INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE ET EN AUTOMATIQUE

Étude de stabilité d'un schéma volumes finis pour les équations de l'élasto-dynamique en maillages non structurés

Mondher Ben Jemaa — Serge Piperno — Nathalie Glinsky-Olivier

N° 5817 – version 2

version initiale Janvier 2006 – version révisée Février 2006

Thème NUM

Rapport de recherche

N 0249-6399

Étude de stabilité d'un schéma volumes finis pour les équations de l'élasto-dynamique en maillages non structurés

Mondher Ben Jemaa[*], Serge Piperno [†] , Nathalie Glinsky-Olivier [‡]

Thème NUM — Systèmes numériques
Projet CAIMAN

Rapport de recherche n° 5817 – version 2[§]— version initiale Janvier 2006 — version révisée Février 2006 24 pages

Résumé : Nous démontrons une condition suffisante de stabilité L^2 de type CFL pour un schéma en volumes finis avec flux centrés pour la résolution des équations de l'élasto-dynamique en deux dimensions d'espace. Nous discutons aussi diverses conditions aux limites dites réfléchissantes.

Mots-clés : élasto-dynamique, méthode volumes finis, flux centrés, stabilité L^2, maillages non structurés, conditions absorbantes, conditions réfléchissantes

[*] Mondher.Ben_Jemaa@sohia.inria.fr
[†] Serge.Piperno@sophia.inria.fr
[‡] Nathalie.Glinsky@sophia.inria.fr

[§] Erratum p.13, $\| \mathbb{B} \| = \rho_i \, V_p$ et non $\| \mathbb{B} \| = V_p$. Erratum p.14, ligne 3, $\Delta t < \dfrac{4}{V_p} \dfrac{\mathcal{A}_i}{p_i} \min(\dfrac{V_s}{V_p}, \dfrac{1}{2})$ et non $\Delta t < \dfrac{4}{V_p} \dfrac{\mathcal{A}_i}{p_i} min(\rho_i, \dfrac{1}{max(\frac{V_p}{V_s}, 2)})$

Sability study of a finite volume scheme for elastodynamic equations on unstructured meshes

Abstract: We prove a sufficient CFL-like condition for the L^2 stability of the second-order accurate finite volume scheme proposed by Remaki for the time-domain solution of the elastodynamic equations in heterogeneous media with absorbing boundary conditions. We also discuss various reflecting boundary conditions.

Key-words: elastodynamic, finite volume method, centered fluxes, L^2-stability, unstructured meshes, absorbing boundary conditions, reflecting conditions

Table des matières

Introduction

La sismologie est la science qui étudie les tremblements de terre et la propopagation des vibrations (ondes sismiques) qu'ils génèrent. Elle est fondée sur l'analyse des caractéristiques des ondes sismiques. Si cette discipline n'est pas récente, les premiers signaux enregistrés datant de 1889, elle l'est plus sur le plan théorique, puisque les premiers résultats datent des années soixante, mais aussi sur le plan numérique, grâce à l'élaboration de nouvelles méthodes numériques et la rapidité croissante des ordinateurs. Parmi ces méthodes, les différences finies règnent en maître sur cette discipline grâce à la facilité de leur implentation sur machine, ainsi qu'à l'ordre élevé du schéma numérique (Andrews, 1976a,b; Madariaga, 1976; Virieux & Madariaga, 1982; Virieux, 1986; Cruz-Atienza & Virieux, 2004). Ces méthodes sont malheureusement assez limitées dès qu'il s'agit de simuler des topographies complexes, à cause de difficultés liées au maillage, ainsi que pour les milieux tridimensionnels à cause du coût élevé en espace mémoire. D'autres méthodes comme les éléments finis (Day, 1977; Cohen & Fauqueux, 2001), et particulièrement leur formulation spectrale (Komatitsch & Vilotte, 1998; Capdeville et al., 2003; Chaljub et al., 2003), les méthodes integrales de frontière (Das & Aki, 1977; Andrews, 1985; Bécache & Duong, 1994; Tada & Yamashita, 1977; Tada & Madariaga, 2001) fournissent des résultats assez précis, mais se heurtent au problème majeur qu'est l'inversion de matrices de grandes tailles, y compris pour la résolution dans le domaine temporel lorsqu'on utilise des schémas en temps dits explicites.

Un des avantages des méthodes Galerkin discontinu en général, et de sa variante volumes finis en particulier, est qu'elles sont capable de prendre en considération les maillages non structurés, voire non conformes, sans avoir à inverser des matrices de grandes tailles. Dans un précédent rapport (Ben Jemaa, 2004), nous nous étions intéressés au schéma volumes finis introduit par Remaki (1999), appliqué aux équations de l'élasto-dynamique pour le problème de rupture, ainsi qu'aux conditions aux limites imposées sur la faille. Dans le présent travail, nous nous sommes concentrés sur l'étude de la stabilité du schéma volumes finis dans un maillage non structuré et nous montrons que, sous certaines conditions de type CFL, le schéma est stable en norme L^2.

1 Mise en équations

Dans un milieu infini, élastique, linéaire et isotrope, le mouvement d'un élément de matière est régi par les équations élasto-dynamiques suivantes :

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \overrightarrow{div \, \underline{\sigma}} \tag{1}$$

$$\underline{\sigma} = \lambda \, div \, \vec{u} \, I_2 + \mu \left(\vec{\nabla} \, \vec{u} + {}^t(\vec{\nabla} \, \vec{u}) \right) \tag{2}$$

où $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur déplacement des particules, $\underline{\sigma} \in \mathrm{sym}_2(\mathbb{R})$ est le tenseur des contraintes, ρ est la masse volumique et λ et μ sont les coefficients de Lamé locaux.

Remarque 1.1. *En deux dimensions d'espace, le tenseur de contraintes $\underline{\sigma}$ est défini par $\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$. Étant symétrique, il est souvent plus commode de l'écrire sous une forme vectorielle. On introduit alors les variables suivantes $T = (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})/2$ et $T' = (\sigma_{xx} - \sigma_{zz})/2$ et on appellera, dans toute la suite, vecteur de contraintes le vecteur $\vec{\tau}$ défini par $\vec{\tau} = {}^t(T, T', \sigma_{xz})$.*

Le système (1)-(2) est transformé en un système hyperbolique de premier ordre en introduisant le vecteur vitesse défini par $\vec{v} = \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t}$. On obtient ainsi le système suivant :

$$\tilde{\Lambda} \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t} = (M_x \frac{\partial}{\partial x} + M_z \frac{\partial}{\partial z}) \, \vec{v} \tag{3}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = (N_x \frac{\partial}{\partial x} + N_z \frac{\partial}{\partial z}) \, \vec{\tau} \tag{4}$$

où $\vec{\tau}$ est le vecteur de contraintes, $\tilde{\Lambda} = diag(\dfrac{1}{\lambda + \mu}, \dfrac{1}{\mu}, \dfrac{1}{\mu})$,

$M_x = {}^t N_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_z = {}^t N_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si on désigne par $\vec{F}$ et $\vec{G}$ les fonctions définies respectivement dans $\mathbb{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ par $\vec{F}(\vec{v}) = (M_x \vec{v}, M_z \vec{v})$ et $\vec{G}(\vec{\tau}) = (N_x \vec{\tau}, N_z \vec{\tau})$, le système s'ecrit alors :

$$\tilde{\Lambda} \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t} = \overrightarrow{div \, \vec{F}(\vec{v})} \tag{5}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \overrightarrow{div \, \vec{G}(\vec{\tau})} \tag{6}$$

Par la formule de Green, on obtient en intégrant les équations (5) et (6) sur un volume $\mathcal{T}$:

$$\int_{\mathcal{T}} \tilde{\Lambda} \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t} = \int_{\partial \mathcal{T}} \vec{F}(\vec{v}) \, \vec{n} \, dS \tag{7}$$

$$\int_{\mathcal{T}} \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \int_{\partial \mathcal{T}} \vec{G}(\vec{\tau}) \, \vec{n} \, dS \tag{8}$$

où $\vec{n}$ désigne la normale unitaire à $\mathcal{T}$, dirigée vers l'extérieur.

2 Un schéma volumes finis de type saute-mouton en temps avec flux centrés en espace

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^2$, et désignons par $\partial\Omega$ son bord. Soit $V(\Omega)$ une partition en triangles de Ω. Pour chaque volume de contrôle ou cellule $\mathcal{T}_i$ supposée polygonale de $V(\Omega)$, on désigne par ρ_i, λ_i et μ_i respectivement la densité et les coefficients de Lamé, supposés constants dans chaque cellule.
Pour simplifier l'écriture des équations qui vont suivre, nous allons introduire les notations suivantes :

1. $\mathcal{A}_i = \int_{\mathcal{T}_i} dS$ volume de la cellule $\mathcal{T}_i$.
2. $\mathcal{T}_{ij} = \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_j$ interface entre les deux cellules voisines $\mathcal{T}_i$ et $\mathcal{T}_j$.
3. $\vec{I}_{ij} = \int_{\mathcal{T}_{ij}} \vec{n}_{ij}\, dS$ où $\vec{n}_{ij}$ est la normale unitaire dirigée de $\mathcal{T}_i$ vers $\mathcal{T}_j$.
4. $l_{ij} =\parallel \vec{I}_{ij} \parallel$ longueur de $\mathcal{T}_{ij}$.

