THEOREME DE DONSKER ET FORMES DE DIRICHLET

Nicolas Bouleau

Ecole des Ponts, Paris

Abstract. We use the language of errors to handle local Dirichlet forms with squared field operator (cf [2]). Let us consider, under the hypotheses of Donsker theorem, a random walk converging weakly to a Brownian motion. If, in addition, the random walk is supposed to be erroneous, the convergence occurs in the sense of Dirichlet forms and induces the Ornstein-Uhlenbeck structure on the Wiener space. This quite natural result uses an extension of Donsker theorem to functions with quadratic growth. As an application we prove an invariance principle for the gradient of the maximum of the Brownian path computed by Nualart and Vives.

Résumé. Nous employons le langage des erreurs pour manier les formes de Dirichlet locales avec carré du champ (cf [2]). Considérant une promenade aléatoire convergeant en loi vers un mouvement brownien sous les hypothèses du théorème de Donsker, nous montrons que si la promenade est supposée de plus erronée, la convergence a lieu au sens des formes de Dirichlet et induit la structure d'Onstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener. Ce résultat bien naturel nécessite l'extension du théorème de Donsker aux fonctions à croissance quadratique. A titre d'application nous en déduisons un principe d'invariance pour le gradient du maximum de la courbe brownienne calculé par Nualart et Vives.

Mots clés : promenade aléatoire, mouvement brownien, gradient, forme de Dirichlet, erreur.

Keywords : random walk, Brownian motion, Dirichlet form, error

1. INTRODUCTION

Le calcul d'erreur fondé sur les formes de Dirichlet est inspiré des idées de Gauss sur la propagation des erreurs en les formulant avec des formes de Dirichlet ce qui leur donne la puissance de s'appliquer aux espaces fonctionnels rencontrés en modélisation stochastique : espace de Wiener, de Poisson et de Monte Carlo. L'approche intuitive et les fondements mathématiques sont exposés en [2]. Ce formalisme rend compte de la propagation à travers les calculs des variances, des co-variances et des biais des erreurs supposées infiniment petites.

De la même façon que le calcul des probabilités a pu se développer sans que la notion de hasard fût complètement élucidée, le calcul d'erreur fondé sur les formes de Dirichlet n'explicite pas la notion d'erreur elle-même et ne prend en compte que les notions dérivées de variance et de biais qui sont axiomatisées. L'explicitation de cette notion d'erreur est un programme théorique intéressant mais n'est pas un préalable aux nombreuses applications des calculs d'erreurs et de sensibilité (cf. [4], [5] et [2]).

En revanche la question du choix des hypothèses à prendre en compte sur les erreurs lorsqu'on procède à une étude de sensibilité d'un modèle est une question concrète importante dans la mesure où ce langage plus fin que d'ordinaire sur les erreurs fait apparaître la nécessité d'hypothèses a priori sur les corrélations ou non-corrélations des erreurs sur les paramètres scalaires ou fonctionnels du modèle étudié. La connexion avec les statistiques par l'information de Fisher et sa robustesse par changement de variables est la réponse générale à cette question (cf. [6]). Elle peut être complètée par l'étude des extensions en termes de calcul d'erreur des grands théorèmes limites de la théorie des probabilités tels que le théorème de limite centrale ou le théorème du logarithme itéré (cf. [7]).

Nous étudions ici la question bien naturelle de l'extension du théorème de Donsker concernant la limite faible d'une promenade aléatoire vers un mouvement brownien. Elle peut se formuler ainsi : étant donné une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées centrées, supposées en outre erronées, les erreurs étant stationnaires et non corrélées, est-ce que l'approximation usuelle affine par morceaux converge vers le mouvement brownien au sens de la forme de Dirichlet qui décrit les erreurs et si oui, quelle structure d'erreur cela induit-il sur l'espace de Wiener ?

La réponse est positive et la structure d'erreur obtenue est la structure d'Ornstein-Uhlenbeck. Ce résultat très naturel n'avait pas été publié jusqu'ici, sa démonstration nécessite une amélioration strictement probabiliste du théorème de Donsker aux fonctions à croissance quadratique. Cette extension, plus délicate que dans le cas du théorème de limite centrale est la principale difficulté du présent travail.

Nous en tirons comme conséquence, une formule explicite concernant la limite de la forme de Dirichlet sur la norme uniforme qui utilise le beau résultat de Nualart et Vives [11] sur le gradient du maximum de la trajectoire brownienne sur [0,1].

