Equations efficaces décrivant l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible dans un tuyau long et élastique

exposé au CERMICS, Ecole Normale des Ponts et Chaussées, Paris, le 4/12/2002

par

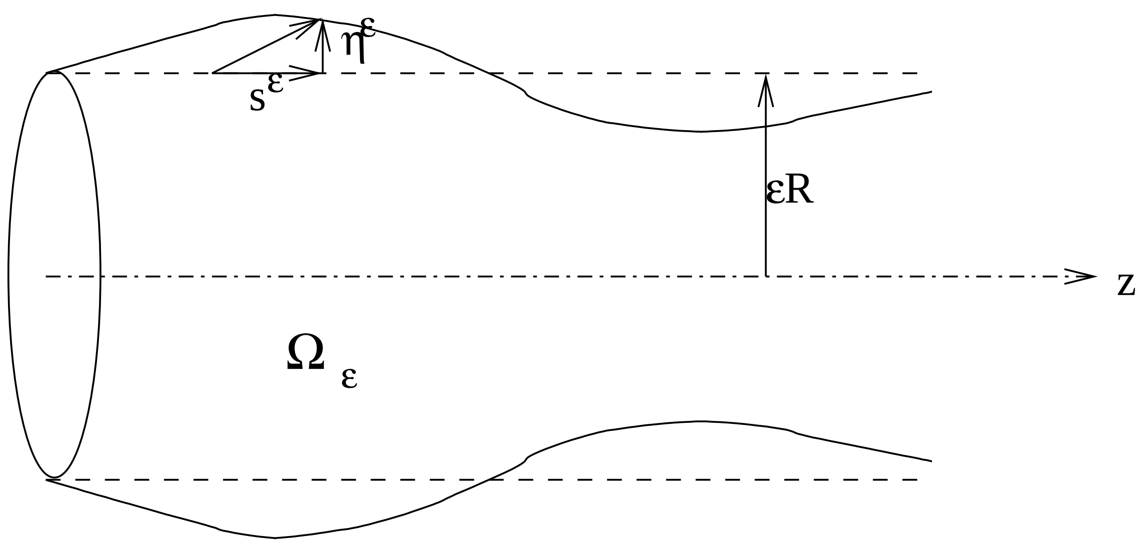
Andro **Mikelić**

UFR Mathématiques

Université Claude Bernard Lyon 1

1. POSITION DU PROBLÈME

- Nous considérons l'écoulement d'un fluide incompressible visqueux à travers un tuyau long et de faible épaisseur, ayant la paroi latérale obéissant aux équations de Navier pour une membrane courbe élastique linéaire.



- L'écoulement est régi par une petite chute de pression entre l'entrée et la sortie du tuyau

$$\Omega_\varepsilon = \Big\{ x \in \mathbb{R}^3 ; x = (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, z), \\ r < \varepsilon R,\ 0 < z < L \Big\}. \qquad (1)$$

et on a un écoulement lent décrit par les équations de Stokes.

Nous supposons que la paroi latérale du cylindre $\Sigma_\varepsilon = \{r = \varepsilon R\} \times (0, L)$ est élastique et que sa déformation est décrite par les équations de Navier

$$-F_r = \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{1-\sigma^2}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon R}\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial z} + \frac{\eta^\varepsilon}{\varepsilon^2 R^2}\right) - h(\varepsilon)G(\varepsilon)k(\varepsilon)\frac{\partial^2 \eta^\varepsilon}{\partial z^2} + \rho_w h(\varepsilon)\frac{\partial^2 \eta^\varepsilon}{\partial t^2}, \tag{2}$$

$$-F_z = -\frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{1-\sigma^2}\left(\frac{\partial^2 s^\varepsilon}{\partial z^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon R}\frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial z}\right) + \rho_w h(\varepsilon)\frac{\partial^2 s^\varepsilon}{\partial t^2}. \tag{3}$$

Dans (2)-(3), η^ε est le déplacement radial et s^ε le déplacement longitudinale dans les coordonnées de Lagrange (voir Figure), $h = h(\varepsilon)$ est l'épaisseur de la membrane, ρ_w sa densité , $E = E(\varepsilon)$ le module de Young, $0 < \sigma < 1$ le coefficient de Poisson, $G = G(\varepsilon)$ le module de cisaillement et $k = k(\varepsilon)$ le facteur de correction de Timoshenko (voir [0]).

F_r et F_z sont les composantes radiale et longitudinale de la force exercée par le fluide sur la paroi et données par

$$F_r\vec{e}_r + F_z\vec{e}_z = \Big(- p^\varepsilon I + 2\mu D(v^\varepsilon)\Big)\vec{e}_r \qquad (4)$$

où $D(v^\varepsilon)$ est le tenseur des vitesses de déformation. La vitesse du fluide v^ε est liée avec la vitesse de la paroi par

$$v_r^\varepsilon = \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial t} \quad \text{et} \quad v_z^\varepsilon = \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial t} \quad \text{sur} \ \ \Sigma_\varepsilon \times I\!R_+. \qquad (5)$$

Comme nous utilisons la formulation Eulerienne pour la vitesse et la pression et la formulation Lagrangienne pour les quantités $(\eta^\varepsilon, s^\varepsilon)$, notons que le point (x, t) de la paroi latérale devient $(x + (\eta^\varepsilon, s^\varepsilon)(t), t)$ pour les variables Euleriennes.