Le système (7)-(8) s'écrit alors :

$$\mathcal{A}_i \tilde{\Lambda}_i (\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t})_i = \sum_{j \in V(i)} l_{ij} F_{ij} \tag{9}$$

$$\mathcal{A}_i \rho (\frac{\partial \vec{\nu}}{\partial t})_i = \sum_{j \in V(i)} l_{ij} G_{ij} \tag{10}$$

où $(\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t})_i$ et $(\frac{\partial \vec{\nu}}{\partial t})_i$ sont respectivement des approximations, supposées constantes, de $\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t}$ et $\frac{\partial \vec{\nu}}{\partial t}$ dans chaque cellule $\mathcal{T}_i$, $l_{ij}F_{ij}$ et $l_{ij}G_{ij}$ sont des approximations des flux $\int_{\partial \mathcal{T}_i} \vec{F}(\vec{\nu})\, \vec{n}\, dS$ et $\int_{\partial \mathcal{T}_i} \vec{F}(\vec{\tau})\, \vec{n}\, dS$ respectivement, et $V(i)$ désigne l'ensemble des cellules voisines de $\mathcal{T}_i$.

2.1 Choix des flux

On utilise des flux centrés en espace, introduit par Remaki (1999) :
$F_{ij} = F(\vec{\nu}_i, \vec{\nu}_j, \vec{n}_{ij})$ avec $F(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}) = \dfrac{F(\vec{u}) + F(\vec{v})}{2} \cdot \vec{n} = \underbrace{(\sum_k n_k M_k)}_{\mathbb{P}} \dfrac{\vec{u} + \vec{v}}{2}$

et
$G_{ij} = G(\vec{\tau}_i, \vec{\tau}_j, \vec{n}_{ij})$ avec $G(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n}) = \dfrac{G(\vec{u}) + G(\vec{v})}{2} \cdot \vec{n} = \underbrace{(\sum_k n_k N_k)}_{\mathbb{Q}} \dfrac{\vec{u} + \vec{v}}{2}.$

Pour la discrétisation temporelle, on utilise un schéma saute-mouton, et le schéma s'écrit alors :

$$\mathcal{A}_i \tilde{\Lambda}_i \frac{\tau_i^{n+1} - \tau_i^n}{\Delta t} - \sum_{j \in V(i)} l_{ij} F_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = 0 \tag{11}$$

$$\mathcal{A}_i \rho_i \frac{\nu_i^{n+\frac{3}{2}} - \nu_i^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} - \sum_{j \in V(i)} l_{ij} G_{ij}^{n+1} = 0 \tag{12}$$

avec les flux internes :

$$F_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = F(\nu_i^{n+\frac{1}{2}}, \nu_j^{n+\frac{1}{2}}, n_{ij}) = \mathbb{P}_{ij} \frac{\nu_i^{n+\frac{1}{2}} + \nu_j^{n+\frac{1}{2}}}{2} \text{ où } \mathbb{P}_{ij} = \sum_{k \in \{x,z\}} n_{ij_k} M_k$$

et

$$G_{ij}^{n+1} = G(\tau_i^{n+1}, \tau_j^{n+1}, n_{ij}) = \mathbb{Q}_{ij} \frac{\tau_i^{n+1} + \tau_j^{n+1}}{2} \text{ où } \mathbb{Q}_{ij} = \sum_{k \in \{x,z\}} n_{ij_k} N_k.$$

Remarque 2.1. *Il importe de rappeler les égalités élémentaires suivantes :*

1. $\vec{n}_{ij} = -\vec{n}_{ji} \quad \Longrightarrow \mathbb{P}_{ij} = -\mathbb{P}_{ji}$ *et* $\mathbb{Q}_{ij} = -\mathbb{Q}_{ji}$
2. $\sum_{j \in V(i)} l_{ij}\, \vec{n}_{ij} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \sum_{j \in V(i)} l_{ij}\, \mathbb{P}_{ij} = 0$ *et* $\sum_{j \in V(i)} l_{ij}\, \mathbb{Q}_{ij} = 0.$

3 Une conditions suffisante de stabilité

3.1 Estimation d'énergie

On cherche à déterminer une condition nécessaire et/ou suffisante de stabilité du schéma volumes finis (11)-(12), en tenant compte des conditions aux limites qu'il nous reste à déterminer. Dans (Ben Jemaa, 2004), nous avons défini, via la loi de Hooke[1] généralisée, une énergie totale discrète du système, donnée par :

$$E^n = \frac{1}{2} \sum_i \mathcal{A}_i ({}^t\tau_i^n \tilde{\Lambda}_i \tau_i^n + \rho_i {}^t\nu_i^{n-\frac{1}{2}} \nu_i^{n+\frac{1}{2}}) \tag{13}$$

La variation de cette énergie entre deux pas de temps successifs s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta E &= E^{n+1} - E^n \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \mathcal{A}_i \big({}^t(\tau_i^{n+1} + \tau_i^n)\, \tilde{\Lambda}_i\, (\tau_i^{n+1} - \tau_i^n) \;+\; \rho_i\, {}^t\nu_i^{n+\frac{1}{2}}\, (\nu_i^{n+\frac{3}{2}} - \nu_i^{n-\frac{1}{2}}) \big) \\ &\quad (\text{car } \tilde{\Lambda}_i \text{ est symétrique}). \end{aligned}$$

[1] Robert Hooke (1635-1703)

En notant $\tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} = \dfrac{\tau_i^{n+1} + \tau_i^n}{2}$, on a :

$$
\begin{aligned}
\Delta E &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \in V(i)} l_{ij} \big({}^t\tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} \, \mathbb{P}_{ij} \, (\nu_i^{n+\frac{1}{2}} + \nu_j^{n+\frac{1}{2}}) + {}^t\nu_i^{n+\frac{1}{2}} \, \mathbb{Q}_{ij} (\tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} + \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]}) \big) \\
&= \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \in V(i)} l_{ij} \big({}^t\tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} \, \mathbb{P}_{ij} \, \nu_j^{n+\frac{1}{2}} + {}^t\nu_i^{n+\frac{1}{2}} \, \mathbb{Q}_{ij} \, \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]} \big) \\
&= \frac{\Delta t}{2} \sum_{internes}^{interfaces} \Big[l_{ij} \big({}^t\tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} \, \mathbb{P}_{ij} \, \nu_j^{n+\frac{1}{2}} + {}^t\nu_i^{n+\frac{1}{2}} \, \mathbb{Q}_{ij} \, \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]} \big) \\
&\qquad\qquad + l_{ji} \big({}^t\tau_j^{[n+\frac{1}{2}]} \, \mathbb{P}_{ji} \, \nu_i^{n+\frac{1}{2}} + {}^t\nu_j^{n+\frac{1}{2}} \, \mathbb{Q}_{ji} \, \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} \big) \Big] \\
&\quad + \frac{\Delta t}{2} \sum_{externes}^{interfaces} l_{ij} \big({}^t\tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} \, \mathbb{P}_{ij} \, \nu_j^{n+\frac{1}{2}} + {}^t\nu_i^{n+\frac{1}{2}} \, \mathbb{Q}_{ij} \, \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]} \big) \\
&= \frac{\Delta t}{2} \sum_{externes}^{interfaces} l_{ij} \big({}^t\nu_j^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_{ij} \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} + {}^t\nu_i^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_{ij} \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]} \big) \\
&= \Delta t \sum_{externes}^{interfaces} l_{ij} \big({}^t \big(\frac{\nu_i^{n+\frac{1}{2}} + \nu_j^{n+\frac{1}{2}}}{2} \big) \mathbb{Q}_{ij} \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} - \frac{1}{2} {}^t\nu_i^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_{ij} \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} \\
&\qquad\qquad + {}^t\nu_i^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_{ij} \frac{\tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} + \tau_j^{[n+\frac{1}{2}]}}{2} - \frac{1}{2} {}^t\nu_i^{n+\frac{1}{2}} \mathbb{Q}_{ij} \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} \big) \\
&= \Delta t \sum_{externes}^{interfaces} l_{ij} \big({}^t\nu_i^{n+\frac{1}{2}} (G_{ij}^{[n+\frac{1}{2}]} - \mathbb{Q}_{ij} \tau_i^{[n+\frac{1}{2}]}) + {}^t\tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} F_{ij}^{n+\frac{1}{2}} \big)
\end{aligned}
$$

où le terme “interfaces externes” désigne toute surface à travers laquelle le champ subit une modification (discontinuité, réfléction, absorption, etc ...). Dans la suite, on supposera que le bord $\partial\Omega$ du domaine est la réunion de toutes ces interfaces externes ($\partial\Omega$ n'est donc pas forcément connexe), et on appellera cellule frontière toute cellule contenant une (ou plusieurs) interface externe.