2. DEFINITIONS ET NOTATIONS

Une structure d'erreur est un terme $S = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma)$ où $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité, $\mathbb{D}$ un sous-espace dense de $L^2(\mathbb{P})$ et Γ un opérateur bilinéaire symétrique positif de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ dans $L^1(\mathbb{P})$ vérifiant

1) le calcul fonctionnel de classe $C^1 \cap Lip$
i.e. si $U = (U_1, \ldots, U_m) \in \mathbb{D}^m$, $V = (V_1, \ldots, V_n) \in \mathbb{D}^n$,
et si F et G sont de classe C^1 et lipschitziennes de $\mathbb{R}^m$ [resp.$\mathbb{R}^n$] dans $\mathbb{R}$,
alors $F(U_1, \ldots, U_m) \in \mathbb{D}$ et $G(V_1, \ldots, V_n) \in \mathbb{D}$ et
$\Gamma[F(U_1, \ldots, U_m), G(V_1, \ldots, V_n)] = \sum_{i,j} F'_i(U) G'_j(V) \Gamma[U_i, V_j] \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$

2) $1 \in \mathbb{D}$, la forme $\mathcal{E}[F, G] = \frac{1}{2} \int \Gamma[F, G] d\mathbb{P}$ est fermée
i.e. $\mathbb{D}$ est complet pour la norme $\| \, . \, \|_{\mathcal{E}} = (\| \, . \, \|^2_{L^2(\mathbb{P})} + \mathcal{E}[.])^{\frac{1}{2}}$.

Avec les notations ci-dessus $\mathcal{E}$ est une forme de Dirichlet locale ayant pour opérateur carré du champ Γ. On notera $\Gamma[F]$ pour $\Gamma[F, F]$ et $\mathcal{E}[F]$ pour $\mathcal{E}[F, F]$.

Exemple. Si l'on note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$, $\nu = \mathcal{N}(0, 1)$ la loi normale centrée réduite et $H^1(\nu)$ l'espace de Sobolev associé, alors

$$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \nu, H^1(\nu), \Gamma[u] = u'^2)$$

est une structure d'erreur appelée structure d'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck sur $\mathbb{R}$.

Les structures d'erreur ont la propriété de se transporter simplement par image et de permettre les opérations de produits y compris infini-dénombrables, cf. [2], [7].

Convergence en loi de Dirichlet.

Soit une structure d'erreur $S = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma)$, soit $\mathcal{E}$ la forme de Dirichlet associée.

Soit W un espace vectoriel normé muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(W) = \mathcal{W}$.

On se donne une famille de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs $(W, \mathcal{W})$.

On introduit une notion de convergence adaptée pour les structures d'erreur de la convergence en loi des variables aléatoires.

Définition 1. *On dit que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi de Dirichlet s'il existe une structure d'erreur sur $(W, \mathcal{W})$ soit $\Sigma = (W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}_0, \Gamma_0)$ telle que :*

i) $(U_n)_*\mathbb{P} \to m$ étroitement
i.e. $\forall f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ continue bornée $\mathbb{E}[f(U_n)] \longrightarrow \int_{\mathcal{W}} f(w)dm(w)$,

ii) si $F \in \mathcal{C}^1 \cap Lip(W, \mathbb{R})$ alors $F \in \mathbb{D}_0$ et $F(U_n) \in \mathbb{D}$ $\forall n$ et
$\mathcal{E}[F(U_n)] \longrightarrow \mathcal{E}_0[F]$ quand $n \to \infty$. où $\mathcal{E}_0$ est la forme associée à Σ.

Remarque 1. Sous les hypothèses de la définition 1, les U_n transportent la structure S sur $(W, \mathcal{W})$:

Si on définit

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_{U_n} & = & (U_n)_*\mathbb{P} \quad \text{(loi de } U_n) \\ \mathbb{D}_{U_n} & = & \{\varphi \in L^2(\mathbb{P}_{U_n}) \,:\, \varphi(U_n) \in \mathbb{D}\} \\ \Gamma_{U_n}[\varphi](w) & = & \mathbb{E}[\Gamma[\varphi(U_n)] | U_n = w] \end{array}$$

le terme

$$S_{U_n} = (W, \mathcal{W}, \mathbb{P}_{U_n}, \mathbb{D}_{U_n}, \Gamma_{U_n})$$

est une structure d'erreur, $\mathbb{D}_{U_n}$ contient les fonctions $C^1 \cap Lip(W, \mathbb{R})$, $\mathbb{P}_{U_n}$ converge étroitement vers m sur $(W, \mathcal{W})$ et $\mathcal{E}_{U_n}[F] = \frac{1}{2}\int \Gamma_{U_n}[F]\, d\mathbb{P}_{U_n} \to \frac{1}{2}\int \Gamma_0[F]\, dm$ pour toute $F \in C^1 \cap Lip(W, \mathbb{R})$. Il est naturel d'appeler la structure S_{U_n} la loi de Dirichlet de U_n.

Remarque 2. Si de plus il existe une variable aléatoire $V \in \mathbb{D}_0$ telle que

i) $(U_n)_*\mathbb{P} \to V_*m$ étroitement

ii) $\forall F \in C^1 \cap Lip \quad \mathcal{E}[F(U_n)] \to \mathcal{E}_0[F(V)]$

nous dirons que les U_n convergent en loi de Dirichlet vers V.

