delta t (z + w - u) + 2\Delta t^2 A + O(\Delta t^3). \quad (51)$$

On en déduit simplement

$$\begin{aligned} 2\Delta t(\tilde{h} - h) &= -4(u(x(\bar{\xi}, t^n), t^n) - u(X(\xi, t^{n+1}); t^n)) \\ &\quad + u(x(\bar{\xi}, t^{n-1}), t^{n-1}) - u(X(\xi, t^{n+1}); t^{n-1}) \\ &= -4\nabla u \cdot \bar{D} - 2\nabla \nabla u \cdot \bar{D} \cdot \bar{D} + O(\|\bar{D}\|^3) + \nabla u \cdot \bar{\bar{D}} + \frac{1}{2}\nabla \nabla u \cdot \bar{\bar{D}} \cdot \bar{\bar{D}} + O(\|\bar{\bar{D}}\|^3) \\ &= -2\Delta t \nabla u \cdot (z + w - u) + O(\Delta t^3) \end{aligned}$$

Ainsi, une condition suffisante pour que $\tilde{h} = h + O(\Delta t^2)$ est que $z + w - u = O(\Delta t^2)$, soit de manière plus explicite

$$z(\xi, t^{n+1}) = u(\xi, t^{n+1}) - w(\xi, t^{n+1}) + O(\Delta t^2).$$

Ceci implique que $z(\xi, t^{n+1})$ doit être une approximation d'ordre deux de la vitesse relative $u(\xi, t^{n+1}) - w(\xi, t^{n+1})$. Afin de ne pas réintroduire de terme non linéaire implicite, on n'utilisera pas $u(\xi, t^{n+1})$ mais plutôt une formule du type :

$$z(\xi, t^{n+1}) = 2(u - w)(\xi, t^n) - (u - w)(\xi, t^{n-1}).$$

Au final, nous obtenons un schéma global d'ordre deux en maillage mobile faisant intervenir la vitesse des sommets du maillage. Il en résulte un schéma dont l'implémentation est facile du fait que nous pouvons connaître, à tout instant, les positions et les vitesses des points du maillage.

5 Résultats numériques

5.1 La cavité entraînée

5.1.1 Introduction

Afin de comparer les schémas d'ordre un et deux, nous utiliserons dans un premier temps le cas test de la cavité entraînée. La cavité entraînée possède en effet de nombreux atouts pour les simulations de Navier-Stokes incompressible. Sa géométrie est simple et pourtant les équations complètes de Navier-Stokes peuvent être utilisées. De plus, la solution converge vers un état stationnaire si le nombre de Reynolds n'est pas trop grand. Dans un deuxième temps, nous traiterons le cas instationnaire d'un écoulement autour d'un cylindre pour $Re = 200$. Il est possible de trouver, pour ce cas-test, de nombreuses références, aussi bien numériques qu'expérimentales, pour de nombreux schémas d'intégration.

5.1.2 Définition du problème.

Considérons une boîte carrée de 1m de côté remplie de fluide supposé incompressible. La vitesse du fluide est supposée nulle sur toutes les faces du sauf sur la face supérieure de la boîte où on applique une condition aux limites de translation de la gauche vers la droite avec une vitesse $u(x,y = 1)$ définie par :

$$u(x,1) = 4(x(1 - x),0).$$

On évite ainsi une discontinuité aux coins supérieurs de la cavité. Dans ces conditions, le nombre de Reynolds est défini par $Re = 1/\nu$. A $t = 0$, u et p sont initialisés avec la solution du problème de Stokes qui s'écrit dans notre cas :

$$\begin{aligned} \frac{1}{Re} \Delta u + \nabla p &= 0 \\ \nabla \cdot u &= 0 \end{aligned}$$

L'espace de discrétisation utilisé est l'espace P1-bulle/P1. La matrice de masse est preconditionnée par ILU et la résolution s'effectue grâce à une méthode GMRES [19] dans le cas 2D. Pour le cas 3D, nous utiliserons une résolution par la méthode d'Uzawa. Le gradient conjugué lié à la méthode d'Uzawa pour l'inversion de la matrice sera preconditionné par une méthode de sur-relaxation SSOR [19] [10]. Le chemin des caractéristiques est approché par la méthode d'intersection. Les tableaux 1 et 2 proposent un résumé des différentes caractéristiques des calculs en 2D et 3D. Enfin, tous les calculs ont été réalisés sur une DEC ALPHA 21264 à 633 Mhz avec 1152 Mo de Ram.

5.1.3 Résultats numériques

Pour ce premier test, nous fixons $Re = 1000$ avec un maillage de 37 points de côté. Pour les tests 3D, nous avons élevé notre maillage 37 points 2D sur une couche avec un paramètre d'élévation valant 0.1. Sur les faces avant et arrière de ce maillage, une condition de symétrie forte pour le fluide a été imposée. Nous avons ainsi obtenu un maillage pseudo-2D minimisant les effets 3D du fluide. Une solution stationnaire est obtenue à $t = 25s$. Afin de comparer l'efficacité des caractéristiques d'ordre un et deux, nous avons calculé une solution de référence en 2D et en 3D. Cette solution de référence a été obtenue en utilisant des caractéristiques d'ordre un et un pas de temps valant $\Delta t_{\text{réf}} = 0.01$ pour le calcul en 2D et $\Delta t_{\text{réf}} = 0.0001$ pour la 3D. La différence des deux pas de temps vient du fait que pour le calcul en 2D, un pas de temps inférieur à 0.01 faisait apparaître des oscillations assez prononcées dans les coins de notre domaine de calcul. Ces oscillations peuvent s'expliquer par le fait que le pas de temps devient trop petit par rapport au pas d'espace. Un tel phénomène a déjà été observé par Boukir et al. [2]. En ce sens, le passage en trois dimension semble relaxer un peu cette contrainte puisque des pas de temps valant jusqu'à 0.001 ont pu être atteints sans toutefois observer ces oscillations.

