Optimisation : quantification du risque et contrainte en probabilité

Laetitia Andrieu

Guy Cohen

février 2002

Présentation du problème

Problème à résoudre :

$$\begin{aligned} &\min_x \mathbb{E} f(x,\omega) \\ \text{s.c.} \quad & P(g(x,\omega) \leq 0) \geq \alpha\,. \end{aligned}$$

2 approches :

1) chercher d'autres formulations du risque (CVaR)
2) réécrire la contrainte sous forme d'une contrainte en espérance et surmonter les problèmes de discontinuité (approximation du saut par une fonction différentiable, calcul de Malliavin...)

(seule la première approche est ici présentée)

Plan de l'exposé

1. Définitions et notations

2. Mesures de risque et de sécurité

3. Relations entre ces mesures

4. Exemple

5. Conclusion

Définitions et notations

Fonction	Propriétés
$F_X(\eta) = P\{X \leq \eta\}$ $\forall \eta \in \mathbb{R}$	continue à droite
$F_X^2(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} F_X(\xi)d\xi$ $\forall \eta \in \mathbb{R}$	continue, convexe, positive et croissante ; $F_X^2(\eta) = F_X(\eta)[\eta - \mathbb{E}\{X \| X \leq \eta\}] = \mathbb{E}\{(\eta - X)^+\}$
$F_X^{-1}(p) = \inf\{\eta \| F_X(\eta) \geq p\}$ $\forall p \in]0,1]$	inverse de F_X ; croissante et continue à gauche
$F_X^{-2}(p) = \int_0^p F_X^{-1}(\alpha)d\alpha$ $\forall p \in]0,1]$	convexe par construction
$F_\alpha(x,\nu) =$ $\nu + \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}\{(g(x,\omega) - \nu)^+\}$	finie et convexe en $\nu \in \mathbb{R}$; conjointement convexe en (x,ν) si $g(x,\omega)$ convexe en x
$G_\alpha(x,\nu) =$ $\nu + \frac{1}{\alpha}\mathbb{E}\{(g(x,\omega) - \nu)^-\}$	finie et concave en $\nu \in \mathbb{R}$

Dominance stochastique à l'ordre 1

$$\begin{aligned} X \succeq_{DS1} Y \;&\Leftrightarrow\; F_X(\eta) \;\le\; F_Y(\eta) \qquad \forall \eta \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow\; F_X^{-1}(p) \;\ge\; F_Y^{-1}(p) \qquad \forall p \in]0,1[\,. \end{aligned}$$

Dominance stochastique à l'ordre 2

$$\begin{aligned} X \succeq_{DS2} Y \;&\Leftrightarrow\; F_X^2(\eta) \;\le\; F_Y^2(\eta) \qquad \forall \eta \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow\; F_X^{-2}(p) \;\ge\; F_Y^{-2}(p) \qquad \forall p \in [0,1]\,. \end{aligned}$$

Weighted mean deviation from a quantile

Notons

$$h_X(p) = \mu_X p - F_X^{-2}(p)\,.$$

Lemme 1 $\forall p \in]0,1[$,

$$h_X(p) = \min_{\xi \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\{\max(p(X-\xi),(1-p)(\xi - X))\}\,,$$

et ce minimum est atteint pour tout p-quantile.

On a donc

$$h_X(p) = \mathbb{E}\{\max(p(X-q_X(p)),(1-p)(q_X(p) - X))\}\,.$$

Cette mesure est croissante et continue. $\forall p \in [0,1]$, $X \to h_X(p)$ est convexe et positivement homogène sur $\mathcal{L}^1$.

Tail VaR

On a

$$X \succeq_{DS2} Y \Leftrightarrow F_X^{-2}(p) \ \geq \ F_Y^{-2}(p) \qquad \forall p \in [0,1]\,.$$

Cette relation peut se réécrire

$$X \succeq_{DS2} Y \Leftrightarrow \frac{F_X^{-2}(p)}{p} \ \geq \ \frac{F_Y^{-2}(p)}{p} \qquad \forall p \in]0,1]\,,$$

justifiant ainsi la mesure de sécurité

$$TVaR_X(p) = \frac{F_X^{-2}(p)}{p}\,.$$

On montre que :

$$TVaR_X(p) = q_X(p) - \frac{1}{p}\mathbb{E}\{(q_X(p) - X)^+\}\,.$$

Tail Gini's mean difference

$$G_X(p) = \frac{2}{p^2} \int_0^p h_X(\alpha) d\alpha \, .$$

C'est une mesure de risque. $\forall p \in]0, 1]$, $X \to G_X(p)$ est convexe et positivement homogène sur $\mathcal{L}^1$.