3. CONVERGENCE D'UNE PROMENADE ALEATOIRE ERRONEE.

Rappelons le résultat classique de Donsker [8] concernant la convergence d'une promenade aléatoire. Soient U_n, $n \geq 1$, une suite de variables aléatoires i.i.d. de carré intégrable, de variance σ^2, centrées. On interpole la promenade aléatoire $\sum_{k=1}^n U_k$ de façon affine par morceaux en considérant le processus

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{[nt]} U_k + (nt - [nt]) U_{[nt]+1} \right)$$

pour $t \in [0,1]$, où $[x]$ désigne la partie entière de x.

L'espace $W = C([0,1])$ étant muni de la norme uniforme, les variables X_n à valeur W convergent en loi vers un mouvement brownien centré de variance $\sigma^2 t$.

Il en résulte que si Φ est une fonctionnelle Riemann-intégrable pour la mesure de Wiener et bornée

$$\mathbb{E}[\Phi(X_n)] \to \mathbb{E}[\Phi(B)],$$

où B est un mouvement brownien centré de variance $\sigma^2 t$.

Supposons maintenant que les U_n soient erronées, en conservant les hypothèses d'indépendance et d'équi-distribution pour les U_n et leurs erreurs. Autrement dit, considérons que les U_n sont les applications coordonnées d'une structure d'erreur produit

$$S = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathbb{D}, \Gamma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu, \mathbf{d}, \gamma)^{\mathbb{N}^*}$$

la structure $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu, \mathbf{d}, \gamma)$ étant telle que l'identité j soit dans $L^2(\mu)$ centrée et dans $\mathbf{d}$. Ainsi les U_n sont i.i.d., de loi μ, de variance $\sigma^2 = \mu(j^2)$, vérifient $U_n \in \mathbb{D}$ et

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \Gamma[U_n] & = & (\gamma[j])(U_n) \\ \Gamma[U_m, U_n] & = & 0 \;\; \text{si } m \neq n \end{array} \right.$$

Les v.a. $\Gamma[U_n]$ sont dans $L^1(\mathbb{P})$, indépendantes et de même loi.

Pour t fixé la v. a.

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{[nt]} U_k + (nt - [nt]) U_{[nt]+1} \right)$$

est dans $\mathbb{D}$, et par (1)

$$(2) \qquad \Gamma[X_n(s), X_n(t)] = \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^{[nt]\wedge[ns]} \Gamma[U_k] + \alpha(n,s,t) \right]$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha(n,s,t) = \; & \Big((ns - [ns]) 1_{\{[ns]<[nt]\}} + (nt - [nt]) 1_{\{[ns]>[nt]\}} \\ & + (ns - [ns])(nt - [nt]) 1_{\{[ns]=[nt]\}} \Big) \, \Gamma[U_{[ns]\wedge[nt]+1}] \end{aligned}$$

Il découle de la loi forte des grands nombres que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[nt]\wedge[ns]} \Gamma[U_k] \to (s \wedge t) \mathbb{E}[\Gamma[U_1]] \quad \mathbb{P}\text{-p.s. et dans } L^1(\mathbb{P}).$$

Par ailleurs
$$\frac{|\alpha(n,s,t)|}{n} \to 0 \quad \mathbb{P}\text{-p.s. et dans } L^1(\mathbb{P}).$$
Ainsi $\Gamma[X_n(s), X_n(t)] \to (s \wedge t)c$ $\mathbb{P}$-p.s. et dans $L^1(\mathbb{P})$ où c est la constante $\mathbb{E}\Gamma[U_1] = \int \gamma[j](x)d\mu(x)$.

Nous déduisons de ce calcul la convergence des lois de Dirichlet marginales d'ordre fini vers les marginales correspondantes du mouvement brownien muni de la structure d'Ornstein-Uhlenbeck: soit $W = C([0,1])$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{W}$ et m la mesure de Wiener telle que la coordonnées d'indice t soit centrée de variance $\sigma^2 t$, soit $\mathbb{D}_0$ le domaine de la forme d'Ornstein-Uhlenbeck et Γ_0 l'opérateur quadratique associé caractérisé par son action sur le premier chaos (cf. [2] chapitre VI §2 et [7])
$$\forall h \in L^2([0,1]) \quad \int_0^1 hdB \in \mathbb{D}_0 \ \text{ et } \ \Gamma_0[\int_0^1 hdB] = c\int h^2 dt.$$

Proposition 1. *Soient $t_1, \ldots, t_p \in [0,1]$, les variables aléatoires $(X_n(t_1), \ldots, X_n(t_p))$ convergent en loi de Dirichlet vers $(B(t_1), \ldots, B(t_p))$ où B est un mouvement brownien centré de variance $\sigma^2 t$ muni de la structure d'Ornstein-Uhlenbeck $(W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}_0, \Gamma_0)$.*

