METHODES NUMERIQUES

ET SCHEMAS BOITE

POUR LES EQUATIONS DE DARCY

Approximation numérique de la loi de Darcy

Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{u} = f & \text{dans } \Omega, \\ k^{-1}\underline{u} + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

condition limite :

$$p = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

$\underline{u}$: vitesse
p : pression
$k > 0$: perméabilité (milieu homogène isotrope)

$f \in L^2(\Omega)$: puits ou sources dans l'écoulement

formulation primale en pression

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } p \in H^1_0(\Omega) \text{ tel que}\\ \displaystyle\int_\Omega k\,\underline{\nabla} p\cdot\underline{\nabla} q = \int_\Omega f\,q, \quad \forall q\in H^1_0(\Omega).\end{array}\right.$$

- *Le problème primal est bien posé.*

Reconstitution de $\underline{u}$ dans $L^2(\Omega)^d$:

$$\underline{u} = -k\underline{\nabla} p.$$

formulation mixte :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } (\underline{u}, p) \in L^2(\Omega)^d \times H_0^1(\Omega) \text{ tels que} \\ \displaystyle\int_\Omega (k^{-1}\underline{u} + \underline{\nabla} p) \cdot \underline{v} = 0, \quad \forall \underline{v} \in L^2(\Omega)^d, \\ \displaystyle\int_\Omega \underline{\nabla} q \cdot \underline{u} = -\int_\Omega f\, q, \quad \forall q \in H_0^1(\Omega),\end{array}\right.$$

- *Le pb mixte est bien posé et sa solution vérifie les équations de Darcy p.p,*
- $(\underline{u}, p)$ *solution du pb mixte* $\Leftrightarrow$ p *solution du pb primal et* $\underline{u} = -k\underline{\nabla} p$ *p.p. dans* Ω*.*

Approximation conforme de la pression

Notations :

$\mathcal{T}_h$ une triangulation du domaine Ω.

Ne, Na, Na_f et Ns resp nb d'éléments, nb d'arêtes, nb d'arêtes frontière, et nb de sommets dans $\mathcal{T}_h$.

$\mathcal{A}_h$, $\mathcal{S}_h$ ens des arêtes et sommets de $\mathcal{T}_h$ à l'intérieur de Ω.

$K \in \mathcal{T}_h$, $|K|$ sa mesure, $\mathcal{A}_K$ et $\mathcal{S}_K$ ens de ses arêtes, et sommets.

1_K : fonction caractéristique de K.

ω_s : vaut 1 en s et 0 en les autres sommets,

Ω_s : support de ω_s.

$s \in \mathcal{S}_h$, $\mathcal{A}_s$ ens des arêtes contenant s.

$a \in \mathcal{A}_h$, $|a|$ sa longueur et $[\underline{u}_h \cdot n]_a$ le saut de la composante normale de $\underline{u}_h$ à travers a.

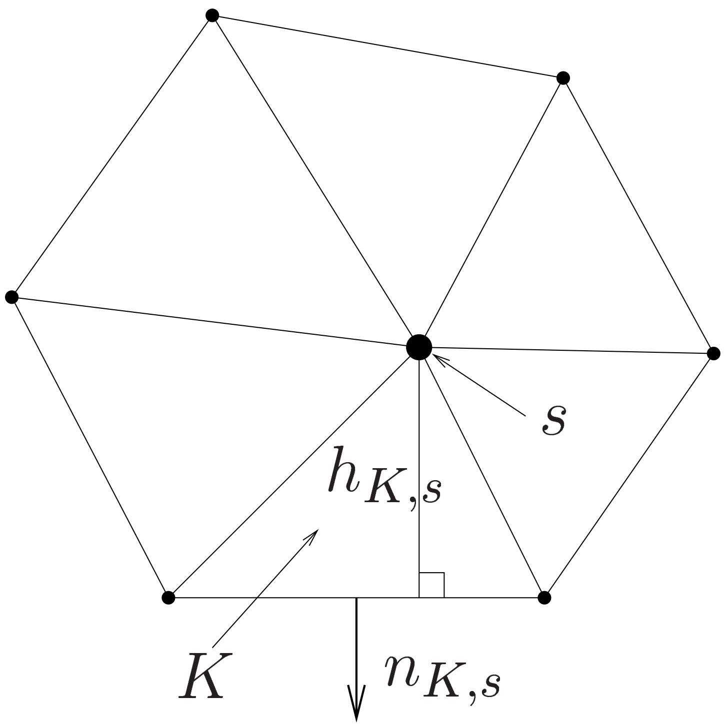


Figure 1: Un élément $K \in \mathcal{T}_h$, un sommet $s \in \mathcal{S}_K$ et le domaine Ω_s.