Value-at-risk $q_\alpha(x)$

La α-VaR de la perte associée à la décision x, notée $q_\alpha(x)$, est la plus petite quantité q telle que, avec une probabilité au moins égale à α, la perte n'excède pas q. Ainsi,

$$q_\alpha(x) = \min\{q \,|\, \mathbb{P}(g(x,\omega) \leq q) \geq \alpha\}\,.$$

$q_\alpha(x)$ est donc le quantile de la distribution de perte.

Conditional value-at-risk $\phi_\alpha(x)$

Dans le cas de distributions continues,

$$\phi_\alpha(x) = \mathbb{E}\{g(x,\omega) | g(x,\omega) \geq q_\alpha(x)\} \,.$$

On a

$$\phi_\alpha(x) = \min_\nu F_\alpha(x,\nu) \,,$$

et en particulier,

$$q_\alpha(x) \in \arg\min_\nu F_\alpha(x,\nu) \qquad \text{et} \qquad \phi_\alpha(x) = F_\alpha(x, q_\alpha(x)) \,.$$

Si $g(x,\omega)$ est convexe en x alors $\phi_\alpha(x)$ est convexe en x.

Résultat 1 : On a

$$\min_{x\in X} \phi_\alpha(x) = \min_{(x,\nu)\in X\times\mathbb{R}} F_\alpha(x,\nu) \,.$$

Résultat 2 : Le problème

$$\begin{aligned} &\min_{x\in X} g(x) \\ &\text{s.c.} \quad \phi_{\alpha_i}(x) \leq \omega_i \quad i = 1, \cdots, l \end{aligned}$$

est équivalent au problème

$$\begin{aligned} &\min_{(x,\nu_1,\cdots,\nu_l)\in X\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}} g(x) \\ &\text{s.c.} \quad F_{\alpha_i}(x,\nu_i) \leq \omega_i \quad i = 1, \cdots, l \,. \end{aligned}$$

$$\phi_\alpha^-(x)$$

Dans le cas de distributions continues,

$$\phi_\alpha^-(x) = \mathbb{E}\{g(x,\omega) | g(x,\omega) \leq q_\alpha(x)\} \,.$$

On a

$$\phi_\alpha^-(x) = \max_\nu G_\alpha(x,\nu) \,,$$

et en particulier,

$$q_\alpha(x) \in \arg\max_\nu G_\alpha(x,\nu) \qquad \text{et} \qquad \phi_\alpha^-(x) = G_\alpha(x, q_\alpha(x)) \,.$$

ϕ_α^- est convexe en α.

Relations entre $TVaR_X$ et ϕ^-
(cas de distributions continues)

Théorème 1 $\forall X$ *tel que* $\mathbb{E}|X| < \infty$, *on a*

(i) $F_X^{-2} = [F_X^2]^*$

(ii) $F_X^2 = [F_X^{-2}]^*$.

Théorème 2 (Caractérisation d'un quantile) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) η *est un* p*-quantile de* X *;*

(ii) $\sup_\xi(\xi\, p - F_X^2(\xi))$ *est atteint en* η *;*

(iii) $\sup_\alpha(\eta\, \alpha - F_X^{-2}(\alpha))$ *est atteint en* p *;*

(iv) $F_X^{-2}(p) + F_X^2(\eta) = p\, \eta\, .$

Ainsi,

$$\begin{aligned} F_X^{-2}(p) = [F_X^2]^*(p) &= \sup_\eta (\eta\, p - F_X^2(\eta)) \\ &= p\, q_X(p) - p\, q_X(p) + p\, \mathbb{E}\{X | X \leq q_X(p)\} \\ &= p\, \phi^-(p)\,. \end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\phi^-(p) = \frac{F_X^{-2}(p)}{p} = TVaR_X(p)\,.$$

Relation entre h_X, ϕ^- et μ_X

$$\begin{aligned} h_X(p) &= \mu_X\, p - F_X^{-2}(p) \\ &= p\left(\mu_X - \frac{F_X^{-2}(p)}{p}\right) \\ &= p\,(\mu_X - TVaR_X(p)) \\ &= p\,(\mu_X - \phi^-(p))\,. \end{aligned}$$

Relation entre G_X, ϕ^- et μ_X

$$\begin{aligned} G_X(p) &= \frac{2}{p^2}\int_0^p h_X(\alpha)d\alpha \\ &= \frac{2}{p^2}\int_0^p [\alpha\,(\mu_X - \phi^-(\alpha))]d\alpha \\ &= \mu_X - \frac{2}{p^2}\int_0^p \alpha\,\phi^-(\alpha)d\alpha\,. \end{aligned}$$

Relation entre la CVaR et la tail-VaR

Considérons à nouveau $g(x,\omega)$ une v.a., x étant la variable de décision, et α un niveau de probabilité. On a

$$(1-\alpha)\,\phi_\alpha(x) + \alpha\,\phi_\alpha^-(x) = \mathbb{E}\{g(x,\omega)\}\,.$$

La CVaR apparaît comme le complément de la tail-VaR, donc de ϕ^-.