Le calcul précédent montre que la variation de l'énergie totale discrète du système s'écrit uniquement en fonction des flux à travers les interfaces externes. Nous allons montrer dans la suite que E^n est bien une forme quadratique, et que pour des choix appropriés des expressions de flux sur les cellules frontières, et sous certaines conditions de types CFL, cette énergie est définie positive et que sa variation est négative ou nulle, ce qui prouvera la stabilité au sens de la norme L^2 du système.

3.2 Conditions aux limites absorbantes

Sur le bord $\partial\Omega$ du domaine, on propose les flux absorbants suivants :

$$F_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}_{ij}\,\nu_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\,\mathbb{A}\,\tau_i^n$$
$$G_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2}\,\mathbb{Q}_{ij}\,\tau_i^{n+1} - \frac{1}{2}\,\mathbb{B}\,\nu_i^{n+\frac{1}{2}}$$

avec

$$\mathbb{A} = \frac{V_p}{\lambda+2\mu}\begin{pmatrix} 1 & n_x^2-n_z^2 & 2n_xn_z \\ n_x^2-n_z^2 & \frac{4V_p}{V_s}n_x^2n_z^2+(n_x^2-n_z^2)^2 & 2(1-\frac{V_p}{V_s})n_xn_z(n_x^2-n_z^2) \\ 2n_xn_z & 2(1-\frac{V_p}{V_s})n_xn_z(n_x^2-n_z^2) & 4n_x^2n_z^2+\frac{V_p}{V_s}(n_x^2-n_z^2)^2 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbb{B} = \rho\begin{pmatrix} V_pn_x^2+V_sn_z^2 & (V_p-V_s)n_xn_z \\ (V_p-V_s)n_xn_z & V_sn_x^2+V_pn_z^2 \end{pmatrix}$$

V_p et V_s étant respectivement les vitesses de l'onde de pression P et de l'onde de cisaillement S, et sont liées aux propriètés du milieu par les relations

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\,\mu}{\rho}} \quad \text{et} \quad V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

Il n'est pas évident à première vue de deviner l'origine des expressions des flux absorbants ci-dessus. En fait, le lecteur soucieux de plus de précisions peut vérifier que le flux $F_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$ proposé correspond aux trois composantes de contraintes du vecteur $\mathbb{M}_{ij}^{-}\,{}^t(\rho_i\nu_i^{n+\frac{1}{2}},\tilde{\Lambda}_i\tau_i^n)$, où $\mathbb{M}_{ij}$ est la matrice définie par

$$\mathbb{M}_{ij} = \begin{pmatrix} 0_2 & \mathbb{Q}_{ij}\,\tilde{\Lambda}_i^{-1} \\ \frac{1}{\rho_i}\,\mathbb{P}_{ij} & 0_3 \end{pmatrix}$$

qui n'est autre que la matrice de masse du système total des équations de l'élasto-dynamique dans sa forme conservative, ayant pour inconnu le vecteur à cinq composantes ${}^t(\rho\nu,\tilde{\Lambda}\tau)$. L'exposant $''-''$ correspond à la partie négative via la diagonalisation de la matrice $\mathbb{M}_{ij}$. De manière similaire, $G_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$ correspond aux composantes de vitesses du vecteur $\mathbb{M}_{ij}^{-}\,{}^t(\rho_i\nu_i^{n+\frac{1}{2}},\tilde{\Lambda}_i\tau_i^{n+1})$. Physiquement, cela a une explication simple. Sur les bords extérieurs du domaine, on garde les ondes sortantes et on annule les ondes entrantes. Dans Piperno et al. (2002), les auteurs montrent qu'un tel choix est d'ordre un en temps et en espace pour les équations de Maxwell, puisque les flux sont calculés à partir d'un schéma décentré. D'autres résultats sur les conditions absorbantes dans le cas d'un milieu hétérogène ou avec surface libre ainsi qu'une étude comparative avec les couches parfaitement adaptées (PML) pour les équations de l'élasto-dynamique (Berenger, 1996; Collino & Tsogka, 2001) se trouvent dans Glinsky-Olivier et al. (2006).

Remarque 3.1. $\mathbb{A}$ *et* $\mathbb{B}$ *sont deux matrices symétriques positives. En effet :*

$$\mathbb{A} = \frac{V_p}{\lambda + 2\mu}\,\mathbb{T}\,\mathbb{D}\,{}^t\mathbb{T}$$

avec $\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2n_xn_z & n_x^2 - n_z^2 & n_x^2 - n_z^2 \\ n_x^2 - n_z^2 & 2n_xn_z & 2n_xn_z \end{pmatrix}$ *et* $\mathbb{D} = diag(\frac{V_p}{V_s}, 2, 0)$
et

$$\mathbb{B} = \rho\,\mathbb{T}'\,\mathbb{D}'\,{}^t\mathbb{T}'$$

avec $\mathbb{T}' = \begin{pmatrix} n_x & n_z \\ n_z & -n_x \end{pmatrix}$ *et* $\mathbb{D}' = diag(V_p, V_s)$.

En remplaçant les flux par leurs expressions, on obtient après simplification :

$$\begin{aligned}
\Delta E = \Delta t \sum_{absorbantes}^{interfaces} & l_{ij}\big({}^t\nu_i^{n+\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2}\,\mathbb{Q}_{ij}\,\tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} - \frac{1}{4}\,\mathbb{B}\,(\nu_i^{n-\frac{1}{2}} + \nu_i^{n+\frac{1}{2}})) \\
& + {}^t\tau_i^{[n+\frac{1}{2}]}(\frac{1}{2}\,\mathbb{P}_{ij}\,\nu_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\,\mathbb{A}\,\tau_i^n)\big) \\
= -\frac{\Delta t}{4} \sum_{absorbantes}^{interfaces} & l_{ij}\big({}^t\nu_i^{n+\frac{1}{2}}\,\mathbb{B}\,(\nu_i^{n-\frac{1}{2}} + \nu_i^{n+\frac{1}{2}}) + {}^t\tau_i^n\,\mathbb{A}\,(\tau_i^n + \tau_i^{n+1})\big) \\
& \text{(car } \mathbb{A} \text{ est symétrique)}
\end{aligned}$$

3.2.1 Termes correctifs

La variation d'énergie ci dessus n'est pas nécessairement négative comme on le souhaite. Ceci n'est pas très surprenant vue que l'énergie E^n proposée en (13) est basée explicitement sur un décentrage amont en temps, et donc dépend particulièrement du choix de G_{ij}^{n+1}. Cela justifie l'utilisation de termes correctifs. Considérons alors la quantité

$$\mathcal{E}^n = E^n - \Delta t \sum_{absorbantes}^{interfaces} \frac{l_{ij}}{8}({}^t\tau_i^n\,\mathbb{A}\,\tau_i^n - {}^t\nu_i^{n-\frac{1}{2}}\,\mathbb{B}\,\nu_i^{n-\frac{1}{2}}) \tag{14}$$

Nous allons maintenant montrer que la suite $(\mathcal{E}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et que $\mathcal{E}^n$ est bien une forme quadratique définie positive des variables $\nu_i^{n-\frac{1}{2}}$ et τ_i^n.

Le vecteur vitesse $\nu_i^{n+\frac{1}{2}}$ est donné par l'équation (12) et dépend linéairement de $\nu_i^{n-\frac{1}{2}}$ et des flux G_{ij}^n. Ces derniers dépendent linéairement de τ_i^n, et dans le cas des flux absorbants de $\nu_i^{n-\frac{1}{2}}$. Dans tous les cas, on voit que E^n (et donc $\mathcal{E}^n$) est une forme quadratique des variables $\nu_i^{n-\frac{1}{2}}$ et τ_i^n. On a de plus