La figure 11 propose une coupe de cette solution suivant les axes horizontaux et verticaux au milieu des côtés pour un maillage grossier (37 points par côté) et fin (71 points). Nous

2D	
Construction du système	
Reynolds	1000.
Points de Gauss	7 pts
Taille du maillage	37 pts, 71 pts
Ordre	1,2
Elements finis	P1 - bulle /P1
Caractéristiques	
Ordre	1,2
Construction	Méthode d'intersection
Résolution du système	
Méthode itérative	GMRES restarted
Préconditionneur	ILU
Taille de l'espace de Krylov	20
Nombre maximal d'itérations	40
Critère de convergence	$\frac{\ \text{résidu}\ }{\ \text{résidu initial}\ } < 1e^{-10}$

TAB. 1 – Paramètres de calcul pour la cavité entraînée (maillage grossier)

3D	
Construction du système	
Reynolds	1000.
Points de Gauss	15 pts
Taille du maillage	37 pts, 71 pts
Ordre	1,2
Elements finis	P1 - bulle /P1
Caractéristiques	
Ordre	1,2
Construction	Méthode d'intersection
Résolution du système	
Méthode itérative	Uzawa + GS
Préconditionneur	SSOR
Nombre maximal d'itérations	20
Critère de convergence	$\frac{\ \text{résidu}\ }{\ \text{résidu initial}\ } < 1e^{-20}$

TAB. 2 – Paramètres de calcul pour la cavité entraînée (maillage grossier)

pouvons noter au passage que les deux solutions de référence sont extrêmement proches, ce qui prouve que la solution obtenue grâce au maillage grossier est satisfaisante.

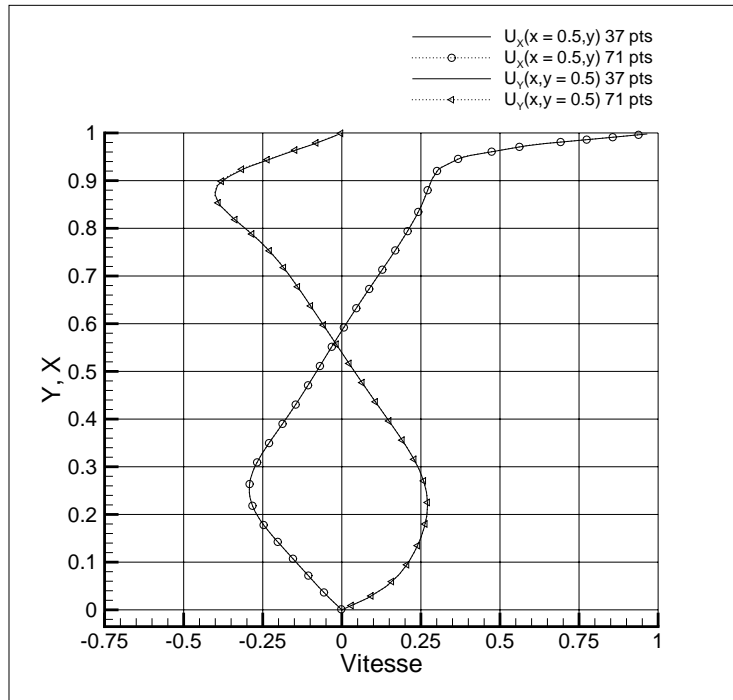


FIG. 11 – Solution de référence de la cavité entraînée pour $Re = 1000$

Dans un premier temps, considérons les calculs en deux dimensions d'espace. Le tableau 5.1.4 et les courbes 12 donne les temps de calculs des différentes parties du code 2D pour l'ordre un et l'ordre deux.

D'après les courbes 12, il apparaît que le passage à l'ordre deux augmente le temps de calcul jusqu'à près de 30% par rapport à l'ordre un pour des pas de temps assez élevés. Cette augmentation s'explique facilement par le nombre de triangles à traverser. En effet, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, l'utilisation d'une formule d'ordre deux pour calculer le terme de convection nous impose de déterminer le pied de deux caractéristiques $\bar{\xi}$ et $\bar{\xi}$: le premier pour un intervalle valant Δt et le deuxième sur un intervalle valant $2\Delta t$ (voir 38). Le calcul de $\bar{\xi}$ est commun à l'ordre un et à l'ordre deux, tandis que $\bar{\xi}$ demande de traverser, du moins pour des pas de temps assez grands, deux fois plus de triangles. Le temps global de calcul des caractéristique s'en trouve d'autant alourdi. Ainsi, quand Δt devient

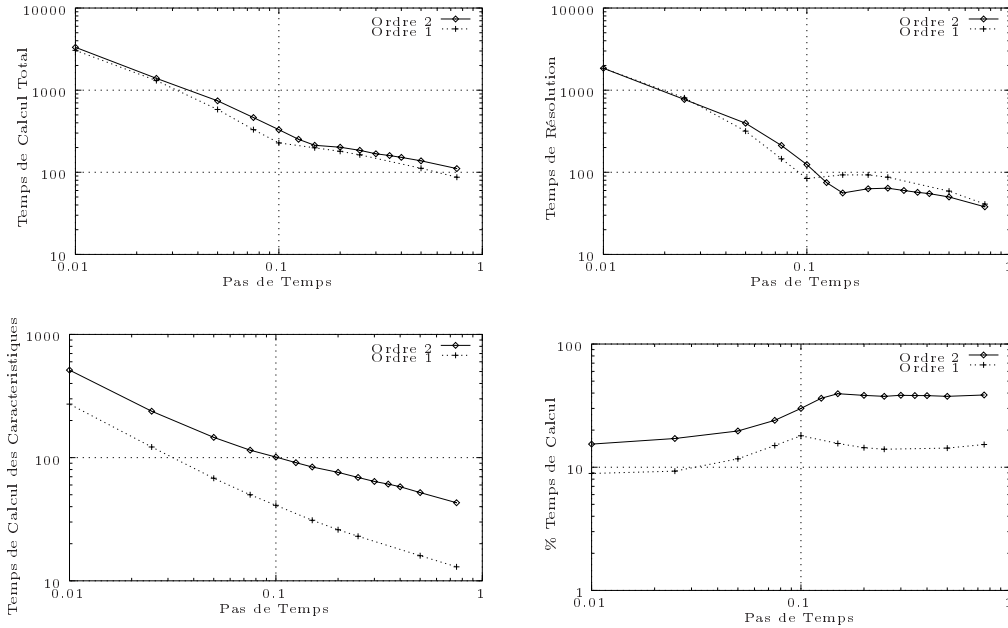


FIG. 12 – Temps de calcul pour la cavité entraînée 2D (maillage 37×37 , $Re = 1000$, échelle logarithmique)

petit, le temps de calcul des caractéristiques tend vers des valeurs plus raisonnables, $\bar{\xi}$ et $\bar{\bar{\xi}}$ se trouvant en général dans le même triangle que ξ . De fait, la procédure de repérage des pieds des caractéristiques est grandement simplifiée.