Démonstration. Il faut montrer que si $f \in C^1 \cap Lip$
$$\int \Gamma[f(X_n(t_1), \ldots, X_n(t_p))]\, d\mathbb{P} \to \int \Gamma_0[f(B(t_1), \ldots, B(t_p))]\, dm.$$
Par majoration de la fonction $\alpha(n, t_i, t_j)$ et par le calcul fonctionnel on est ramené à étudier la convergence de l'expression
$$\text{(3)} \qquad \mathbb{E}[f_i'((X_n(t_1), \ldots, X_n(t_p))f_j'((X_n(t_1), \ldots, X_n(t_p))\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[nt_i]\wedge[nt_j]} \Gamma[U_k]]$$
et pour cela d'étudier la convergence de
$$\mathbb{E}[e^{i(u_1 X_n(t_1)+\cdots+u_p X_n(t_p))}\Gamma[U_k]]$$
pour k fixé. Or, compte tenu de ce que $\Gamma[U_k] = (\gamma[j])(U_k)$, par un argument classique (similaire celui de la proposition 3 ci-dessous), cette expression converge vers
$$\mathbb{E}[e^{i(u_1 B(t_1)+\cdots+u_p B(t_p))}]c.$$
D'où finalement (3) converge vers
$$\mathbb{E}[f_i'((B(t_1), \ldots, B(t_p))f_j'((B(t_1), \ldots, B(t_p))]c(t_i \wedge t_j)$$
ce qui démontre la proposition.

Ces résultats sur les marginales finies posent naturellement la question de l'extension suivante du thèoreme de Donsker :

Théorème 1. *Les variables X_n convergent en loi de Dirichlet vers la structure d'ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener $(W, \mathcal{W}, m, \mathbb{D}_0, \Gamma_0)$.*

Nous donnerons deux démonstrations de ce théorème. La première plus élémentaire nécessite l'hypothèse supplémentaire que la fonction $\gamma[j]$ est dans $L^p(\mu)$ pour un $p > 1$. Elle fait comprendre la difficulté surmontée par la seconde démonstration qui utilise un renforcement du théorème de Donsker probabiliste. Nous aurons besoin de quelques lemmes et notations.

Lemme 1. *Si $F \in C^1 \cap Lip(W, \mathbb{R})$ où W est muni de la norme uniforme,*

$$F(x+h) = F(x) + < F'(x), h > + \|h\| \varepsilon_x(h)$$

où $\varepsilon_x(h)$ est bornée (en x et h) et $\varepsilon_x(h) \to 0$ quand $h \to 0$ dans W, et où $x \mapsto F'(x)$ est continue bornée de W dans l'espace de Banach des mesures de Radon sur $[0,1]$.

Démonstration. Il résulte en effet des hypothèses que $| < F'(x), u > | \leq K$ pour tout u unitaire dans W où K est la constante de Lipschitz de F ce qui donne le résultat.

Il sera commode d'utiliser l'opérateur $(.)^\#$ qui est un gradient particulier construit avec une copie de l'espace initial (cf. [2] p80).

Soit $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathbb{P}})$ une copie de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\widehat{U_n}$ les coordonnées de $\hat{\Omega}$. Choisissant un opérateur dièse pour la structure $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu, \mathbf{d}, \gamma)$, nous en déduisons un opérateur dièse pour la structure produit (cf. [2] p80 remarque) en posant $U_n^\# = j^\#(U_n, \widehat{U_n})$. Maintenant pour définir l'opérateur $(.)^\#$ de $\mathbb{D}$ dans $L^2(\Omega \times \hat{\Omega}, \mathbb{P} \times \hat{\mathbb{P}})$ il n'est que de poser si $H = h(U_1, \ldots, U_k, \ldots) \in \mathbb{D}$

$$H^\# = \sum_i h'_i(U_1, \ldots, U_n, \ldots) U_i^\#.$$

On a alors

$$\hat{\mathbb{E}}[(H^\#)^2] = \Gamma[H] \qquad \forall H \in \mathbb{D}$$

d'où il résulte (cf. [2]) que $\forall \varphi \in C^1 \cap Lip$, $\forall H_1, \ldots, H_p \in \mathbb{D}$

$$(\varphi(H_1, \ldots, H_p))^\# = \sum_i \varphi'_i(H_1, \ldots, H_q) H_i^\#.$$

De même sur l'espace de Wiener, nous considérons une copie $(\hat{W}, \hat{\mathcal{W}}, \hat{m})$ et l'opérateur $(.)^\#$ de $\mathbb{D}_0$ dans $L^2(W \times \mathcal{W}, m \times \hat{m})$ qui vérifie (cf. [2] chap VI §2) $(B_t)^\# = \frac{\sqrt{c}}{\sigma} \hat{B}_t$ et $\forall H \in \mathbb{D}_0 \quad \hat{\mathbb{E}}[(H^\#)^2] = \Gamma_0[H]$.