$$
\begin{aligned}
\Delta\mathcal{E} &= \mathcal{E}^{n+1} - \mathcal{E}^n \\
&= \Delta E - \Delta t \sum_{absorbantes}^{interfaces} \frac{l_{ij}}{8} ({}^t\tau_i^{n+1}\,\mathbb{A}\,\tau_i^{n+1} - {}^t\nu_i^{n+\frac{1}{2}}\,\mathbb{B}\,\nu_i^{n+\frac{1}{2}} - {}^t\tau_i^n\,\mathbb{A}\,\tau_i^n + {}^t\nu_i^{n-\frac{1}{2}}\,\mathbb{B}\,\nu_i^{n-\frac{1}{2}}) \\
&= -\frac{\Delta t}{2} \sum_{absorbantes}^{interfaces} l_{ij} ({}^t\tau_i^n\,\mathbb{A}\,\frac{\tau_i^n + \tau_i^{n+1}}{2} + {}^t\nu_i^{n+\frac{1}{2}}\,\mathbb{B}\,\frac{\nu_i^{n-\frac{1}{2}} + \nu_i^{n+\frac{1}{2}}}{2} \\
&\qquad + \frac{1}{4}{}^t\tau_i^{n+1}\,\mathbb{A}\,\tau_i^{n+1} - \frac{1}{4}{}^t\nu_i^{n+\frac{1}{2}}\,\mathbb{B}\,\nu_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}{}^t\tau_i^n\,\mathbb{A}\,\tau_i^n + \frac{1}{4}{}^t\nu_i^{n-\frac{1}{2}}\,\mathbb{B}\,\nu_i^{n-\frac{1}{2}}) \\
&= -\frac{\Delta t}{8} \sum_{absorbantes}^{interfaces} l_{ij} \big({}^t(\tau_i^n + \tau_i^{n+1})\,\mathbb{A}\,(\tau_i^n + \tau_i^{n+1}) + {}^t(\nu_i^{n-\frac{1}{2}} + \nu_i^{n+\frac{1}{2}})\,\mathbb{B}\,(\nu_i^{n-\frac{1}{2}} + \nu_i^{n+\frac{1}{2}})\big)
\end{aligned}
$$

et comme $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont positives alors $\Delta\mathcal{E} \leq 0$. Ainsi la suite $(\mathcal{E}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Remarque 3.2. *Cette étude montre que la variation de l'énergie (14) reste négative pour tout choix de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$, pourvu que ces dernières soient positives ; ce qui en d'autres termes nous laisse une infinité de choix des flux absorbants définis précédemment. Cependant, ce choix ne peut pas être aussi arbitraire afin de préserver la prise en compte de manière faible de la condition d'onde sortante. De plus, comme nous allons le voir dans la section qui suit, la stabilité du schéma dépend d'un choix de pas de temps qui lui même dépend, entre autre, du rayon spectral de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$. Ainsi un rayon spectral plus grand de ces matrices accélérerait certes la décroissance de $\mathcal{E}^n$, mais diminuerait aussi le pas de temps maximal assurant la stabilité du schéma.*

3.2.2 Conditions suffisantes de stabilité

Il reste à montrer que $\mathcal{E}^n$ est positive pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$
\begin{aligned}
2\,E^n &= \sum_i \mathcal{A}_i({}^t\tau_i^n\tilde{\Lambda}_i\tau_i^n + \rho_i{}^t\nu_i^{n-\frac{1}{2}}\nu_i^{n+\frac{1}{2}}) \\
&= \sum_i \big(\mathcal{A}_i{}^t\tau_i^n\tilde{\Lambda}_i\tau_i^n + {}^t\nu_i^{n-\frac{1}{2}}(\rho_i\mathcal{A}_i\nu_i^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t \sum_{j\in V(i)} l_{ij}G_{ij}^n)\big) \\
&= \sum_i \big(\mathcal{A}_i{}^t\tau_i^n\tilde{\Lambda}_i\tau_i^n + \rho_i\mathcal{A}_i \parallel \nu_i^{n-\frac{1}{2}} \parallel^2 + \Delta t\,{}^t\nu_i^{n-\frac{1}{2}} \sum_{j\in V(i)} l_{ij}(G_{ij}^n - \frac{1}{2}\,\mathbb{Q}_{ij}\,\tau_i^n)\big)\,.
\end{aligned}
$$

Car $\sum_{j\in V(i)} l_{ij}\,\mathbb{Q}_{ij} = 0$. Ainsi, si on note $p_i = \sum_{j\in V(i)} l_{ij}$, on a :

$$\begin{aligned}
2\,E^n &= \sum_i \sum_{j\in V(i)} l_{ij}\big(\frac{\mathcal{A}_i}{p_i}{}^t\tau_i^n\tilde{\Lambda}_i\tau_i^n + \frac{\rho_i\,\mathcal{A}_i}{p_i}\parallel \nu_i^{n-\frac{1}{2}} \parallel^2 + \Delta t\,{}^t\nu_i^{n-\frac{1}{2}}(G_{ij}^n - \frac{1}{2}\,\mathbb{Q}_{ij}\,\tau_i^n)\big)\\
&= \sum_{internes}^{interfaces} l_{ij}\big(\frac{\mathcal{A}_i}{p_i}{}^t\tau_i^n\tilde{\Lambda}_i\tau_i^n + \frac{\rho_i\,\mathcal{A}_i}{p_i}\parallel \nu_i^{n-\frac{1}{2}} \parallel^2 + \frac{\Delta t}{2}{}^t\nu_i^{n-\frac{1}{2}}\,\mathbb{Q}_{ij}\,\tau_j^n\\
&\qquad + \frac{\mathcal{A}_j}{p_j}{}^t\tau_j^n\tilde{\Lambda}_j\tau_j^n + \frac{\rho_j\,\mathcal{A}_j}{p_j}\parallel \nu_j^{n-\frac{1}{2}} \parallel^2 - \frac{\Delta t}{2}{}^t\nu_j^{n-\frac{1}{2}}\,\mathbb{Q}_{ij}\,\tau_i^n\big)\\
&\quad + \sum_{absorbantes}^{interfaces} l_{ij}\big(\frac{\mathcal{A}_i}{p_i}{}^t\tau_i^n\tilde{\Lambda}_i\tau_i^n + \frac{\rho_i\,\mathcal{A}_i}{p_i}\parallel \nu_i^{n-\frac{1}{2}} \parallel^2 - \frac{\Delta t}{2}{}^t\nu_i^{n-\frac{1}{2}}\,\mathbb{B}\,\nu_i^{n-\frac{1}{2}}\big)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
2\,\mathcal{E}^n = &\sum_{internes}^{interfaces} l_{ij}\big(\frac{\mathcal{A}_i}{p_i}{}^t\tau_i^n\tilde{\Lambda}_i\tau_i^n + \frac{\rho_i\,\mathcal{A}_i}{p_i}\parallel \nu_i^{n-\frac{1}{2}} \parallel^2 + \frac{\Delta t}{2}{}^t\nu_i^{n-\frac{1}{2}}\,\mathbb{Q}_{ij}\,\tau_j^n\\
&\qquad + \frac{\mathcal{A}_j}{p_j}{}^t\tau_j^n\tilde{\Lambda}_j\tau_j^n + \frac{\rho_j\,\mathcal{A}_j}{p_j}\parallel \nu_j^{n-\frac{1}{2}} \parallel^2 - \frac{\Delta t}{2}{}^t\nu_j^{n-\frac{1}{2}}\,\mathbb{Q}_{ij}\,\tau_i^n\big)\\
&+ \sum_{absorbantes}^{interfaces} l_{ij}\big(\frac{\mathcal{A}_i}{p_i}{}^t\tau_i^n\tilde{\Lambda}_i\tau_i^n + \frac{\rho_i\,\mathcal{A}_i}{p_i}\parallel \nu_i^{n-\frac{1}{2}} \parallel^2 - \frac{\Delta t}{4}{}^t\tau_i^n\,\mathbb{A}\,\tau_i^n - \frac{\Delta t}{4}{}^t\nu_i^{n-\frac{1}{2}}\,\mathbb{B}\,\nu_i^{n-\frac{1}{2}}\big)
\end{aligned}$$

Si on note $\| \mathbb{M} \| = sup_{\|x\|=1} \| \mathbb{M}\, x \|$[2] la norme d'une matrice $\mathbb{M}$, on obtient en utilisant l'identité $\alpha\, a^2 + \beta\, b^2 \geq 2\sqrt{\alpha\, \beta}\, a\, b$:

$$
\begin{aligned}
2\,\mathcal{E}^n \geq & \sum_{\text{internes}}^{interfaces} l_{ij} \Big(\frac{\mathcal{A}_i}{p_i(\lambda_i + \mu_i)} \| \tau_i^n \|^2 + \frac{\rho_i\, \mathcal{A}_i}{p_i} \| \nu_i^{n-\frac{1}{2}} \|^2 - \frac{\Delta t}{2} \| \mathbb{Q}_{ij} \| \| \nu_i^{n-\frac{1}{2}} \| \| \tau_j^n \| \\
& + \frac{\mathcal{A}_j}{p_j(\lambda_j + \mu_j)} \| \tau_j^n \|^2 + \frac{\rho_j\, \mathcal{A}_j}{p_j} \| \nu_j^{n-\frac{1}{2}} \|^2 - \frac{\Delta t}{2} \| \mathbb{Q}_{ij} \| \| \nu_j^{n-\frac{1}{2}} \| \| \tau_i^n \| \Big) \\
& + \sum_{absorbantes}^{interfaces} l_{ij} \Big(\big(\frac{\mathcal{A}_i}{p_i\,(\lambda_i + \mu_i)} - \frac{\Delta t}{4} \| \mathbb{A} \| \big) \| \tau_i^n \|^2 + \big(\frac{\rho_i\, \mathcal{A}_i}{p_i} - \frac{\Delta t}{4} \| \mathbb{B} \| \big) \| \nu_i^{n-\frac{1}{2}} \|^2 \Big) \\
\geq & \sum_{\text{internes}}^{interfaces} l_{ij} \Big(\big(2\sqrt{\frac{\mathcal{A}_i\, \mathcal{A}_j}{p_i\, p_j}} \sqrt{\frac{\rho_j}{\lambda_i + \mu_i}} - \frac{\Delta t}{2} \| \mathbb{Q}_{ij} \| \big) \| \nu_j^{n-\frac{1}{2}} \| \| \tau_i^n \| \\
& + \big(2\sqrt{\frac{\mathcal{A}_i\, \mathcal{A}_j}{p_i\, p_j}} \sqrt{\frac{\rho_i}{\lambda_j + \mu_j}} - \frac{\Delta t}{2} \| \mathbb{Q}_{ij} \| \big) \| \nu_i^{n-\frac{1}{2}} \| \| \tau_j^n \| \Big) \\
& + \sum_{absorbantes}^{interfaces} l_{ij} \Big(\big(\frac{\mathcal{A}_i}{p_i\,(\lambda_i + \mu_i)} - \frac{\Delta t}{4} \| \mathbb{A} \| \big) \| \tau_i^n \|^2 + \big(\frac{\rho_i\, \mathcal{A}_i}{p_i} - \frac{\Delta t}{4} \| \mathbb{B} \| \big) \| \nu_i^{n-\frac{1}{2}} \|^2 \Big)
\end{aligned}
$$