Il est intéressant de noter que le temps de résolution du système linéaire engendré par les équations de Navier-Stokes n'est pas linéaire: autour du pas de temps $\Delta t = 0.1$, le temps total de calcul baisse de façon significative. La figure 12 nous donne les temps de calcul des procédures principales du code en deux dimensions. Nous pouvons remarquer que le temps de résolution du système s'infléchit dans une zone allant de 0.1 à 0.2 pour le pas de temps et ce quel que soit l'ordre de la méthode.

Nous avons, dans un deuxième temps, calculé la norme L^2 de la différence entre les solutions des équations de Navier-Stokes pour la cavité entraînée pour ces divers pas de temps et la solution de référence (figure 13). D'après ces résultats la méthode des caractéristiques d'ordre un converge de façon régulière vers la solution de référence quand Δt tend vers $\Delta t_{\text{réf}} = 0.01$, alors que la méthode d'ordre deux fait apparaître certaines irrégularités: dans la zone autour du pas de temps $\Delta t = 0.2$, la norme L^2 de la différence est moins bonne que celle obtenue pour $\Delta t = 0.4s$. En fait, il semble que dans le voisinage de $\Delta t = 0.2$, la solution obtenue par l'utilisation de l'ordre deux se dégrade, sans toutefois devenir complètement insatisfaisante. En effet, les solutions obtenues dans cette zone de pas de temps grâce à

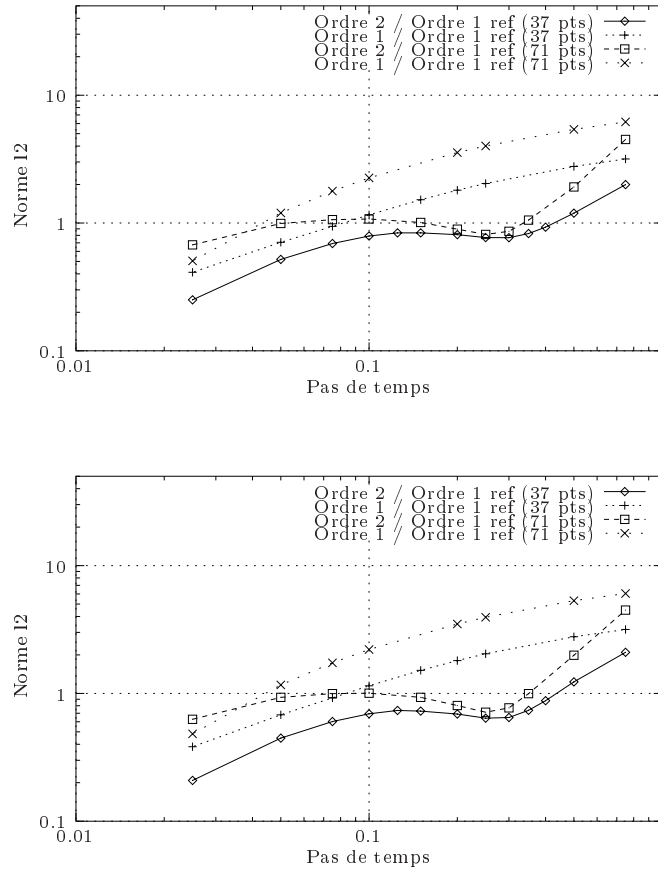


FIG. 13 – Norme L^2 de la différence (en haut composante u_x , en bas, u_y) entre la solution de référence 2D et plusieurs solutions convergées pour différents pas de temps ($Re = 1000$).

l'ordre deux restent meilleures que celles obtenues avec l'ordre un. Nous pouvons toutefois nous demander si ce problème n'est pas lié au temps de convergence rencontré précédemment, les deux phénomènes se produisant dans le même intervalle de pas de temps. Si tel est le cas, cela pose au moins deux problèmes :

- premièrement, l'ordre un semble converger vers la solution de référence de façon tout-à-fait régulière. Ceci peut s'expliquer par l'induction par l'ordre un sur de tels pas de temps d'une diffusion numérique susceptible de lisser la solution. Cette hypothèse, bien que tout-à-fait vraisemblable, reste néanmoins à vérifier.
- deuxièmement, le fait que notre code converge plus vite vers une solution moins bonne peut porter à confusion. Toutefois, comme nous avons clairement un changement de

comportement de notre système dans la plage de pas de temps considérée, il est difficile de conclure sur ce point.

Finalement, nous pouvons noter que pour $\Delta t > 0.5$, la solution obtenue grâce à l'ordre deux devient globalement moins bonne que celle obtenue avec l'ordre un. Pour ces pas de temps, le nombre de triangles traversés est tel que l'erreur numérique induite par l'approximation de la trajectoire des caractéristiques à l'ordre deux devient prépondérante et détruit à elle seule notre solution. Il convient donc d'éviter de traverser trop d'éléments par sous-cycle afin de préserver la qualité de la solution.

Nous allons maintenant nous intéresser au même problème, mais cette fois, nous utiliserons un code tridimensionnel avec un maillage obtenu par élévation à partir du maillage 2d utilisé jusqu'à présent. L'utilisation de ce maillage va nous permettre de faire des comparaisons directes entre les deux différents code utilisés.