- $\mathbb{P}_k$: espace des polynômes de degré $\leq k$.

- $(P^0)^d = \{ p_h \in (L^2(\Omega))^d / \forall K \in \mathcal{T}_h,\, p_{h|K} \in (\mathbb{P}_0)^d \}.$

- $P^1_{c,0} = \{ p_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap H^1_0(\Omega) / \forall K \in \mathcal{T}_h,\, p_{h|K} \in \mathbb{P}_1 \}.$

Formulation primale discrète (taille : Ns) :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } p_h \in P^1_{c,0} \text{ tel que}\\ \displaystyle\int_\Omega k\,\nabla p_h \cdot \nabla q_h = \int_\Omega f\,q_h, \quad \forall q_h \in P^1_{c,0}.\end{array}\right.$$

Formulation mixte discrète (taille : $2Ne + Ns \simeq 5Ns$) :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } (\underline{u}_h, p_h) \in (P^0)^d \times P^1_{c,0} \text{ tels que}\\ \displaystyle\int_\Omega k^{-1}\underline{u}_h \cdot \underline{v}_h + \int_\Omega \nabla p_h \cdot \underline{v}_h = 0, \quad \forall \underline{v}_h \in (P^0)^d,\\ \displaystyle\int_\Omega \nabla q_h \cdot \underline{u}_h = -\int_\Omega f\,q_h, \quad \forall q_h \in P^1_{c,0}.\end{array}\right.$$

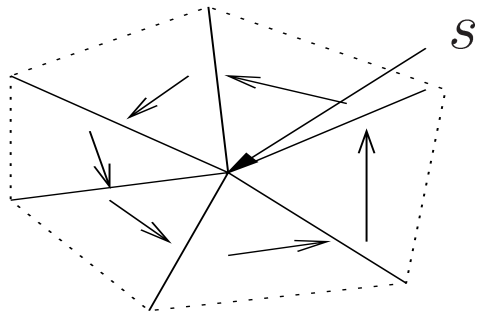
- *Le problème primale approché et le problème mixte approché sont bien posés,*

- $p_h \in P^1_{c,0}$ *solution du pb primal discret* $\Leftrightarrow (-k\nabla p_h, p_h)$ *solution du pb mixte discret,*

- *Si la solution du pb mixte est suffisamment régulière*

$$\|\underline{u} - \underline{u}_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \|p - p_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c\,h\,\big(\|\underline{u}\|_{H^1(\Omega)^d} + \|p\|_{H^2(\Omega)}\big).$$

où c est une constante.



- *Equation de conservation de la masse discrète :*

$$\forall s \in \mathcal{S}_h, \quad \sum_{a \in \mathcal{A}_s} \frac{1}{2} \left[\underline{u}_h \cdot \underline{n} \right]_a |a| = \int_{\Omega_s} f \, \omega_s,$$

- *Formule de reconstitution locale de la vitesse :*

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \underline{u}_K = k \sum_{s \in \mathcal{S}_K} p_s \frac{1}{h_{K,s}} \underline{n}_{K,s}.$$

Approximation non conforme de la pression

$$P^1_{nc,0} = \{\, p_h \in L^2(\Omega);\ \forall K \in \mathcal{T}_h,\ p_{h|K} \in \mathbb{P}_1;\ \forall a \in \mathcal{A}_h,\ \int_a [p_h]_a = 0 \,\},$$

$[p_h]_a$ est le saut de p_h à travers l'arête a.

$$P^1_{nc,0} \not\subset H^1_0(\Omega).$$

$\forall\, a \in \mathcal{A}_h\,,\, w_a$ vaut 1 au milieu de a et 0 au milieu des autres arêtes de $\mathcal{T}_h$.

formulation primale discrète (taille : Na) :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } p_h \in P^1_{nc,0} \text{ tel que} \\ \displaystyle\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K k\,\nabla p_h \cdot \nabla q_h = \int_\Omega f\, q_h, \quad \forall q_h \in P^1_{nc,0}. \end{array}\right.$$

formulation mixte discrète (taille : $2Ne + Na - Na_f \simeq 7Ns$) :