$\mathcal{E}^n$ est donc positive si les conditions suffisantes suivantes sont satisfaites :

$$
\left\{
\begin{array}{lll}
(i) & \text{Sur les interfaces internes } \mathcal{T}_{ij}, & \Delta t^2 < \dfrac{16\, \mathcal{A}_i\, \mathcal{A}_j}{p_i\, p_j\, \| \mathbb{Q}_{ij} \|^2} \min\big(\dfrac{\rho_i}{\lambda_j + \mu_j}, \dfrac{\rho_j}{\lambda_i + \mu_i} \big) \\
 & & \\
(ii) & \text{Sur les interfaces absorbantes } \mathcal{T}_i, & \Delta t < \dfrac{4\, \mathcal{A}_i}{p_i} \min\big(\dfrac{1}{(\lambda_i + \mu_i)\, \| \mathbb{A} \|}, \dfrac{\rho_i}{\| \mathbb{B} \|} \big)
\end{array}
\right.
$$

Un calcul simple montre qu'on peut majorer $\| \mathbb{Q}_{ij} \|$ par $\sqrt{3}$. De plus, par la remarque 3.1, on a $\| \mathbb{A} \| = \dfrac{V_p}{\lambda_i + 2\mu_i} max\,(\dfrac{V_p}{V_s}, 2)$ et $\| \mathbb{B} \| = \rho_i\, V_p$. Or

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(\lambda_i + \mu_i)\, \| \mathbb{A} \|} &= \frac{\lambda_i + 2\,\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \frac{1}{V_p\, max(\frac{V_p}{V_s}, 2)} \\
&\geq \frac{1}{V_p\, \max(\frac{V_p}{V_s}, 2)}
\end{aligned}
$$

[2]cette norme est aussi égale à $\| \mathbb{M} \| = inf\,\{k \in \mathbb{R} /\ \| \mathbb{M}\, x \| \leq k\ \| x \|\}$ ou encore au rayon spectral de $\mathbb{M}$ (i.e. la plus grande valeur propre) si la matrice est carrée.

on déduit une condition suffisante de stabilité

$$\begin{cases} (i) \quad \text{Sur les interfaces internes } \mathcal{T}_{ij}, & \Delta t^2 < \dfrac{16}{3}\, \dfrac{\mathcal{A}_i\, \mathcal{A}_j}{p_i\, p_j}\, \min(\dfrac{\rho_i}{\lambda_j + \mu_j}, \dfrac{\rho_j}{\lambda_i + \mu_i}) \\ \\ (ii) \quad \text{Sur les interfaces absorbantes } \mathcal{T}_i, & \Delta t < \dfrac{4}{V_p}\, \dfrac{\mathcal{A}_i}{p_i}\, \min(\dfrac{V_s}{V_p}, \dfrac{1}{2}) \end{cases}$$

Il est clair que sous ces conditions $\mathcal{E}^n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\mathcal{E}^n = 0 \Longrightarrow (\forall\, i,\ \nu_i^{n-\frac{1}{2}} = \tau_i^n = 0)$, ce qui achève la démonstration.

Remarque 3.3. *Dans le cas où le milieu est homogène, une analyse spectrale standard sur un maillage structuré donne la condition de stabilité suivante :*

$$V_p\, \Delta t \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta z^2}} < 1$$

où Δx et Δz sont les pas d'espaces du maillage (Virieux & Madariaga, 1982; Virieux, 1986). Une autre condition moins restrictive sur le pas de temps a été donnée par Bamberger et al. (1980) et Stephen (1983) dans le cas où $\Delta x = \Delta z$ qui est :

$$\sqrt{V_p^2 + V_s^2}\, \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1\,.$$

Ces conditions, bien que moins restrictives que celle que nous avons trouvée, ne sont applicables que dans le cas où le maillage est structuré. Notre étude a l'avantage d'être valable même dans le cas d'un maillage non structuré permettant une meilleure prise en compte des géometries complexes, chose qui est extrêmement importante lorsqu'il s'agit d'étudier des mécanismes d'évolution telle que la rupture (Oglesby et al., 2000; Aochi & Fukuyama, 2002; Ando et al., 2004).

3.3 Conditions aux limites réfléchissantes

Dans cette section, on va supposer que le domaine ne contient que des parois réfléchissantes. La définition du terme “réfléchissant” sera détaillée dans la suite. Pour l'instant, on va dire qu'il s'agit de toute surface ayant un effet miroir ; c'est à dire qui renvoie, totalement ou partiellement, une partie du champ incident.

Afin de trouver les expressions des flux réfléchissants, on va partir d'une idée simple. Sur une surface réfléchissante, le champ (ou une partie du champ) est renvoyé tel qu'il est, et donc ne dépend pas (ou partiellement) du champ voisin. Ceci justifie l'écriture des flux de la manière suivante :

$$F_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\, \mathbb{P}_{ij}\, \nu_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(\mathbb{A}_{ij}\, \nu_i^{n+\frac{1}{2}} + \mathbb{B}_{ij}\, \nu_j^{n+\frac{1}{2}}) \tag{15}$$

$$G_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2}\, \mathbb{Q}_{ij}\, \tau_i^{n+1} + \frac{1}{2}(\mathbb{C}_{ij}\, \tau_i^{n+1} + \mathbb{D}_{ij}\, \tau_j^{n+1}) \tag{16}$$

où $\mathbb{A}_{ij}$, $\mathbb{B}_{ij}$, $\mathbb{C}_{ij}$ et $\mathbb{D}_{ij}$ sont des matrices à déterminer.

Remarque 3.4. *Pour des raisons de symétrie, les matrices* $\mathbb{A}_{ij}$, $\mathbb{B}_{ij}$, $\mathbb{C}_{ij}$ *et* $\mathbb{D}_{ij}$ *vérifient les relations suivantes :* $\mathbb{A}_{ji} = -\mathbb{A}_{ij}$, $\mathbb{B}_{ji} = -\mathbb{B}_{ij}$, $\mathbb{C}_{ji} = -\mathbb{C}_{ij}$ *et* $\mathbb{D}_{ji} = -\mathbb{D}_{ij}$*. Le signe "−" provient du fait que l'on est* $\vec{n}_{ji} = -\vec{n}_{ij}$ *pour toute interface* $\mathcal{T}_{ij} = \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_j$*.*