L'utilisation d'un code en dimension 2 ne nous ayant pas permis d'atteindre des pas de temps inférieurs à 0.01, nous avons utilisé un code 3D pour pouvoir étudier le comportement de la méthode des caractéristiques pour de petits pas de temps. La figure 14 montre la norme L^2 de la différence entre la solution de référence et les solutions obtenues pour différents pas de temps. Nous pouvons noter la présence de fluctuations dans la même zone qu'en dimension 2 autour du pas de temps $\Delta t = 0.2$, et une autre, plus prononcée, pour $\Delta t < 0.01$. Pour cette dernière, la différence avec la solution de référence est plus grande à l'ordre 2 qu'à l'ordre 1.

De plus, la norme L^2 de la différence est supérieure à celle de l'ordre 1. Ce comportement est peut-être dû au fait que, dans cette gamme de pas de temps, il n'existe pratiquement plus de diffusion numérique due à la discrétisation en temps de l'opérateur de convection qui permettrait de lisser les solutions pour des pas de temps plus élevés. Le fait que l'ordre un ne subisse pas ces sauts de norme confirme alors l'idée qu'une discrétisation de l'opérateur de convection grâce à la formule d'Euler explicite induit une trop grande diffusion numérique, et ce même pour des pas de temps assez faibles.

5.1.4 Conclusion

Il est clairement visible que les solutions obtenues à partir de l'ordre deux restent malgré tout globalement meilleures qu'à l'ordre 1, que ce soit en 2D ou 3D. En ce qui concerne la dimension deux, l'utilisation de pas de temps élevés est un bon compromis entre la précision de la solution et le temps de calcul. Par exemple, la solution obtenue avec un pas de temps de 0.1 à l'ordre deux correspond à un pas de temps de 0.05 à l'ordre un, soit un gain de 43% pour le temps de calcul total et ceci malgré le surcoût de calcul des caractéristiques. Ce gain est de plus encore supérieur pour $\Delta t > 0.4$. La plupart des conclusions en dimension 2 sont valables en dimension 3 (ou plutôt pseudo-3d), même si le comportement de l'ordre deux semble se dégrader lorsque le pas de temps devient très petit. En effet, les pas de temps élevés nous permettent d'atteindre des solutions bien meilleures qu'avec l'ordre un, trop diffusif

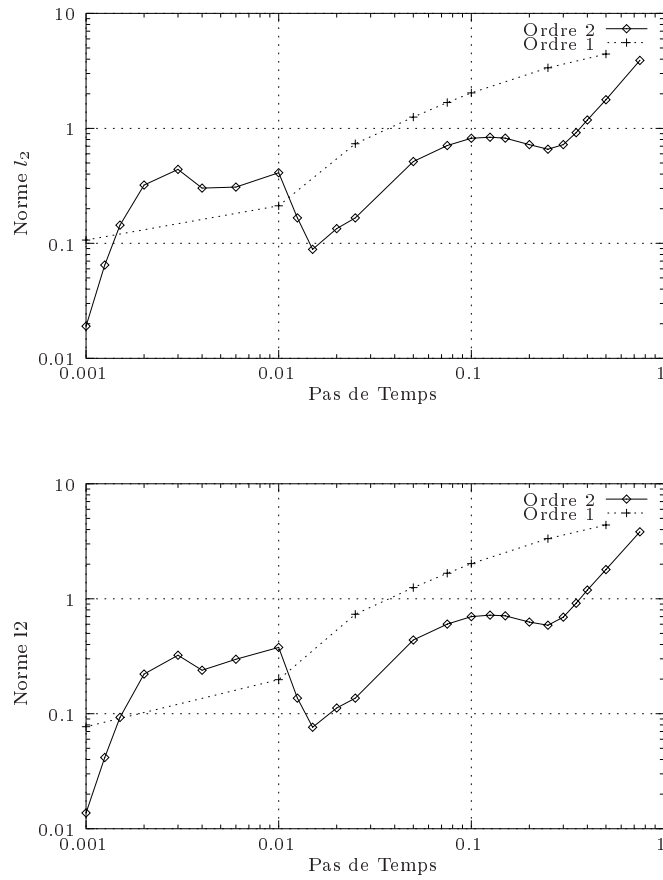


FIG. 14 – Norme L^2 de la différence (à gauche composante u_x , à droite, u_y) entre la solution de référence 3D et plusieurs solutions convergées pour différents pas de temps ($Re = 1000$).

dans ces régions. Il semble par contre que cette absence de diffusion de l'ordre deux pénalise la stabilité pour des pas de temps plus petits. Finalement, l'ordre deux semble bien convenir aux pas de temps assez élevés, ce qui est en soit une bonne nouvelle puisque son utilisation pour de tout petits pas de temps n'est pas toujours indispensable, principalement à cause du surcoût du calcul des trajectoires caractéristiques par rapport à la précision obtenue.

Ordre	Δt	Temps de calcul en secondes			
		Total	Caract.	%	Résolution
1	0.75	87	13	15.3	41
2	0.75	111	43	38.6	38
1	0.5	112	16	14.3	59
2	0.5	138	52	37.6	50
1	0.25	163	23	14.1	87
2	0.25	185	69	37.6	65
1	0.1	228	41	17.9	84
2	0.1	330	101	30.6	124
1	0.075	331	50	15.1	146
2	0.075	464	115	24.7	212
1	0.05	582	68	11.7	317
2	0.05	741	146	19.7	396
1	0.025	1309	122	9.3	805
2	0.025	1393	238	17.1	771
1	0.01	3054	272	8.9	1847
2	0.01	3322	513	15.4	1875

TAB. 3 – Temps de calcul pour la cavité entraînée (maillage grossier)