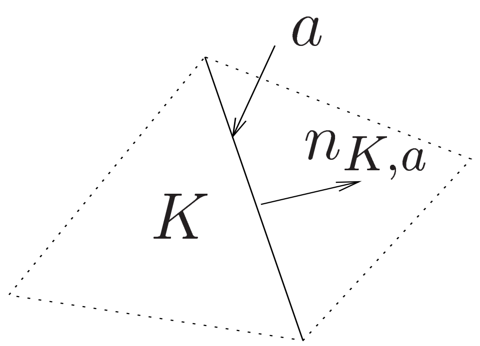
$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{u}_h, p_h) \in (P^0)^d \times P^1_{nc,0} \text{ tels que} \\ \displaystyle\int_\Omega k^{-1}\underline{u}_h \cdot \underline{v}_h + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K \nabla p_h \cdot \underline{v}_h = 0, \quad \forall \underline{v}_h \in (P^0)^d, \\ \displaystyle\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K \nabla q_h \cdot \underline{u}_h = -\int_\Omega f\, q_h, \quad \forall q_h \in P^1_{nc,0}. \end{array}\right.$$

- *Le pb primal discret non conforme et le pb mixte discret non conforme sont bien posés,*

- $p_h \in P^1_{nc,0}$ *sol du pb primal discret non conforme* $\Leftrightarrow$ $(\underline{u}_h, p_h)$ *sol du pb mixte discret non conforme où* $\underline{u}_h|_K = -k\nabla p_h|_K$*,*

- *Si la sol du pb mixte est suffisamment régulière*

$$\|\underline{u}-\underline{u}_h\|_{L^2(\Omega)^d}+\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|p-p_h\|^2_{H^1(K)}\right)^{1/2} \leq c\,h\,(\|\underline{u}\|_{H^1(\Omega)^d}+\|p\|_{H^2(\Omega)}).$$



- *Equation de conservation de la masse discrète :*

$$\forall a \in \mathcal{A}_h, \quad [\underline{u}_h \cdot \underline{n}]_a \, |a| = \int_{\Omega_a} f \, \omega_a,$$

- *Formule de reconstitution locale de la vitesse :*

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \underline{u}_K = k \sum_{a \in \mathcal{A}_K} p_a \frac{|a|}{|K|} \, \underline{n}_{K,a}.$$

Formulation mixte vitesse-pression

$$H_{\mathrm{div}} = \{\, \underline{u} \in L^2(\Omega)^d,\, \nabla \cdot \underline{u} \in L^2(\Omega) \,\},$$

équipé de la norme

$$\|\underline{u}\|_{H_{\mathrm{div}}} = \|\underline{u}\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\nabla \cdot \underline{u}\|_{L^2(\Omega)}.$$

formulation mixte vitesse-pression, forme standard

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{u}, p) \in H_{\mathrm{div}} \times L^2(\Omega) \text{ tels que} \\ \displaystyle\int_\Omega k^{-1} \underline{u} \cdot \underline{v} - \int_\Omega p\, \nabla \cdot \underline{v} = 0, \quad \forall \underline{v} \in H_{\mathrm{div}}, \\ \displaystyle\int_\Omega q\, \nabla \cdot \underline{u} = \int_\Omega f\, q, \quad \forall q \in L^2(\Omega). \end{array}\right.$$

- *Le pb mixte vitesse-pression (v-p) est bien posé, et sa solution vérifie les équations de Darcy p.p.,*

- $(\underline{u}, p)$ *solution du pb mixte (v-p)* $\Leftrightarrow$ $(\underline{u}, p)$ *solution du pb mixte.*

L'élément fini de Raviart-Thomas

$$\mathbb{RT}_0(K) = (P^0(K))^2 + (P^0)(K) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

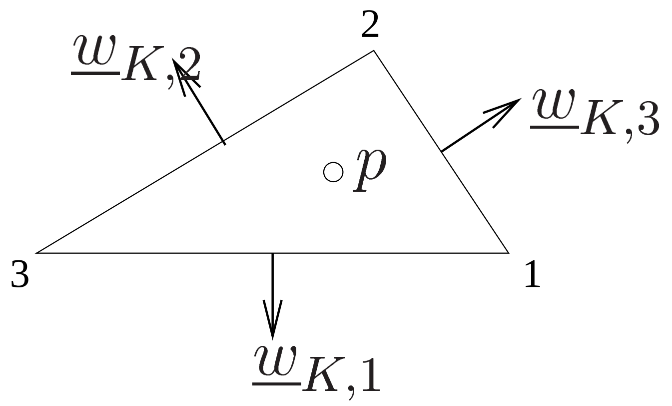


Figure 2: Degrés de liberté pour l'approximation de Raviart-Thomas : flux normaux aux arêtes pour la vitesse et valeur moyenne sur l'élément pour la pression.