Nous avons alors

Lemme 2. *Soit $F \in C^1 \cap Lip(W)$, on a $F(X_n) \in \mathbb{D}$ et*

$$(F(X_n))^\# = \int_{[0,1]} (X_n(s))^\# \, F'(X_n)(ds)$$

et

$$\Gamma[F(X_n)] = \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} \Gamma[X_n(s), X_n(t)] F'(X_n)(ds) F'(X_n)(dt).$$

De même $F(B) \in \mathbb{D}_0$ et $(F(B))^\# = \int_{[0,1]} B^\#(s) \, F'(B)(ds)$ et

$$\Gamma[F(B)] = \int_{[0,1]} \int_{[0,1]} s \wedge t \, F'(B)(ds) F'(B)(dt) = \int_0^1 < F'(B), 1_{[u,1]} >^2 \, du.$$

Démonstration. Les formules sont aisées à établir lorsque $F(x)$ ne dépend que d'un nombre fini des valeurs prises par x. Puis pour $F \in C^1 \cap Lip$ quelconque, soit $P_k(x)$

l'approximation de x affine par morceaux de pas $\frac{1}{k}$ et posons $F_k(x) = F \circ P_k(x)$. F_k est de classe $C^1 \cap Lip$ et on a $(F_k)' = P_k^* F' P_k$ où P_k^* est l'opérateur adjoint de P_k. Nous avons

$$(F_k(X_n))^{\#} = \int_{[0,1]} (X_n(s))^{\#}\, F_k'(X_n)(ds).$$

Compte tenu de ce que $s \mapsto (X_n(s))^{\#}$ est continue comme étant l'approximation affine par morceau de la promenade des $U_n^{\#}$, nous avons

$$(F_k(X_n))^{\#} =< P_k(X_n(.))^{\#}, F'(P_k(X_n)) > .$$

D'où il résulte que $F_k(X_n))^{\#}$ converge vers $< (X_n(.))^{\#}, F'(X_n) >$ en restant dominé en module par $\max_s |(X_n(s))^{\#}| \max_x \|F'(x)\|$ donc dans $L^2(\mathbb{P} \times \hat{\mathbb{P}})$. La première formule résulte alors du fait que $(.)^{\#}$ est un opérateur fermé. Les autres formules en découlent ou se démontrent de façon analogue.

La première démonstration du théorème s'engage maintenant naturellement:
Première démonstration

Du lemme précédent et de la formule (2) nous tirons

$$\begin{aligned} \Gamma[F(X_n)] = \;& \int\int \left(\tfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{[ns]\wedge[nt]} \Gamma[U_k]\right) F'(X_n)(ds) F'(X_n)(dt) \\ & + \int\int \alpha(n,s,t) F'(X_n)(ds) F'(X_n)(dt) \\ = \;& (A) + (B). \end{aligned}$$

Le second terme peut être majoré ainsi

$$|(B)| \leq \frac{1}{n} \sup_{k \leq n} \Gamma[U_k] \|F'(X_n)\|^2$$

où $\|F'(X_n)\|$ est la masse totale de la mesure $F'(X_n)$. Il résulte alors du lemme suivant que $\mathbb{E}[|(B)|] \to 0$ quand n tend vers l'infini.

Lemme 3. *Si les Y_k sont i.i.d. dans L^1 et positives,* $\lim_n \mathbb{E}[\frac{1}{n} \sup_{k \leq n} Y_k] = 0$.

Preuve du lemme. On a

$$\mathbb{E}[\frac{1}{n} \sup_{k \leq n} Y_k] = \int_0^\infty \frac{1 - ((1 - \mathbb{P}(Y_1 > a))^n}{n} da$$

et

$$\frac{1 - ((1 - \mathbb{P}(Y_1 > a))^n}{n} \leq \mathbb{P}(Y_1 > a)$$

qui est intégrable puisque $Y_1 \in L^1$ donc le théorème de convergence dominée s'applique et donne le résultat.

En ce qui concerne le premier terme (A) posons $V_k = \sum_{i=1}^k (\Gamma[U_i] - \mathbb{E}\Gamma[U_i])$. Supposant $\Gamma[U_1] \in L^p$ pour un $p > 1$, nous avons par l'inégalité de Doob ([10] p. 68) appliquée à la martingale V_k

$$\mathbb{E}[\frac{1}{n} \max_{1 \leq k \leq n} |V_k|] \leq \frac{p}{p-1} \frac{1}{n} \max_{1 \leq k \leq n} k \|\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\Gamma[U_i] - \mathbb{E}\Gamma[U_i])\|_p$$

Le second membre est de la forme $\frac{1}{n} \max_{k \leq n} k\varepsilon(k)$ avec $\varepsilon(k) \to 0$ donc tend vers zéro quand $n \to \infty$.