Reste donc à calculer ces matrices. Pour ce faire, reprenons l'expression de la variation d'énergie et remplaçons l'expression des flux par leurs valeurs respectives. On a :

$$\begin{aligned}
\Delta E &= \Delta t \sum_{externes}^{interfaces} l_{ij}\big({}^t\nu_i^{n+\frac{1}{2}} (G_{ij}^{[n+\frac{1}{2}]} - \mathbb{Q}_{ij}\,\tau_i^{[n+\frac{1}{2}]}) + {}^t\tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} F_{ij}^{n+\frac{1}{2}} \big) \\
&= \frac{\Delta t}{2} \sum_{réfléchissantes}^{interfaces} \Big[l_{ij}\big(-{}^t\nu_i^{n+\frac{1}{2}}\,\mathbb{Q}_{ij}\,\tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} + {}^t\nu_i^{n+\frac{1}{2}}\,\mathbb{C}_{ij}\,\tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} + {}^t\nu_i^{n+\frac{1}{2}}\,\mathbb{D}_{ij}\,\tau_j^{[n+\frac{1}{2}]} \\
&\qquad + {}^t\tau_i^{[n+\frac{1}{2}]}\,\mathbb{P}_{ij}\,\nu_i^{n+\frac{1}{2}} + {}^t\tau_i^{[n+\frac{1}{2}]}\,\mathbb{A}_{ij}\,\nu_i^{n+\frac{1}{2}} + {}^t\tau_i^{[n+\frac{1}{2}]}\,\mathbb{B}_{ij}\,\nu_j^{n+\frac{1}{2}} \big) \\
&\qquad + l_{ji}\big(-{}^t\nu_j^{n+\frac{1}{2}}\,\mathbb{Q}_{ji}\,\tau_j^{[n+\frac{1}{2}]} + {}^t\nu_j^{n+\frac{1}{2}}\,\mathbb{C}_{ji}\,\tau_j^{[n+\frac{1}{2}]} + {}^t\nu_j^{n+\frac{1}{2}}\,\mathbb{D}_{ji}\,\tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} \\
&\qquad + {}^t\tau_j^{[n+\frac{1}{2}]}\,\mathbb{P}_{ji}\,\nu_j^{n+\frac{1}{2}} + {}^t\tau_j^{[n+\frac{1}{2}]}\,\mathbb{A}_{ji}\,\nu_j^{n+\frac{1}{2}} + {}^t\tau_j^{[n+\frac{1}{2}]}\,\mathbb{B}_{ji}\,\nu_i^{n+\frac{1}{2}} \big) \Big] \\
&= \frac{\Delta t}{2} \sum_{réfléchissantes}^{interfaces} l_{ij}\big({}^t\nu_i^{n+\frac{1}{2}}\,({}^t\mathbb{A}_{ij} + \mathbb{C}_{ij})\,\tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} + {}^t\nu_i^{n+\frac{1}{2}}\,(-{}^t\mathbb{B}_{ij} + \mathbb{D}_{ij})\,\tau_j^{[n+\frac{1}{2}]} \\
&\qquad - {}^t\nu_j^{n+\frac{1}{2}}\,({}^t\mathbb{A}_{ij} + \mathbb{C}_{ij})\,\tau_j^{[n+\frac{1}{2}]} - {}^t\nu_j^{n+\frac{1}{2}}\,(-{}^t\mathbb{B}_{ij} + \mathbb{D}_{ij})\,\tau_i^{[n+\frac{1}{2}]} \big).
\end{aligned}$$

Une condition suffisante de stabilité serait donc,

$$ {}^t\mathbb{A}_{ij} + \mathbb{C}_{ij} = 0 \tag{17}$$

$$et$$

$$ -{}^t\mathbb{B}_{ij} + \mathbb{D}_{ij} = 0 \tag{18}$$

Plusieurs choix des matrices $\mathbb{A}_{ij}$, $\mathbb{B}_{ij}$, $\mathbb{C}_{ij}$ et $\mathbb{D}_{ij}$ sont possibles conduisant chacune à une condition réfléchissante particulière. En voici quelques uns.

3.3.1 Conditions totalement réfléchissantes

- Déplacement constant Le champ de vitesse est nul sur la surface réfléchissante, alors que le champ de contrainte est complètement libre. Les flux F_{ij} doivent donc être nuls pour tous ν_i et ν_j. Ce qui implique $\mathbb{A}_{ij} = -\mathbb{P}_{ij}$ et $\mathbb{B}_{ij} = 0$. On en déduit avec les relations (17) et (18) que $\mathbb{C}_{ij} = \mathbb{Q}_{ij}$ et $\mathbb{D}_{ij} = 0$. Les flux s'écrivent donc,

$$\begin{gathered}
F_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = 0 \\
et \\
G_{ij}^{n+1} = \mathbb{Q}_{ij}\,\tau_i^{n+1}
\end{gathered}$$

- Surface complètement libre Le tenseur de contrainte est nul sur la surface réfléchissante et le champ de vitesse est complètement libre. Les flux G_{ij} doivent donc être nuls pour tous ν_i et ν_j. Ce qui implique $\mathbb{C}_{ij} = -\mathbb{Q}_{ij}$ et $\mathbb{D}_{ij} = 0$. On en déduit avec les relations (17) et (18) que $\mathbb{A}_{ij} = \mathbb{P}_{ij}$ et $\mathbb{B}_{ij} = 0$. Les flux s'écrivent donc,

$$F_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbb{P}_{ij}\, \nu_i^{n+\frac{1}{2}}$$
$$et$$
$$G_{ij}^{n+1} = 0$$

3.3.2 Conditions partiellement réfléchissantes

Introduisons d'abord quelques notations utiles. Étant donné une surface réfléchissante et un champ de vecteur $\vec{w}$, on désignera par $\vec{n} = {}^t(n_x, n_z)$ la normale unitaire sortante à cette surface, et par $\vec{t} = {}^t(n_z, -n_x)$ le vecteur unitaire tangent. On notera $\vec{w}_N = {}^t\vec{n}\,\vec{w}\,\vec{n}$ la composante normale de $\vec{w}$, et $\vec{w}_T = {}^t\vec{t}\,\vec{w}\,\vec{t}$ sa composante tangentielle. $\vec{w}$ se décompose alors dans la base $(\vec{t}, \vec{n})$ en $\vec{w} = \vec{w}_T + \vec{w}_N$

- Fracture (mode I) Dans ce mode, appelé aussi mode d'ouverture, seule la composante normale des forces extérieures exercées sur la surface réfléchissante est imposée. Rappelons que ces forces s'écrivent $\underline{\sigma}\,\vec{n}$ où $\underline{\sigma}$ est le tenseur de contraintes (voir remarque 1.1). On cherche donc des flux F_{ij} et G_{ij} tels que

$${}^t\vec{n}\,\underline{\sigma}\,\vec{n} = g \tag{19}$$

où g est une fonction bornée (représentant la norme de la force normale exercée sur la surface réfléchissante, et peut dépendre du temps).

Remarque 3.5.

1. *Il est facile de vérifier l'égalité suivante :*

$$\mathbb{Q}_{ij}\,\vec{\tau}_i = \underline{\sigma}_i\,\vec{n}_{ij}$$

2. *On a vu que le flux G_{ij} s'écrit $G_{ij} = \mathbb{Q}_{ij}\dfrac{\tau_i + \tau_j}{2}$ et donc $G_{ij} = \dfrac{\underline{\sigma}_i + \underline{\sigma}_j}{2}\,\vec{n}_{ij}$. Cette égalité montre donc que le flux G_{ij} à travers une surface $\mathcal{T}_{ij}$ n'est autre que l'ensemble des forces extérieures exercées sur cette surface.*
3. *Dans le cas où $g = 0$, la condition (19) peut être déduite d'une condition plus générale qu'est $\underline{\sigma}\,\vec{n} = 0$ ou encore $G_{ij} = 0$ (voir ci dessus). Ainsi, en abscence de forces externes, la condition de fracture en mode I n'est qu'un cas particulier de la condition "surface complètement libre" déjà rencontrée (voir plus haut).*

Afin de simplifier les notations, on désignera par $\psi_{[ij]}$ la moyenne arithmétique $\dfrac{\psi_i + \psi_j}{2}$ d'une quantité donnée ψ. Ecrivons maintenant l'expression du flux G_{ij} et remplaçons $\underline{\sigma}_{[ij]}\,\vec{n}_{ij}$ par ses composantes. On a donc :

$$\begin{aligned}
G_{ij} &= \underline{\sigma}_{[ij]}\,\vec{n}_{ij} \\
&= (\underline{\sigma}_{[ij]}\,\vec{n}_{ij})_T + (\underline{\sigma}_{[ij]}\,\vec{n}_{ij})_N \\
&= \vec{t}_{ij}({}^t\vec{t}_{ij}\,\underline{\sigma}_{[ij]}\,\vec{n}_{ij}) + \vec{n}_{ij}({}^t\vec{n}_{ij}\,\underline{\sigma}_{[ij]}\,\vec{n}_{ij}) \\
&= \vec{t}_{ij}({}^t\vec{t}_{ij}\,\underline{\sigma}_{[ij]}\,\vec{n}_{ij}) + g\,\vec{n}_{ij} \\
&= \vec{t}_{ij}({}^t\vec{t}_{ij}\,\mathbb{Q}_{ij}\,\tau_{[ij]}) + g\,\vec{n}_{ij} \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{Q}_{ij}\,\tau_i + \frac{1}{2}(\vec{t}_{ij}\,{}^t\vec{t}_{ij} - \mathbb{I}_2)\,\mathbb{Q}_{ij}\,\tau_i + \frac{1}{2}\vec{t}_{ij}\,{}^t\vec{t}_{ij}\,\mathbb{Q}_{ij}\,\tau_j + g\,\vec{n}_{ij}
\end{aligned}$$