$$RT^0_{nc} = \{ \underline{u}_h \in L^2(\Omega)^d ;\, \forall K \in \mathcal{T}_h,\, \underline{u}_h|_K \in \mathbb{RT}_0(K) \},$$

$$RT^0_c = \{\underline{u}_h \in L^2(\Omega)^d; \forall K \in \mathcal{T}_h, \underline{u}_h|_K \in \mathbb{RT}_0(K); \forall a \in \mathcal{A}_h, \int_a [\underline{u} \cdot \underline{n}]_a = 0\},$$

dim(RT^0_{nc})= $3Ne$, dim(RT^0_c)=Na.

formulation mixte (v-p) discrète (taille : $Na + Ne$) :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\underline{u}_h, p_h) \in RT^0_c \times P^0 \text{ tels que} \\ \displaystyle\int_\Omega k^{-1} \underline{u}_h \cdot \underline{v}_h - \int_\Omega p_h \nabla \cdot \underline{v}_h = 0, \quad \forall \underline{v}_h \in RT^0_c, \\ \displaystyle\int_\Omega q_h \nabla \cdot \underline{u}_h = \int_\Omega f\, q_h, \quad \forall q_h \in P^0. \end{cases}$$

- *Le pb mixte (v-p) discret est bien posé,*
- *Si la solution du pb mixte (v-p) est suffisamment régulière*

$$\|\underline{u}-\underline{u}_h\|_{H_{\mathrm{div}}}+\|p-p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq c\,h\,(\|\underline{u}\|_{H^1(\Omega)^d}+\|\nabla\cdot\underline{u}\|_{H^1(\Omega)}+\|p\|_{H^1(\Omega)}),$$

- *Equation discrète de conservation de la masse :*

$$\nabla \cdot \underline{u}_h = \Pi_h f,$$

où $\Pi_h f$ *est la projection* L^2*-orthogonale de* $f \in L^2(\Omega)$ *sur* P^0.

Une technique d'hybridation

But : réduire la taille du pb mixte (v-p) discret.

$$A^0 = \{\, \lambda_h ;\ \forall a \in \mathcal{A}_h,\ \forall x \in a,\ \lambda_h(x) = \lambda_a \,\}.$$

problème hybride :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{u}_h, p_h, \lambda_h) \in RT^0_{nc} \times P^0 \times A^0 \text{ tels que} \\ \displaystyle\int_\Omega k^{-1} \underline{u}_h \cdot \underline{v}_h - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K p_h \, \nabla \cdot \underline{v}_h - \sum_{a \in \mathcal{A}_h} \int_a \lambda_h [\underline{v}_h \cdot \underline{n}]_a = 0,\ \forall \underline{v}_h \in RT^0_{nc}, \\ \displaystyle\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K q_h \, \nabla \cdot \underline{u}_h = \int_\Omega f \, q_h, \quad \forall q_h \in P^0, \\ \displaystyle\sum_{a \in \mathcal{A}_h} \int_a \mu_h [\underline{u}_h \cdot \underline{n}]_a = 0, \quad \forall \mu_h \in A^0. \end{array} \right.$$

- *Le pb hybride est bien posé,*

- $(\underline{u}_h, p_h, \lambda_h)$ *sol du pb hybride* $\Rightarrow$ $\underline{u}_h \in RT_c^0$ *et* $(\underline{u}_h, p_h)$ *sol du pb mixte (v-p) discret.*

- formules locales :
$W_K \in \mathbb{R}^3$, composantes de la vitesse dans $\mathbb{RT}^0(K)$, Λ_K multiplicateurs de Lagrange sur les arêtes de K

$$W_K = A_K \Lambda_K, \quad P_K = (V_K, \Lambda_K), A_K, V_K \text{ connus}$$

- sur chaque arête on écrit la continuité de la vitesse normale
$\Rightarrow$ résolution d'un système linéaire de taille Na dont les inconnues sont les multiplicateurs de Lagrange aux arêtes,
- évaluation locale du champ de vitesse et de pression par des formules de reconstitution