Il résulte de cette majoration que $\mathbb{E}[(A)]$ a même limite que

$$\mathbb{E}\int\int\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[ns]\wedge[nt]}\mathbb{E}[\Gamma[U_k]]\right)F'(X_n)(ds)F'(X_n)(dt)$$

ce qui vaut puisque les $\Gamma[U_k]$ sont i.i.d.

$$c\mathbb{E}\int_0^1 < F'(X_n), 1_{[\frac{[nu]}{n},1]} >^2\ du$$

D'où par le théorème de Donsker, l'application $x \mapsto \int < F'(x), 1_{[u,1]} >^2 du$ étant continue bornée, on a finalement

$$\mathbb{E}\Gamma[F(X_n)] \to c\mathbb{E}\Gamma_0[F(B)] \qquad\qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Pour lever l'hypothèse $\Gamma[U_1] \in L^p$ pour un $p > 1$, nous abordons la question différemment. De

$$X_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{[nt]} U_k + (nt - [nt])U_{[nt]+1}\right)$$

nous tirons

$$X_n^{\#}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{[nt]} U_k^{\#} + (nt - [nt])U_{[nt]+1}^{\#}\right)$$

de telle sorte que par le théorème de Donsker appliqué aux couples $(U_k, U_k^{\#})$ qui sont i.i.d. on a si G est continue bornée de $W \times W$ dans $\mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\hat{\mathbb{E}}[G(X_n, X_n^{\#})] \to \mathbb{E}\hat{\mathbb{E}}[G(B, B^{\#})].$$

Pour démontrer le théorème en appliquant cette idée à $F(X_n)^{\#} = \int X_n^{\#}(s)F'(X_n)(ds)$ il faudrait disposer du théorème de Donsker non seulement pour les fonctions bornées mais pour les G telles que $|G(x)| \leq K_1\|x\|^2 + K_2$. C'est ce que nous établissons ici:

Théorème 2. *Soient $X_n(t)$ comme dans le théorème de Donsker, et $B(t)$ un mouvement brownien de variance $\sigma^2 t$, alors*

$$\mathbb{E}[\Phi(X_n)] \to \mathbb{E}[\Phi(B)]$$

pour toute Φ continue de W dans $\mathbb{R}$ telle que $|\Phi(x)| \leq K_1\|x\|^2 + K_2$.
Démonstration. Posons

$$Z_n = \max_t |X_n(t)| = \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1\leq k\leq n} |\sum_{j=1}^{k} U_j|.$$

a) Il suffit de montrer que les v. a. Z_n^2 sont uniformément intégrables.

En effet, $\varepsilon > 0$ étant donné, cette uniforme intégrabilité entraîne que l'on peut trouver $a > 0$ tel que

$$|\mathbb{E}[(\Phi(B) \wedge a) \vee (-a)] - \mathbb{E}[\Phi(B)]| \leq \varepsilon/3$$

et que $\forall n$

$$|\mathbb{E}[(\Phi(X_n)\wedge a)\vee(-a)]-\mathbb{E}\Phi(X_n)|\leq \mathbb{E}[|\Phi(X_n)|1_{|\Phi(X_n)|>a}]\leq \varepsilon/3.$$

Choisissant alors, d'après le théorème de Donsker, n assez grand pour que

$$|\mathbb{E}[(\Phi(X_n)\wedge a)\vee(-a)]-\mathbb{E}[(\Phi(B)\wedge a)\vee(-a)]|\leq \varepsilon/3$$

on a $|\mathbb{E}\Phi(X_n)-\mathbb{E}\Phi(B)|\leq\varepsilon$.
b) Pour montrer que les v. a. Z_n^2 sont uniformément intégrables, nous posons $S_n=\sum_{i=1}^n U_i$ et nous utilisons la majoration suivante ([1] p.69)

$$\mathbb{P}\{\max_{i\leq n}|S_i|\geq\lambda\sigma\sqrt{n}\}\ \leq\ 2\mathbb{P}\{\frac{|S_n|}{\sigma\sqrt{n}}\geq\frac{\lambda}{2}\}\quad \text{si } \lambda\geq 2\sqrt{2}$$

d'où

$$\mathbb{P}\{Z_n^2\geq\alpha\}\ \leq\ 2\mathbb{P}\{\frac{|S_n|}{\sigma\sqrt{n}}\geq\frac{\sqrt{\alpha}}{2\sigma}\}\quad \text{si } \alpha\geq 8\sigma^2.$$

De

$$\mathbb{E}[Z_n^2 1_{Z_n^2\geq\alpha}]=\alpha\mathbb{P}\{Z_n^2\geq\alpha\}+\int_\alpha^\infty \mathbb{P}\{Z_n^2\geq t\}dt$$

nous déduisons

$$\mathbb{E}[Z_n^2 1_{Z_n^2\geq\alpha}]\leq 2\alpha\mathbb{P}\{\frac{|S_n|}{\sigma\sqrt{n}}\geq\frac{\sqrt{\alpha}}{2\sigma}\}+2\mathbb{E}[(4\frac{S_n^2}{n}-\alpha)^+].$$