Exemple

On doit minimiser un temps de parcours en voiture, $f(x,\omega)$, où x désigne la variable de pilotage et ω un incident, à savoir les freins qui lâchent. On note v la vitesse au-delà de laquelle tout incident devient mortel. Si on désigne par $g(x,\omega)$ la vitesse, ceci nous amène à introduire une contrainte en probabilité puisqu'il s'agit d'ajuster la vitesse de parcours pour assurer une probabilité minimale de rester en vie. Ce problème s'écrit donc

$$\begin{aligned} &\min_x \mathbb{E} f(x,\omega) \\ \text{s.c.} \quad & P(g(x,\omega) \leq v) \geq \alpha \,. \end{aligned}$$

Enfin, notons $v_\alpha(x)$ la vitesse au-dessus de laquelle on est avec une probabilité $1-\alpha$. Ainsi,

$$P(g(x,\omega) \leq v) \geq \alpha \Leftrightarrow P(g(x,\omega) \leq v_\alpha(x)) \geq \alpha \,,$$

ou encore

$$P(g(x,\omega) \leq v) \geq \alpha \Leftrightarrow v_\alpha(x) \leq v \,.$$

Application de la CVaR

La notion de CVaR conduit à réécrire le problème de la façon suivante

$$\min_{x,\nu} \mathbb{E} f(x,\omega)$$
$$\text{s.c.} \quad F_\alpha(x,\nu) \le \gamma \,,$$

avec

$$F_\alpha(x,\nu) = \nu + \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}\{[g(x,\omega)-\nu]^+\} \,.$$

On sait que

$$\min_{\nu} F_\alpha(x,\nu) = \phi_\alpha(x) = \mathbb{E}\{g(x,\omega) | g(x,\omega) \ge v_\alpha(x)\} \,.$$

Soit (x^*,ν^*) la solution de ce problème. On a

$$\phi_\alpha(x^*) \le \gamma \quad \text{et} \quad \arg\min_{\nu} F_\alpha(x,\nu) = v_\alpha(x) \,.$$

Ainsi ν^* permet d'obtenir $v_\alpha(x^*)$, que l'on compare alors à v pour vérifier que la contrainte $v_\alpha(x^*) \le v$ est bien satisfaite.

Algorithme de gradient stochastique

Soit $f_\alpha(x,\nu,\omega) = \nu + \frac{1}{1-\alpha}[g(x,\omega)-\nu]^+$.

L'algorithme général s'écrit :

– initialisation : on se donne $x^0 \in X^{\mathrm{ad}}$, $\nu^0 \in N^{\mathrm{ad}}$ et $p^0 \in \mathbb{R}^+$, ainsi que deux σ-suites $(\epsilon^k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\rho^k)_{k\in\mathbb{N}}$;

– à l'étape k : x^k, ν^k et p^k étant donnés, on tire (ou on observe) ω^{k+1} suivant la loi de P, on calcule $r^k \in \partial_x f(x^k,\omega^{k+1})$, $s^k \in \partial_x f_\alpha(x^k,\nu^k,\omega^{k+1})$ et $t^k \in \partial_\nu f_\alpha(x^k,\nu^k,\omega^{k+1})$, puis on remet à jour x^{k+1}, ν^{k+1} et p^{k+1} par

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= \Pi_{X^{\mathrm{ad}}}[x^k - \epsilon^k(r^k + s^k\,p^k)]\\
\nu^{k+1} &= \Pi_{N^{\mathrm{ad}}}[\nu^k - \epsilon^k\,t^k\,p^k]\\
p^{k+1} &= \max(0, p^k + \rho^k\left(f_\alpha(x^{k+1},\nu^{k+1},\omega^{k+1}) - \gamma\right)).
\end{aligned}
$$

Questions

Interprétation et choix de γ : Il semble que $\gamma > v$. En effet,

$$\phi_\alpha(x) = \mathbb{E}[g(x,\omega) | g(x,\omega) \geq v_\alpha(x)] \geq v_\alpha(x)\,,$$

avec une inégalité stricte en général. Ainsi, on a

$$\gamma \geq F_\alpha(x,\nu) \geq \min_\nu F_\alpha(x,\nu) = \phi_\alpha(x) > v_\alpha(x) = v\,.$$

La contrainte $\nu \leq v$: pas de relation évidente entre $\min_{\nu \leq v} F_\alpha(x,\nu)$ et $\phi_{\alpha'}(x)$.