Schémas boîte

formulation mixte (v-p) non standard :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } (\underline{u}, p) \in H_{\mathrm{div}} \times H_0^1(\Omega) \text{ tels que} \\ \displaystyle\int_\Omega k^{-1}\underline{u} \cdot \underline{v} + \int_\Omega \nabla p \cdot \underline{v} = 0, \quad \forall \underline{v} \in L^2(\Omega)^d, \\ \displaystyle\int_\Omega q\, \nabla \cdot \underline{u} = \int_\Omega f\, q, \quad \forall q \in L^2(\Omega).\end{array}\right.$$

- *Le pb mixte (v-p) non-standard est bien posé, et sa solution vérifie les eq de Darcy p.p.,*

- $(\underline{u}, p)$ *sol du pb mixte (v-p) non standard* $\Leftrightarrow$ $(\underline{u}, p)$ *est solution du pb mixte.*

formulation mixte (v-p) discrète non standard :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\underline{u}_h, p_h) \in RT_c^0 \times P^1_{nc,0} \text{ tels que} \\ \displaystyle\int_\Omega k^{-1} \underline{u}_h \cdot \underline{v}_h + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla p_h \cdot \underline{v}_h = 0, \quad \forall \underline{v}_h \in (P^0)^d, \\ \displaystyle\int_\Omega q_h \, \nabla \cdot \underline{u}_h = \int_\Omega f \, q_h, \quad \forall q_h \in P^0. \end{cases}$$

Taille du système :

$$\underbrace{\dim RT_c^0 + \dim P^1_{nc,0}}_{=2Na - Na_f} = \underbrace{\dim (P^0)^2 + \dim P^0}_{=3Ne}$$

- *Le pb mixte (v-p) non standard discret est bien posé,*
- *Si la solution du pb mixte (v-p) non standard est suffisamment régulière*

$$\|\underline{u}-\underline{u}_h\|_{H_{\mathrm{div}}}+\sqrt{\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\|p-p_h\|^2_{H^1(K)}}\leq c\,h\,\Big(\|\underline{u}\|_{H^1(\Omega)^d}+\|\nabla\cdot\underline{u}\|_{H^1(\Omega)}+\|p\|_{H^2(\Omega)}\Big).$$

Relations locales :

- $\forall\, K \in \mathcal{T}_h, \qquad k^{-1}\underline{u}_{h|K} = -k\underline{\nabla} p_{h|K} + \dfrac{1}{2}(\Pi_K f)\underline{g_K x},$
- $\forall\, K \in \mathcal{T}_h, \qquad \nabla \cdot \underline{u}_h|_K = \Pi_K f,$

avec g_K barycentre de K et $\Pi_K = \Pi_h f_{|K}$.

Lien avec les problèmes discrets précédents

$(\underline{u}_h, p_h)$ solution du schéma boîte.

- $\tilde{\underline{u}}_h = -k\nabla p_h$, $(\tilde{\underline{u}}_h, p_h) \in (P^0)^2 \times P^1_{nc,0}$ *est solution du pb mixte discret non conforme où la donnée* f *a été remplacée par* $\Pi_h f$*,*

  $\Rightarrow$ “simplification” de l’implémentation.
- $\underline{u}_h \in RT^0_c$ *coïncide avec la vitesse du pb mixte (v-p) discret,*
- *Soit* $\tilde{p}_h$ *la pression du pb mixte (v-p) discret, alors on a*

$$\tilde{p}_h = \Pi_h p_h + \frac{1}{4} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \rho_K (\Pi_K f) 1_K,$$

avec $\rho^2_K = \frac{1}{|K|} |\underline{g_K x}|^2_{0;K}$.

Résumé

formulation	conforme ou non	mixte standard ou non
Darcy	exacte	app ou exacte
cons. masse	app	exacte
$(\underline{u}, p)$	$L^2(\Omega)^d \times H_0^1(\Omega)$	$H_{\text{div}} \times (L^2(\Omega)$ou $H_0^1(\Omega))$
$(\underline{u}_h, p_h)$	$(P^0)^d \times (P^1_{c,0}$ ou $P^1_{nc,0})$	$RT^0_c \times (P^0$ ou $P^1_{nc,0})$
taille	Ns ou Na	$Na + Ne$ ou $3Ne$

Table 1: Approximations numériques de la loi de Darcy. Les deuxième et troisième ligne du tableau indiquent respectivement si la loi de Darcy et l'équation de conservation de la masse sont satisfaites de façon exacte ou approchée localement sur chaque maille.