Ordre	Δt	Temps de calcul en secondes			
		Total	Caract.	%	Résolution
1	0.75	799	91	11.4	460
2	0.75	921	312	33.8	379
1	0.5	1021	104	10.1	639
2	0.5	1160	373	32.1	520
1	0.25	1484	137	9.2	947
2	0.25	1751	469	26.8	891
1	0.1	2750	214	7.8	1734
2	0.1	2579	602	23.3	1183
1	0.075	3169	253	8.0	1888
2	0.075	3055	663	21.7	1373
1	0.05	3847	327	8.5	2031
2	0.05	3655	784	21.4	1391
1	0.025	5122	538	10.5	1716
2	0.025	6632	1141	17.2	2617
1	0.01	17889	1163	6.5	9645
2	0.01	20192	2231	11.0	10882

TAB. 4 – Temps de calcul pour la cavité entraînée (maillage fin)

5.2 Écoulement autour d'un cylindre

5.2.1 Introduction

Nous allons maintenant nous intéresser au cas d'un écoulement autour d'un cylindre. Ce cas-test est très populaire pour les écoulements incompressibles et de très nombreux résultats sont disponibles dans la littérature pour de nombreuses méthodes de résolutions (voir, par exemple, [9] et [8]). Cet écoulement possède, selon le nombre de Reynolds utilisé, différentes caractéristiques :

- $0 < Re < 40$: la viscosité domine les effets non-linéaires du terme de convection. L'écoulement tend vers un état stationnaire sans recirculation
- $40 < Re < 100$: l'écoulement tend vers un état stationnaire. Cependant, cet état est caractérisé par la présence d'une recirculation derrière le cylindre dont la taille augmente avec Re .
- $100 < Re < 200$: le terme de convection prend le dessus sur les forces de viscosité. L'écoulement tend vers un état instationnaire mais quasi-périodique. Apparitions des allées de Von Karman.
- $200 < Re$: l'écoulement devient turbulent. De plus, les tourbillons deviennent sensibles aux perturbations 3D. De fait, les simulations 2D deviennent inconsistantes avec les résultats expérimentaux.

Afin de tester nos algorithmes, nous calculerons les différentes forces exercées par le fluide sur le cylindre. Ces forces sont définies par :

$$F = \int_C (-p.n + \nu(\nabla u + \nabla u^T).n) dC,$$

p étant la pression exercée par le fluide, u sa vitesse, C le contour du cylindre et n sa normale extérieure. Nous pouvons alors définir ses coefficients de portance et de trainée par

$$\begin{aligned} C_d &= \frac{2F \cdot e_x}{u_\infty^2 D}, \\ C_l &= \frac{2F \cdot e_y}{u_\infty^2 D}. \end{aligned}$$

Ici, D représente le diamètre du cylindre et u_∞ la vitesse à l'infini.

Dans le cas d'écoulements instationnaires, des tourbillons se détachent du cylindre. Il est alors possible de calculer la fréquence f du lâché de tourbillons, celle-ci étant égale à la fréquence d'oscillation de la portance. A partir de ces définitions, nous pouvons introduire le nombre (sans dimension) de Strouhal S , défini par :

$$S = \frac{fD}{u_\infty}.$$

5.2.2 Définition du problème

Considérons un écoulement incompressible, visqueux et laminaire autour d'un cylindre de rayon $R = 2$. Nous devons résoudre le problème suivant : trouver $u \in \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}^2$ et $p \in \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = 0 & \text{pour } \Omega \times]0, T[\\ \nabla \cdot u = 0 & \text{pour } \Omega \times]0, T[\\ u(t=0) = u_0 & \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \\ u = u_\infty & \text{sur } \partial\Omega_2 \\ u \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega_3 \\ p \cdot n - \nu(\nabla u + \nabla u^T) \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega_4 \end{array} \right.$$

Ici, la viscosité ν est prise égale à $\nu = Ru_\infty / Re$. u_0 est initialisée avec la solution de Stokes. La figure 15 donne la représentation du domaine ainsi que les différentes conditions aux limites. Comme pour la cavité, nous avons utilisé deux maillages : l'un en 2D, avec 120 points sur le cylindre, l'autre en 3D/pseudo-2D, obtenu en élevant le maillage d'une hauteur de 0.1m. Dans chacun des cas, nous avons utilisé l'élément fini P1-Bulle/P1 pour la discrétisation en éléments finis. Après une période, l'écoulement se desymétrise (voir figure

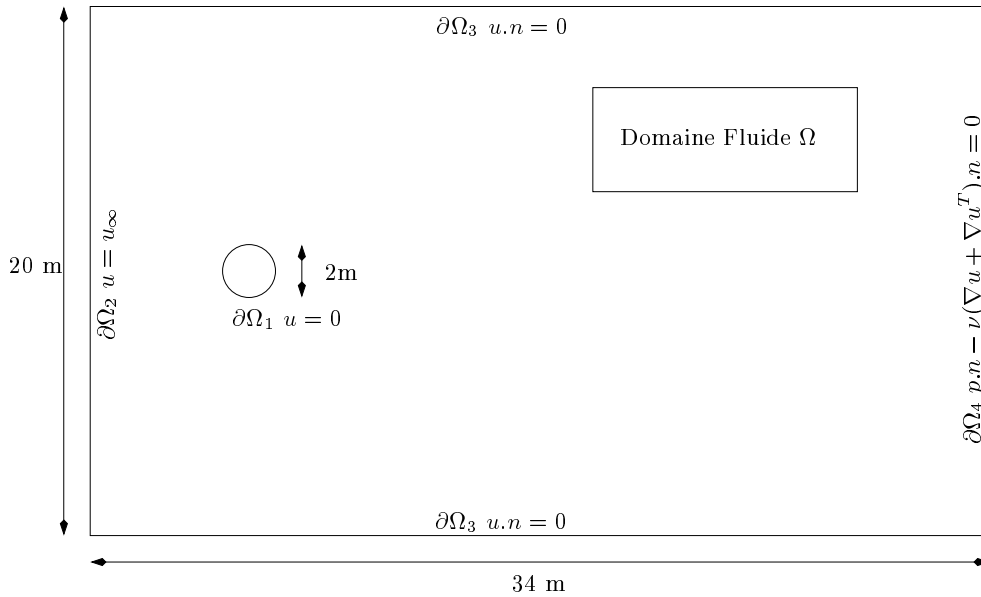


FIG. 15 – *Domaine de calcul pour un écoulement autour d'un cylindre*

16) et les allées de Von Karman apparaissent. La portance et la traînée oscillent alors autour

de leurs valeurs moyennes avec une fréquence f_x pour la traînée et f_y pour la portance. Nous pouvons remarquer que, comme il est généralement observé, $f_x = 2f_y$. Enfin, il est important de signaler que l'asymétrie de l'écoulement n'a pas été imposée de manière artificielle.