Relation à l'optimum entre le problème initial et le problème avec contrainte CVaR

Notons $\mathcal{X}^{\mathrm{ad}}(\alpha, v)$ l'ensemble admissible du problème initial et $C^{\mathrm{ad}}(\alpha, \gamma)$ celui du problème avec contrainte CVaR. On voudrait avoir :

$$\mathcal{X}^{\mathrm{ad}}(\alpha, v) \subset Proj(C^{\mathrm{ad}}(\alpha, \gamma)) \qquad \text{et} \qquad v_\alpha(x^*) \leq v\,.$$

Si pour un γ donné cette inclusion n'est pas vérifiée, il faut augmenter la valeur de γ. En fait, on a

$$\max_{x \in \mathcal{X}^{\mathrm{ad}}(\alpha, v)} \min_{\nu} F_\alpha(x, \nu) = \max_{x \in \mathcal{X}^{\mathrm{ad}}(\alpha, v)} \phi_\alpha(x) = \hat{\gamma}(\alpha, v)\,,$$

qui correspond à la pire des situations en x. Or

$$\mathcal{X}^{\mathrm{ad}}(\alpha, v) \subset Proj(C^{\mathrm{ad}}(\alpha, \gamma)) \Leftrightarrow \hat{\gamma}(\alpha, v) \leq \gamma\,.$$

Donc

$$\max_{x \in \mathcal{X}^{\mathrm{ad}}(\alpha, v)} \phi_\alpha(x) = \hat{\gamma}(\alpha, v) \geq \phi_\alpha(x^*)\,.$$

Ainsi, dès que $\gamma \geq \hat{\gamma}(\alpha, v)$, l'inclusion est vérifiée.

Application numérique

Posons

$$g(x,\omega) = 0.9x + \omega(1-x)\,,$$

où ω suit une loi uniforme sur $[0,1]$ et $x \in \mathcal{X}^{\mathrm{ad}} = [0,1]$.

On a, pour $x \neq 1$,

$$\psi(x,\zeta) = \mathbb{P}(g(x,\omega) \leq \zeta) = \mathbb{P}\Big(\omega \leq \frac{\zeta - 0.9x}{1-x}\Big) = \frac{\zeta - 0.9x}{1-x}\,,$$

et

$$v_\alpha(x) = \alpha + x(0.9-\alpha)\,.$$

Pour $\alpha \in [0;0.9]$, v_α est croissante en x ; pour $\alpha > 0.9$, v_α est décroissante en x.

On a

$$\begin{aligned}\phi_\alpha(x) &= \mathbb{E}\{g(x,\omega) | g(x,\omega) \geq v_\alpha(x)\} \\ &= \Big(0.4 - \frac{\alpha}{2}\Big)x + \frac{1+\alpha}{2}\,.\end{aligned}$$

Pour $\alpha \in [0;0.8]$, ϕ_α est croissante en x ; pour $\alpha > 0.8$, ϕ_α est décroissante en x.

Soit x^* une solution du problème avec contrainte CVaR. Pour $\alpha \in]0.8; 0.9[$, on a

$$\phi_\alpha(x^*) \leq \gamma = \phi_\alpha(\bar{x}) = \max_{v_\alpha(x) \leq v} \phi_\alpha(x) \qquad \text{et} \qquad v_\alpha(x^*) > v \geq v_\alpha(\bar{x}),$$

i.e., une solution du problème avec contrainte CVaR n'est pas une solution du problème initial.

Conclusion

Soient

$$\begin{aligned} &\min_x J(x) \\ \text{s.c.} \quad &\phi(x) \leq a \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\min_x J(x) \\ \text{s.c.} \quad &\psi(x) \leq b\,. \end{aligned}$$

Notons $\mathcal{X}_{\phi(\mathrm{a})}$ et $\mathcal{X}_{\psi(\mathrm{b})}$ leur ensemble admissible. Pour avoir l'équivalence entre ces 2 problèmes, il faut :

. $\mathcal{X}_{\phi(\mathrm{a})} \subset \mathcal{X}_{\psi(\mathrm{b})}$ (vrai dès que $b \geq \sup_{x \in \mathcal{X}_{\phi(\mathrm{a})}} \psi(x) = \psi(\bar{x}) = \bar{b}$) ;

. $\psi(x) \leq \psi(x') \Rightarrow \phi(x) \leq \phi(x')$ (*i.e.* toute solution du problème auxiliaire est admissible pour le problème initial).

L'idée est donc de construire une mesure de risque qui satisfait cette dernière condition.