Il résulte alors du théorème de limite centrale, et du fait que les $\frac{S_n^2}{n}$ sont uniformément intégrables, que si $\alpha\geq 8\sigma^2$,

$$\limsup_n \mathbb{E}[Z_n^2 1_{Z_n^2\geq\alpha}]\leq 2\alpha\mathbb{P}\{|N|\geq\frac{\sqrt{\alpha}}{2\sigma}\}+2\mathbb{E}(4N^2-\alpha)^+ \tag{4}$$

où N est une variable normale réduite. Donc

$$\lim_{\alpha\uparrow\infty}\limsup_n \mathbb{E}[Z_n^2 1_{Z_n^2\geq\alpha}]=0$$

et ceci entraîne l'uniforme intégrabilité des Z_n^2. C.Q.F.D.

Revenons à la seconde démonstration du théorème 1.

La fonction $G(x,y)=\int_{[0,1]}y(s)\,F'(x)(ds)$ est continue de $W\times W$ dans $\mathbb{R}$ et vérifie $|G(x,y)|\leq\|y\|^2\sup_x\|F'(x)\|^2$. Le théorème 2 étendu aux variables bidimensionnelles, ce qui est sans difficulté, s'applique et donne par le lemme 2

$$\mathbb{E}\Gamma[F(X_n)]=\mathbb{E}\hat{\mathbb{E}}[((F(X_n))^\#)^2]\to\mathbb{E}[\Gamma_0[F(B)]]. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Par les propriétés de la convergence étroite vis à vis des fonctions Riemann-intégrables, cette seconde démonstration donne également :

Corollaire 1. *Soit $\Phi(x,y)$ une fonction de $W\times\hat{W}$ dans $\mathbb{R}$ continue hors d'un négligeable pour $m\times\mu$ où m est la loi de B et μ celle de $B^\#$, telle que*

$$|\Phi(x,y)|\leq K_1\|x\|^2+K_2\|y\|^2+K_3$$

alors $\mathbb{E}\hat{\mathbb{E}}\Phi(X_n, X_n^{\#}) \to \mathbb{E}\hat{\mathbb{E}}\Phi(B, B^{\#})$.

Application. Supposons ici pour simplifier les notations que $\sigma^2 = c = 1$ de sorte que $B^{\#} = \hat{B}$. La norme uniforme $N(w) = \|w\|$ qui est continue et lipschitzienne appartient à $\mathbb{D}_0$ (cf. [7] avec la méthode Feyel-La Pradelle [9], ou [12] p.90), de même la fonctionnelle $M(w) = \sup_t w(t)$.

D'après les résultats de Nualart et Vives [11] les opérateur $(.)^{\#}$ et Γ_0 sont calculables sur ces fonctionnelles :

i) $M^{\#}(w, \hat{w}) = \hat{B}_\Sigma = \hat{w}(\Sigma(w))$ où $\Sigma = \inf\{t : B(t) = \sup_s B(s)\}$ d'où il résulte que $\Gamma_0[M] = \Sigma$.

ii) $N^{\#}(w, \hat{w}) = \text{sign}(B_{\mathcal{T}})\hat{B}_{\mathcal{T}}$ où $\mathcal{T} = \inf\{t : |B(t)| = \sup_s |B(s)|\}$ d'où il résulte que $\Gamma_0[N] = \mathcal{T}$.

L'ensemble des trajectoires browniennes qui atteignent plusieurs fois leur maximum est négligeable et hors de cet ensemble, il n'est pas difficile de voir que l'application $w \mapsto \Sigma(w)$ est continue, il résulte alors du corollaire 1 que lorsque $n \uparrow \infty$:

$$\mathbb{E}\Gamma[\sup_t X_n(t)] = \mathbb{E}\Gamma[\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1\leq k\leq n} S_k] \to \mathbb{E}\hat{\mathbb{E}}[M^{\#2}] = \mathbb{E}[\Sigma]$$

et de même

$$\mathbb{E}\Gamma[\|X_n(t)\|_\infty] = \mathbb{E}\Gamma[\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1\leq k\leq n} |S_k|] \to \mathbb{E}\hat{\mathbb{E}}[N^{\#2}] = \mathbb{E}[\mathcal{T}].$$

Ainsi nous pouvons énoncer avec les notations ci-dessus :