En l'abscence de forces extérieures (i.e. $g = 0$), l'énergie du système doit se conserver. D'après l'étude de variation d'énergie précédente et l'équation (16), on peut déduire les matrices $\mathbb{C}_{ij}$ et $\mathbb{D}_{ij}$,

$$\mathbb{C}_{ij} = (\vec{t}_{ij}\,{}^t\vec{t}_{ij} - \mathbb{I}_2)\,\mathbb{Q}_{ij} \quad \text{et} \quad \mathbb{D}_{ij} = \vec{t}_{ij}\,{}^t\vec{t}_{ij}\,\mathbb{Q}_{ij}\,,$$

et par les équations (17) et (18) on trouve

$$\mathbb{A}_{ij} = \mathbb{P}_{ij}\,(\mathbb{I}_2 - \vec{t}_{ij}\,{}^t\vec{t}_{ij}) \quad \text{et} \quad \mathbb{B}_{ij} = \mathbb{P}_{ij}\,\vec{t}_{ij}\,{}^t\vec{t}_{ij}\,.$$

Remarque 3.6. *Il est intéressant de calculer la variation de l'énergie totale du système dans le cas où les forces extérieures ne sont pas nulles (dans le cas où $g = 0$, on a vu que pour le choix précédent des flux à travers la surface réfléchissante, cette énergie se conserve). Reprenons donc l'expression de la variation d'énergie dans le cas où g est non nul. Un calcul rapide montre que*

$$\begin{aligned}
\Delta E &= g\,\Delta t \sum_{réfléchissantes}^{interfaces} l_{ij}\,({}^t\nu_i^{n+\frac{1}{2}} - {}^t\nu_j^{n+\frac{1}{2}})\,\vec{n}_{ij} \\
&= g\,\Delta t \sum_{\substack{i,j/\,\partial\mathcal{T}_i\cap\partial\mathcal{T}_j\subset \\ interfaces \\ réfléchissantes}} l_{ij}\,(\nu_i^{n+\frac{1}{2}} - \nu_j^{n+\frac{1}{2}})\cdot\vec{n}_{ij}
\end{aligned}$$

- Fracture (mode II) Dans ce mode, appelé aussi mode cisaillant, seule la composante tangentielle des forces extérieures exercées sur la surface réfléchissante est imposée. On cherche donc des flux F_{ij} et G_{ij} tels que

$${}^t\vec{t}\,\underline{\sigma}\,\vec{n} = g$$

où g est une fonction bornée (représentant la norme de la force tangentielle exercée sur la surface réfléchissante, et peut dépendre du temps).

De manière analogue à celle du mode I, l'expression de G_{ij} s'écrit

$$\begin{aligned}
G_{ij} &= \underline{\sigma}_{[ij]}\,\vec{n}_{ij} \\
&= (\underline{\sigma}_{[ij]}\,\vec{n}_{ij})_N + (\underline{\sigma}_{[ij]}\,\vec{n}_{ij})_T \\
&= \vec{n}_{ij}({}^t\vec{n}_{ij}\,\underline{\sigma}_{[ij]}\,\vec{n}_{ij}) + \vec{t}_{ij}({}^t\vec{t}_{ij}\,\underline{\sigma}_{[ij]}\,\vec{n}_{ij}) \\
&= \vec{n}_{ij}({}^t\vec{n}_{ij}\,\underline{\sigma}_{[ij]}\,\vec{n}_{ij}) + g\,\vec{t}_{ij} \\
&= \vec{n}_{ij}({}^t\vec{n}_{ij}\,\mathbb{Q}_{ij}\,\tau_{[ij]}) + g\,\vec{t}_{ij} \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{Q}_{ij}\,\tau_i + \frac{1}{2}(\vec{n}_{ij}\,{}^t\vec{n}_{ij} - \mathbb{I}_2)\,\mathbb{Q}_{ij}\,\tau_i + \frac{1}{2}\vec{n}_{ij}\,{}^t\vec{n}_{ij}\,\mathbb{Q}_{ij}\,\tau_j + g\,\vec{t}_{ij}
\end{aligned}$$

On en déduit les matrices $\mathbb{C}_{ij}$ et $\mathbb{D}_{ij}$,

$$\mathbb{C}_{ij} = (\vec{n}_{ij}\,{}^t\vec{n}_{ij} - \mathbb{I}_2)\,\mathbb{Q}_{ij} \quad \text{et} \quad \mathbb{D}_{ij} = \vec{n}_{ij}\,{}^t\vec{n}_{ij}\,\mathbb{Q}_{ij}\,,$$

et via les équations (17) et (18) on trouve

$$\mathbb{A}_{ij} = \mathbb{P}_{ij}\,(\mathbb{I}_2 - \vec{n}_{ij}\,{}^t\vec{n}_{ij}) \quad \text{et} \quad \mathbb{B}_{ij} = \mathbb{P}_{ij}\,\vec{n}_{ij}\,{}^t\vec{n}_{ij}\,.$$

La variation de l'énergie totale discrète est donnée dans ce cas par

$$\begin{aligned}
\Delta E &= g\,\Delta t \sum_{r\acute{e}fl\acute{e}chissantes}^{interfaces} l_{ij}\,({}^t\nu_i^{n+\frac{1}{2}} - {}^t\nu_j^{n+\frac{1}{2}})\,\vec{t}_{ij} \\
&= g\,\Delta t \sum_{\substack{i,j/\,\partial\mathcal{T}_i\cap\partial\mathcal{T}_j\subset \\ interfaces \\ r\acute{e}fl\acute{e}chissantes}} l_{ij}\,(\nu_i^{n+\frac{1}{2}} - \nu_j^{n+\frac{1}{2}})\cdot\vec{t}_{ij}
\end{aligned}$$

Remarque 3.7. *Dans ces modèles de fractures (mode I et II) on a vu que le fait d'imposer une contrainte donnée (normale ou tangentielle) sur une surface prescrit le flux de vitesse à travers cette surface si on veut que le système soit stable. Essayons d'interpreter ce qui se passe pour le champ de vitesse dans chaque cas.*
En mode I, F_{ij} s'écrit

$$\begin{aligned}
F_{ij} &= \frac{1}{2}\,\mathbb{P}_{ij}\,\nu_i + \frac{1}{2}(\mathbb{A}_{ij}\,\nu_i + \mathbb{B}_{ij}\,\nu_j) \\
&= \frac{1}{2}\,\mathbb{P}_{ij}\,\nu_i + \frac{1}{2}(\mathbb{P}_{ij}\,(\mathbb{I}_2 - \vec{t}_{ij}\,{}^t\vec{t}_{ij})\,\nu_i + \mathbb{P}_{ij}\,\vec{t}_{ij}\,{}^t\vec{t}_{ij}\,\nu_j) \\
&= \mathbb{P}_{ij}\big(\nu_i - \frac{1}{2}\,\vec{t}_{ij}\,{}^t\vec{t}_{ij}\,(\nu_i - \nu_j)\big).
\end{aligned}$$

En notant $\nu_{ij} = \nu_i - \frac{1}{2}\,\vec{t}_{ij}\,{}^t\vec{t}_{ij}\,(\nu_i - \nu_j)$, on a :

$$\nu_{ij}\cdot\vec{n}_{ij} = \nu_i\cdot\vec{n}_{ij} \tag{20}$$

et

$$\nu_{ij}\cdot\vec{t}_{ij} = \frac{\nu_i + \nu_j}{2}\cdot\vec{t}_{ij} \tag{21}$$

L'équation (20) montre que la composante normale de la vitesse ne dépend que du champ local, elle est donc discontinue. L'équation (21) montre par contre que la composante tangentielle de la vitesse dépend du champ local et du champ voisin, elle est donc continue (on reconnait au passage le flux centré utilisé).

De manière similaire, on trouve en mode II

$$\nu_{ij} \cdot \vec{n}_{ij} = \frac{\nu_i + \nu_j}{2} \cdot \vec{n}_{ij} \tag{22}$$

et

$$\nu_{ij} \cdot \vec{t}_{ij} = \nu_i \cdot \vec{t}_{ij} \tag{23}$$

ce qui veut dire que la composante normale de la vitesse est continue alors que la composante tangentielle est discontinue.

Annexe

Cet annexe constitue un rappel très bref de la théorie sur les systèmes de Friedrichs symétriques et symétrisables (Dautray & Lions, 1984 et 1985). Rappelons pour commencer le cadre général de cette théorie.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$ à bord Lipschitzien. Soient $(\mathbb{A}_i(x))_{1\leq i\leq m}$ des matrices de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, et soit $\mathcal{L}$ l'opérateur de dérivation défini par

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} \mathbb{A}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Soit $T > 0$ un réel (T peut être infini). On cherche à trouver une fonction $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ solution du problème

$$\mathcal{L}\, u = f \qquad \textit{dans } \Omega \times [0,T] \tag{24}$$

$$u(0) = u_0 \qquad \textit{dans } \Omega \tag{25}$$

$$\mathbb{B}(x)\, u = g \qquad \textit{dans } \partial\Omega \times [0,T] \tag{26}$$

avec $f \in (L^2(\Omega \times [0,T]))^n$, $g \in (L^2(\partial\Omega \times [0,T]))^m$, $u_0 \in (L^2(\Omega))^n$ et $\mathbb{B} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.
Tout d'abord, commençons par rappeler les quelques définitions suivantes :

Définition 3.1.