5.2.3 Résultats numériques

Le tableau 5.2.3 montre les résultats obtenus en utilisant le code NSI3 à l'ordre 1 et 2 comparés à quelques résultats trouvés dans la littérature. Comme nous pouvons le constater, la portance, la traînée ainsi que le nombre de Strouhal sont légèrement supérieurs à la plupart des résultats obtenus dans nos références. Cependant, l'utilisation d'un pas de temps assez élevé peut expliquer ce comportement, ce qui nous permet de qualifier ces résultats d'assez encourageants. De plus, comme nous pouvions le supposer, l'ordre 1 avec un pas de temps de 0.01s se comporte à peu de choses près comme l'ordre 2 et un pas de temps de 0.1s. Ces résultats sont consistants avec la théorie, ce qui nous permet de dire qu'à l'instar de l'écoulement stationnaire présenté précédemment, l'ordre 2 pour des écoulement instationnaires apporte un réel gain de performance par rapport à l'ordre un.

Référence	C_x	C_y	Strouhal
Piperno [15] Ordre 1			
$\Delta t = 0.05$	1.242 ± 0.029	± 0.546	0.188
$\Delta t = 0.10$	1.253 ± 0.029	± 0.535	0.181
$\Delta t = 0.15$	1.265 ± 0.028	± 0.518	0.175
Lecoindre [9]			
Ordre 2	1.46 ± 0.04	± 0.7	0.227
Ordre 4	1.58 ± 0.0035	± 0.5	0.194
Exp.			0.19
Rosenfeld [18]	1.46 ± 0.05	± 0.69	0.211
Kiris et Kwak [8]	1.27 ± 0.04	± 0.67	0.184
Ordre 2 $\Delta t = 0.1$	1.56 ± 0.06	± 0.84	0.219
Ordre 1 $\Delta t = 0.1$	1.59 ± 0.05	± 0.75	0.201
Ordre 1 $\Delta t = 0.01$	1.556 ± 0.059	± 0.81	0.217

TAB. 5 – Traînée, portance et nombre de Strouhal pour $Re = 200$

Nous avons, dans un deuxième temps, utilisé le code NSI3 pour calculer la solution de l'écoulement en faisant varier le nombre de Reynolds de 100 à 200. La figure 17 donne les résultats pour l'ordre 1 et 2 ainsi qu'une solution de référence. Ces résultats montrent clairement plusieurs choses intéressantes : tout d'abord, les deux courbes correspondant à l'ordre 1 et 2 se comportent de façon satisfaisante par rapport à la courbe de référence.

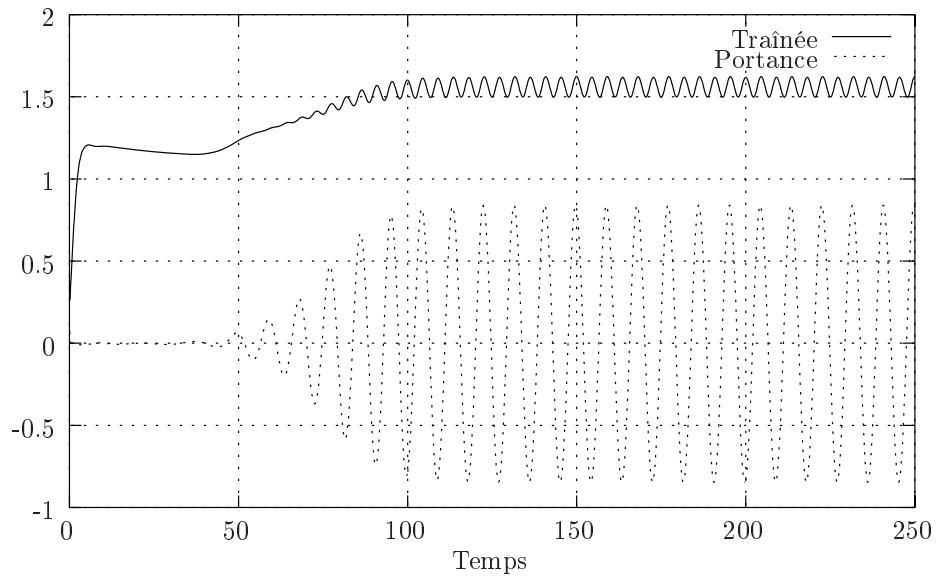
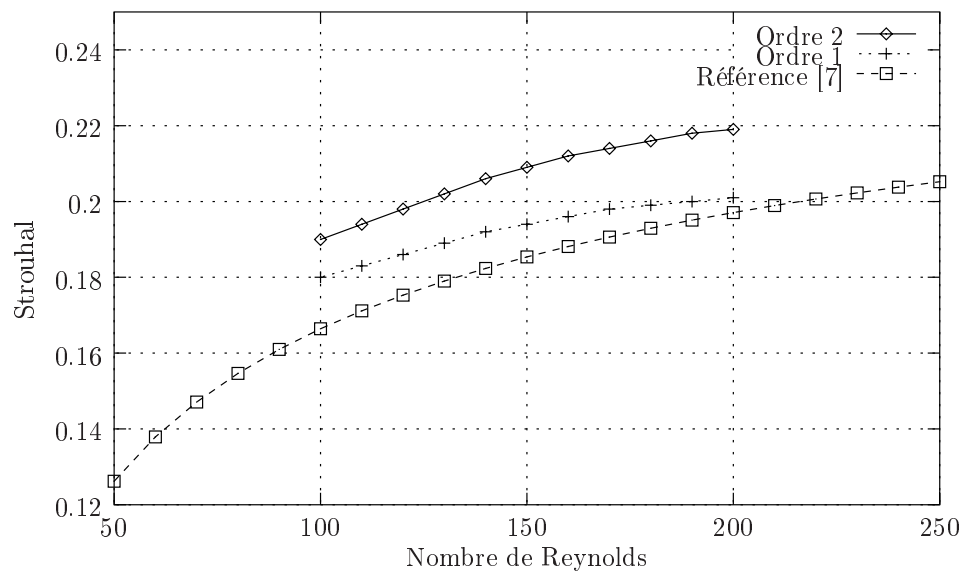
FIG. 16 – Portance et trainée à l'ordre 2 ($Re = 200$).