Proposition 2. *Soit* $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ *de classe* $C^1 \cap Lip$*, alors d'une part*

$$\mathbb{E}[F^2(\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1\leq k\leq n} S_k, \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1\leq k\leq n} |S_k|)] \to \mathbb{E}[F^2(M, N)]$$

d'autre part

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\Gamma[F(\tfrac{1}{\sqrt{n}} \max_{1\leq k\leq n} S_k, \tfrac{1}{\sqrt{n}} \max_{1\leq k\leq n} |S_k|)] \\ &\quad \to \mathbb{E}[F_1'^2(M,N)\mathcal{T}] + 2\mathbb{E}[F_1'(M,N)F_2'(M,N)\, \mathcal{T}\wedge\Sigma] + \mathbb{E}[F_2'^2(M,N)\Sigma].\end{aligned}$$

Indépendance asymptotique. Lorsque n augmente indéfiniment, la prise en compte d'un nombre croissant de U_n fait que le processus X_n se comporte comme un processus indépendant d'une variable fixée à l'avance. Le résultat suivant est classique :

Proposition 3. *Soit* Y *une v. a. définie sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *intégrable. Si* $\varphi \in C_b(W, \mathbb{R})$ *on a*

$$\mathbb{E}[Y\varphi(X_n)] \to \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[\varphi(B)].$$

Dans le même esprit, grâce aux théorèmes 1 et 2 on a

Théorème 3. *Si* $Z \in L^\infty$, $Y \in \mathbb{D} \cap L^\infty$, $\psi \in C^1 \cap Lip$ *et bornée, alors*

$$\mathbb{E}[Z\Gamma[Y\psi(X_n)]] \to \mathbb{E}[Z\Gamma[Y]]\mathbb{E}[(\psi(B))^2] + \mathbb{E}[ZY^2]\mathbb{E}[\Gamma_0[\psi(B)]].$$

Observons que si $Z \geq 0$ et $\mathbb{E}Z = 1$ sous la probabilité $\mathbf{Q} = Z.\mathbb{P}$ les variables U_n ne sont plus nécessairement indépendantes, et de plus la forme $\mathbf{Q}[Z\Gamma[.]]$ n'est plus nécessairement fermable. Le résultat précédent est donc une extension stricte du théorème 1.

Remarque finale. Terminons par quelques mots sur le résultat principal lui-même. Supposons que les U_n soient simulées par une méthode de Monte Carlo avec une certaine précision, de telle façon que l'hypothèse d'indépendance et de stationarité des variables et de leurs erreurs puisse être considérée comme acceptable. Contrairement certains théorèmes limites comme la loi des grands nombres qui effacent les erreurs (cf [4]), la normalisation faite pour la convergence en loi vers le brownien ne conduit sur celui-ci ni à une erreur nulle ni à une erreur infinie mais à l'erreur d'Ornstein-Uhlenbeck. Que ce soit cette structure d'erreur qu'on obtienne se conçoit bien car, d'après la formule de Mehler (cf [12] p49 et [2] p116 §2.5.9), l'erreur qu'elle décrit est transversale et stationnaire. Nous voyons donc que pour obtenir d'autres structures d'erreur sur l'espace de Wiener, telles que des structures de Mehler généralisées (cf [2] p113 §2.5), il faut supposer que les erreurs sur les U_n sont correlées.

REFERENCES

[1] Billingsley, P. *Convergence of Probability measures*, Wiley 1968.

[2] Bouleau, N. *Error Calculus for Finance ansd Physics, the Language of Dirichlet Forms*, De Gruyter, 2003.

[3] Bouleau, N. "Algunes consideracions sobre llenguatges axiomatitzats amb eines d'extensió: un enfocament en la teoria de la probabilitat i el càlcul d'errors amb formes de Dirichlet" *Bull. de la Soc. Catalana de Matematiques* Vol. 18, núm. 2, 2003, 25-37.

[4] Bouleau, N. "Calcul d'erreur complet lipschitzien et formes de Dirichlet", *J. Math. pures et appl.* 80, 9, 961-976, 2001

[5] Bouleau, N. "Error calculus and path sensitivity in Financial models", *Mathematical Finance* vol 13/1, jan 2003, 115-134.

[6] Bouleau, N. et Chorro, Chr. "Error structures and parameter estimation" *C. R. Acad. Sci. Paris* sér I 338, (2004) 305-310.

[7] Bouleau, N., et Hirsch, F. *Dirichlet forms and analysis on Wiener space,* De Gruyter, 1991.

[8] Donsker, M. "An invariance principle for certain probability limit theorems" *Mem. Amer. Math. Soc.* no 6 ,1951.

[9] Feyel, D., et la Pradelle, A. de : "Espaces de Sobolev Gaussiens", *Ann. Inst. Fourier*, 39-4, 875-908, 1989.

[10] Neveu, J. *Martingales à temps discret*, Masson, 1972.

[11] Nualart, D. et Vives, J. "Continuité de la loi du maximum d'un processus continu" *C. R. Acd. Sci. Paris* sér I, 307, 349-354, 1988.

[12]Nualart, N. : *The Malliavin calculus and related topics.* Springer, 1995.