- *On dit que $\mathcal{L}$ est symétrique (au sens de Friedrichs) si les matrices $(\mathbb{A}_i(x))_{1\leq i\leq m}$ sont symétriques pour tout $x \in \Omega$.*
- *On dit que $\mathcal{L}$ est symétrisable s'il existe une matrice symétrique définie positive $\mathbb{S} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ telle que les matrices $(\mathbb{S}(x)\, \mathbb{A}_i(x))_{1\leq i\leq m}$ sont symétriques pour tout $x \in \Omega$.*

On va distinguer deux cas.
1^{er} cas : $\Omega = \mathbb{R}^m$
L'équation (26) n'est donc pas nécessaire dans ce cas. On a alors la proposition suivante :

Proposition 3.1. *Si $\mathcal{L}$ est symétrique (ou symétrisable) alors le système (24)-(25) admet une solution unique dans $(L^2(\Omega \times [0,T]))^n$.*

Il y a plusieurs façons pour démontrer cette proposition. Une manière de faire consiste à trouver une énergie (i.e. forme quadratique définie positive en les variables du système) qui se conserve. Dans le cas où $\mathcal{L}$ est symétrique (resp. symétrisable) il suffit de considérer la quantité $E = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega {}^t u\, u$ (resp. $E = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega {}^t u\, \mathbb{S}\, u$). E est bien une forme quadratique définie positive, et un calcul rapide montre que $\dfrac{dE}{dt} = 0$, d'où le résultat.

Remarque 3.8. *La proposition précédente reste valable dans le cas où les $\mathbb{A}_i$ dépendent en plus du temps. Cependant, l'existance de la solution ne peut être assurée dans ce cas que pour des temps finis. La démonstartion est très technique et le lecteur désirant plus de détails peut se rapporter au livre de Serre (1996) pour une preuve complète.*

$2^{ème}$ cas : $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^m$

Définition 3.2.

- *On dit que la condition aux limites (26) est strictement dissipative si la restriction de la forme quadratique* $w \to {}^t w\, \mathbb{A}(\vec{n}(x), x)\, w$ *à* $ker\, \mathbb{B}(x)$ *est définie positive, i.e*

$$w \in ker\, \mathbb{B}(x) - \{0\} \quad \Longrightarrow \quad w \to {}^t w\, \mathbb{A}(\vec{n}(x), x)\, w > 0$$

avec $\mathbb{A}(\vec{n}(x), x) = \sum_{i=1}^{m} n_i\, \mathbb{A}_i(x)$.

- *On dit que la condition aux limites (26) est maximale en* x *si* $ker\, \mathbb{B}(x)$ *est maximal (pour l'inclusion) parmis les sous espaces sur lesquels* $\mathbb{A}(\vec{n}(x), x) \geq 0$.

Proposition 3.2. *Sous les conditions des définitions 3.1 et 3.2, et si* $\mathbb{B}$ *est surjective (i.e de rang maximal) alors le système (24)-(25)-(26) admet une solution unique dans* $(L^2(\Omega \times [0, T]))^n$.

Remarque 3.9. *Les conditions de la proposition 3.2 peuvent être affaiblies dans le cas homogène (i.e.* $g = 0$*). D'autre variantes existent aussi dans le cas où les matrices* $\mathbb{A}_i$ *dépendent en plus du temps. Plus de détails sur les démonstrations complètes se trouvent dans Philips & Sarason (1966) et Serre (1996).*

Références

Ando, R., Tada, T., & Yamashita, T., 2004. Dynamic evolution of a fault system through interactions between fault segments, *J. Geophys. Res.*, **109**, doi :10.1029/2003JB002665.

Andrews, D., 1976a. Rupture propagation with finite stress in antiplane strain, *J. Geophys. Res.*, **81**, 3575–3582.

Andrews, D., 1976b. Rupture velocity of plain strain shear cracks, *J. Geophys. Res.*, **81**, 5679–5687.

Andrews, D., 1985. Dynamic plane-strain shear rupture with a slip weakening friction law calculated by a boundary integral method, *Bull. seism. Soc. Am.*, **75**, 1–12.

Aochi, H. & Fukuyama, E., 2002. Three-dimensional nonplanar simulation of the 1992 landers earthquake, *J. Geophys. Res.*, **107**, 4.1–4.12.

Bamberger, A., Chavent, G., & Lailly, P., 1980. Etude de schémas numériques pour les équations de l'élasto-dynamique linéaire, *Rapport de recherche INRIA*, **41**.

Bécache, E. & Duong, T. H., 1994. A space-time variational formulation for the boundary integral equation in a 2D elastic crack problem, *J. Geophys. Res.*, **28**, 141–176.

Ben Jemaa, M., 2004. Etude et résolution de la rupture sismique par une méthode volumes finis dans un milieu bidimensionnel hétérogène, *Rapport de recherche INRIA*, **5332**.

Berenger, J. P., 1996. Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, *J. Comput. Phys.*, **127**, 363–379.

Capdeville, Y., Chaljub, E., Vilotte, J.-P., & Montagner, J.-P., 2003. Coupling the spectral element method with a modal solution for elastic wave propagation in realistic 3D global Earth models, *Geophys. J. Int.*, **152**, 34–68.

Chaljub, E., Capdeville, Y., & Vilotte, J.-P., 2003. Solving elastodynamics in a fluid-solid heterogeneous sphere : a parallel spectral element approximation on non-conforming grids, *J. Comput. Phys.*, **187**, 457–491.

Cohen, G. & Fauqueux, S., 2001. 2D elastic modelling with efficient mixed finite elements, in Extended Abstracts, Eur. Ass. Expl. Geophys.

Collino, F. & Tsogka, C., 2001. Application of the perfectly matched absorbing layer model to the linear elastodynamic problem in anisotropic heterogeneous media, *Geophysics*, **66**, 294–307.

Cruz-Atienza, V. & Virieux, J., 2004. Dynamic rupture simulation of non-planar faults with a finite-difference approach, *Geophys. J. Int.*, **158**, 939–954.

Das, S. & Aki, K., 1977. A numerical study of two-dimensional spontaneous rupture propagation, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **50**, 643–668.

Dautray, R. & Lions, J. L., 1984 et 1985. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, numero 9.

Day, S., 1977. Finite element analysis of seismic scattering problems, *PhD Dissertation*, **54**, 99–104.

Dormy, E. & Tarantola, A., 1995. Numerical simulation of elastic wave propagation using a finite volume method, *J. Geophys. Res.*, **100**, 2123–2133.

Glinsky-Olivier, N., Ben Jemaa, M., Piperno, S., & Virieux, J., 2006. A finite volume method for the 2D elastic wave propagation in a heterogeneous medium, *in preparation*.

Komatitsch, D. & Vilotte, J.-P., 1998. The spectral element method : an efficient tool to simulate the seismic response of 2-D and 3-D geological stuctures, *Bull. seism. Soc. Am.*, **88**, 368–392.

Kostrov, B., 1964. Selfsimilar problems of propagation of shear cracks, *PMM*, **28**, 889–898.

Madariaga, R., 1976. Dynamics of an expanding circular fault, *Bull. seism. Soc. Am.*, **66**, 639–666.

Oglesby, D., Archuleta, R. J., & Nielsen, S. B., 2000. Dynamics of dip-slip faulting : Explorations in two dimensions, *J. Geophys. Res.*, **105**, 13,643–13,653.

Philips, R. S. & Sarason, L., 1966. Singular symmetric positive first order differential operators, *Journal of mathematics and mechanics*, **15(2)**.

Piperno, S., Remaki, M., & Fezoui, L., 2002. A non-diffusive finite volume scheme for the 3d maxwell equations on unstructured meshes, *SIAM J. Numer. Anal.*, **39**, 2089–2108.

Remaki, M., 1999. A new finite volume scheme for solving maxwell system, *INRIA reaserch report*, **3725**.

Serre, D., 1996. *Systèmes de lois de conservation I et II*, Diderot, Paris.

Stephen, R. A., 1983. A comparaison of finite difference and reflectivity seismograms for marine models, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc*, **72**, 39–58.

Tada, T. & Madariaga, R., 2001. Dynamic modelling of the flat 2-D crack by a semi-analytical BIEM scheme, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **50**, 227–251.

Tada, T. & Yamashita, T., 1977. Non-hypersingular boundary integral equations for two-dimensional non-planar crack analysis, *Geophys. J. Int.*, **130**, 269–282.

Virieux, J., 1986. P-SV wave propagation in heterogeneous media, velocity-stress method, *Geophysics*, **51**, 889–901.

Virieux, J. & Madariaga, R., 1982. Dynamic faulting studied by a finite difference method, *Bull. seism. Soc. Am.*, **72**, 345–369.

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Futurs : Parc Club Orsay Université - ZAC des Vignes
4, rue Jacques Monod - 91893 ORSAY Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier (France)
Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

Éditeur
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)
http://www.inria.fr
ISSN 0249-6399