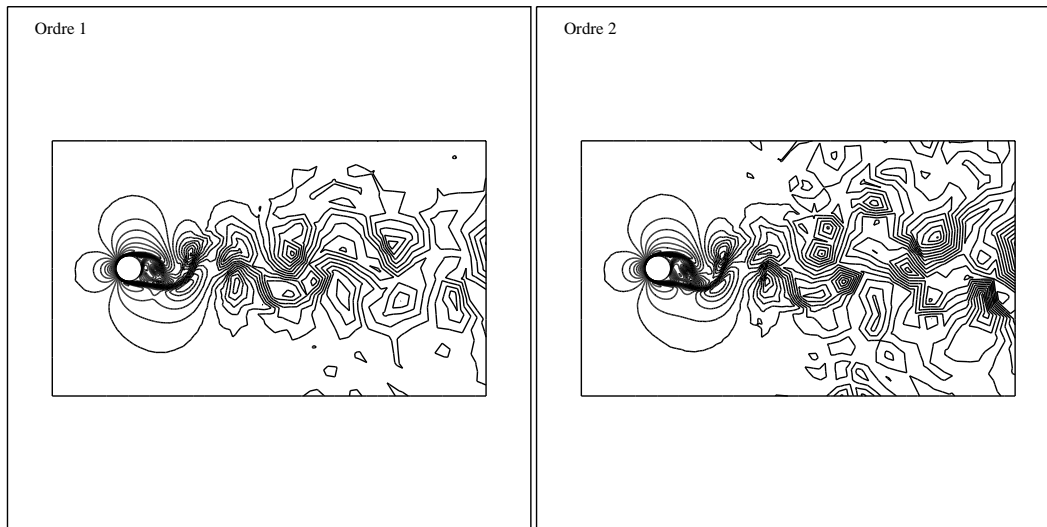
FIG. 17 – Nombre de Strouhal pour différents Nombre de Reynolds

Cependant, ces deux courbes, bien qu'assez proches pour $Re = 100$ semblent s'éloigner au fur et à mesure que Re augmente. Il semble donc que, comme pour la cavité, l'utilisation de pas de temps élevés pour l'ordre 1 induise trop de diffusion numérique pour être valable. Afin de confirmer cette hypothèse, nous avons calculé le même écoulement pour un Reynolds de 300, en utilisant l'ordre 1 et l'ordre 2 (voir tableau 5.2.3). Bien qu'ayant moins de signification physique, ce test nous a permis de confirmer que le nombre de Strouhal obtenu pour l'ordre 1 étant seulement légèrement supérieur à ce même nombre pour $Re = 200$ à l'ordre 1 (environ 0.209 pour 0.201 pour $Re = 200$). Ce même test à l'ordre 2 nous donne un Strouhal de 0.233 comparé à 0.219 pour $Re = 200$. De plus, l'ordre 2 avec un pas de temps $\Delta t = 0.1$ est déjà très proche de la solution obtenue avec un pas de temps de 0.01, alors qu'à l'ordre 1 avec ce même pas de temps, la portance, la traînée et le Strouhal semblent de moins bonne qualité. Finalement, nous arrivons à la même conclusion que pour la cavité entraînée: pour des pas de temps assez grands, les caractéristiques d'ordre 1 sont inadapées du fait de leur diffusion numérique intrinsèque. Dans ces conditions, l'utilisation d'un schéma de caractéristiques d'ordre 2 prend tout son sens.

	C_x	C_y	Strouhal
Ordre 2 $\Delta t = 0.10$	1.573 ± 0.108	± 1.0772	0.233
Ordre 2 $\Delta t = 0.01$	1.576 ± 0.109	± 1.0932	0.234
Ordre 1 $\Delta t = 0.01$	1.569 ± 0.101	± 1.0565	0.229

TAB. 6 – Traînée, portance et nombre de Strouhal pour $Re = 300$

Malheureusement, nous avons pu observer que l'utilisation de l'ordre 2 à $Re = 300$ et $\Delta t = 0.1$ faisait apparaître des oscillations dans les allées de Von Karman qui n'apparaissent pas à l'ordre 1 pour les mêmes pas de temps et nombre de Reynolds. Ces oscillations ont même, à terme, pollué la totalité de l'écoulement, rendant la solution complètement fautive. Cependant, nous avons pu observer ces mêmes oscillations, dans une moindre mesure à l'ordre 1 pour un pas de temps de 0.01 (voir figure 18). De plus, en utilisant notre code de travail 2D, ces oscillations sont apparues pour des nombres de Reynolds inférieurs à 200 dans certaines plages de pas de temps et de façon plus prononcées. Il semble donc que, bien que nous utilisions un schéma implicite, il existe une condition de type CFL pour la méthode des caractéristiques d'ordre 1 ou 2. Cette condition, qui reste bien sûr à définir, peut découler du fait que la discrétisation de la dérivée totale par la méthode des caractéristiques fait intervenir des approximations aussi bien en espace qu'en temps. Ces approximations peuvent induire une condition de stabilité qui n'apparaît pas dans le cadre d'une étude classique de notre schéma en éléments finis. Une étude spécifique plus approfondie de la discrétisation par éléments finis de l'opérateur de convection par la méthode des caractéristiques semble donc nécessaire. Elle fera l'objet d'un travail ultérieur.

FIG. 18 – *Solution pour $t = 250s$ et $Re = 300$*

5.2.4 Conclusion

A l'instar du problème de la cavité entraînée, l'utilisation de la méthode des caractéristique d'ordre 2 pour les équations de Navier-Stokes pour un écoulement instationnaire nous permet d'utiliser des pas de temps relativement élevés sans craindre d'induire une diffusion numérique excessive. De plus, le surcoût en temps qu'implique la détermination du second pied des caractéristiques utilisé pour notre schéma d'ordre 2 est largement compensé par la réduction du nombre d'itérations nécessaire pour atteindre une solution comparable à l'ordre 1. Cependant, nous avons pu noter l'apparition d'instabilités dans certaines parties du maillage, et ce pour certaines plages de pas de temps. Ces oscillations, déjà existantes à l'ordre 1 et particulièrement prononcées à l'ordre 2, semblent indiquer que la méthode des caractéristiques induit une condition de stabilité de type CFL. La détermination et l'étude de ce domaine de stabilité semblent donc un être un point crucial pour la mise en œuvre satisfaisante de la méthode de Lagrange-Galerkin.

Références

- [1] J.P. Benqué, B. Ibler, A. Keramsi, G. Labadie, *A finite element method for the Navier-Stokes equations*, Proceedings of the third international conference on finite elements in flow problems, Banff. Alberta, Canada, 10-13 June 1980.
- [2] K. Boukir et al. *A Hight Order Characteristics/Finite Elements Method For The Incompressible Navier-Stokes Equations*, Internat. J. Numer. Methods Fluids, Vol. 25, pp. 1421-1454, 1997.
- [3] R.H. Gallagher, G.F. Carey, J.T. Oden, O.C. Zienkiewicz, *Finite Elements in Fluids*, Vol. 6, J. Wiley and sons, 1985.
- [4] V. Girault et P.-A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and algorithms.*, Springer Series in Computational Mathematics, 5., Springer-Verlag, 1986.
- [5] C. Grandmont *Analyse Mathématique et Numérique de Quelques Problèmes d'Interaction Fluide-Structure*, Thèse de Doctorat, université Paris 6, 1998.
- [6] A. Grimmer *A Comparative Study of Transporte-Oriented Discretisations of Convection-dominated Problems with Application to the Incompressible Navier-Stokes Equations*, Preprint Heidelberg, Univ., PhD. Diss., 1998.
- [7] R.D. Henderson, *Details of the drag curve near the onset of vortex shedding*, Phys. Fluids 7(9), September 1995.
- [8] C. Kiris et D. Kwak, *Numerical Solution Of Incompressible Navier-Stokes Euqations Using A Fractional-Step Approach* Comput. & Fluids, Vol. 30, No.7-8, pp. 829-851, 2001.
- [9] Y. Lecointe et J. Piquet, *On The Use Of Several Compact Methods For The Study Of Unsteady Incompressible Viscous Flow Round A Circular Cylinder*, Comput. & Fluids, Vol. 12, No. 4, pp. 225-280, 1984.
- [10] C. Pares Madronal *Etude mathématique et approximation numérique de quelques problèmes aux limites de la mécanique des fluides*, Thèse de Doctorat, université de Paris 6, 1992.
- [11] *Handbook of Computational Fluid Mechanics* Edité by Roger Peyret, San Diego, CA, Academic Press, 2000.
- [12] R. Pierre, *Optimal Section of the Bubble Function in the Stabilisation of the P1-P1 Element For The Stokes Problem*, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 32, No. 4, pp. 1210-1224, 1995.
- [13] R. Pierre, *Regularization Procedures of Mixed Finite Element Approximations of the Stokes Problem*, Rapport de Recherche No. 673, INRIA, 1987.
- [14] R. Pierre, *Simple C^0 -Approximations for the Computation of Incompressible Flows*, Rapport de Recherche No. 657, INRIA, 1987.
- [15] S. Piperno Numerical simulation of aeroelastic instabilities of elementary bridge decks, Rapport de Recherche 3549, INRIA, 1998.

-
- [16] O. Pironneau, *Méthodes des éléments finis pour les fluides*, Collection Recherches en Mathématiques Appliquées, Masson, Paris, 1988.
- [17] O. Pironneau, *On the transport diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations*, Numer. Math. Vol. 38, pp. 309-332, 1982.
- [18] M. Rosenfeld, D. Kwak et M. Vinokur, *A Solution Method for The Unsteady And Incompressible Navier-Stokes Equations In Generalized Coordinate Systems*, AIAA Paper 88-0718, 1988.
- [19] Y. Saad, *Iterative Methods for Space Linear Systems*, PWS Publishing Company, 1996.
- [20] J. Shen, *Pseudo-Compressibility Methods for the Unsteady Incompressible Navier-Stokes Equation*, in Proceedings of the 1994 Beijing Symposium on Nonlinear Evolution Equations and Infinite Dynamical Systems, pp. 68-78, Ed. Boling Guo, ZhongShan University Press, 1997.
- [21] J. Shen, *On Pressure Stabilization Method and Projection Method for Unsteady Navier-Stokes Equations*, Advances in Computer Methods for Partial Differential Equations-VII (eds. R. Vichnevetsky, D. Knight and G. Richter), IMACS, pp. 659-662, 1992.
- [22] D. Sylvester, *Stabilised Mixed Finite Elements Methods*, Numerical Analysis Report No. 262, university of Manchester (UK), 1995.
- [23] D. Sylvester et A. Wathen, *Fast And Robust Solvers for Time-Discretised Incompressible Navier-Stokes Equations*, Numerical Analysis Report No. 273, university of Manchester (UK), 1995.
- [24] K. Traoré, *Simulation thermomécanique du laminage circulaire. Développement d'une formulation quasi-Eulérienne tridimensionnelle sur une architecture parallèle*, Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, 2001.
- [25] K. Washizu, A. Ohya, Y. Otsuki, K. Fujii, Aeroelastic instability of rectangular cylinders in a heaving mode, J. Sound Vibration, 59(2):195-210, 1978.



Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis

2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38330 Montbonnot-St-Martin (France)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur

INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

<http://www.inria.fr>

ISSN 0249-6399