La paroi étant une membrane courbe élastique linéaire et en supposant un écoulement lent, la linéarisation de la condition $v^\varepsilon(x + (\eta^\varepsilon, s^\varepsilon), t) = (\frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial t})(x, t)$ nous permet d'approcher la vraie interface par Σ_ε.

Alors, on suppose que (4) -(5) ont lieu sur Σ_ε.

Ensuite, la formulation Eulerienne pour un écoulement visqueux lent et incompressible, est décrite par les équations de Stokes dans des coordonnées cylindriques

$$-\mu\left(\frac{\partial^2 v_r^\varepsilon}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 v_r^\varepsilon}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial r}-\frac{v_r^\varepsilon}{r^2}\right)+ \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial r}=0 \quad \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon\times I\!R_+, \tag{6}$$

$$-\mu\left(\frac{\partial^2 v_z^\varepsilon}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 v_z^\varepsilon}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial r}\right)+ \frac{\partial p^\varepsilon}{\partial z}=0 \quad \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon\times I\!R_+, \tag{7}$$

$$\frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial r}+\frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial z}+\frac{v_r^\varepsilon}{r}=0 \quad \text{dans} \quad \Omega_\varepsilon\times I\!R_+. \tag{8}$$

On s'intéresse à l'analyse asymptotique des équations (2)-(8) et on obtiendra les équations asymptotiques qui décrivent l'écoulement à l'échelle du temps dominante $\tilde{t}=\omega^\varepsilon t$, avec $\omega^\varepsilon=\dfrac{\varepsilon^2}{\mu}$, et aussi les oscillations de la membrane induites par le réponse du matériau élastique.

- Notre but est de dériver des modèles efficaces à partir des équations (2)-(8), lorsque $\varepsilon \to 0$. Le modèle efficace sera 1D. Des applications incluent l'écoulement sanguin dans des arterioles. Nous retrouvons la bien connue Loi de Laplace et donnons un nouveau modèle amélioré lorsque le module de cisaillement de la paroi n'est pas négligeable.

- Travail en collaboration avec S. Canic (Department of Mathematics, University of Houston, Etats-Unis)

- " *Equations efficaces décrivant l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible dans un tuyau long et élastique* " , C. R. Mécanique, 330 (2002), pp. 661-666.

  "*Effective oscillations of a long elastic tube filled with a viscous incompressible fluid arising in a study of blood flow through small arteries* ", prépublication, University of Houston, juillet 2002.

Pour compléter le problème :

- Les conditions aux limites :

$$v_r^\varepsilon = 0 \text{ et } p^\varepsilon = 0 \text{ sur } \{z = 0\} \times I\!R_+, \quad (9)$$

$$v_r^\varepsilon = 0 \text{ et } p^\varepsilon = A(t) \text{ sur } \{z = L\} \times I\!R_+, \quad (10)$$

$$\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial z} = \eta^\varepsilon = 0 \text{ pour } z = 0,$$

$$s^\varepsilon = \eta^\varepsilon = 0 \text{ pour } z = L \text{ et } \forall t \in I\!R_+. \quad (11)$$

- Le cylindre a été initialement rempli par le fluide au repos. La pression initiale est P_0.

$$\eta^\varepsilon = s^\varepsilon = \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial t} = 0 \text{ on } \Sigma_\varepsilon \times \{0\}. \quad (12)$$

- Notons que l'écoulement est du à la différence des pressions $A(t) \in \mathcal{D}(I\!R_+)$.

FORMULATION VARIATIONNELLE

Definition 1. *L'espace* $V^\varepsilon \subset H^1(\Omega_\varepsilon)^3$ *est l'ensemble des fonctions axisymétriques* $\varphi_r\vec{e}_r + \varphi_z\vec{e}_z\ \varphi$ *telles que* $\varphi_r, \varphi_z \in H^1(0, L)$ *, sur* Σ_ε, $\varphi_r(0, r) = \varphi_z(L, \varepsilon R) = \varphi_r(L, r) = 0$ *si* $r \leqslant \varepsilon R$, et *div* $\varphi = 0$ *dans* Ω_ε.

Definition 2. *L'espace* $\mathcal{V}^\varepsilon$ *est l'ensemble des fonctions axisymétriques* $(w_r, w_z, d_r, d_z) \in H^1(0, T; V^\varepsilon) \times (H^1((0, L) \times (0, T))^2 \cap H^2(0, T; L^2(0, L))^2)$ *telles que*

1. $\dfrac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial r} + \dfrac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial z} + \dfrac{v_r^\varepsilon}{r} = 0$ *in* $\Omega_\varepsilon \times I\!R_+$,

2. $r^{-1} v_r^\varepsilon \in L^2((0, T) \times \Omega_\varepsilon)$,

3. $d_r(t, 0) = d_z(t, L) = d_r(t, L) = 0$ *sur* $I\!R_+$,

4. $w_r = 0$ *sur* $(\partial\Omega_\varepsilon \cap \{z = 0\}) \times I\!R_+$ *et*

5. $w_r = \frac{\partial d_r}{\partial t}$ *et* $w_z = \frac{\partial d_z}{\partial t}$ *sur* $\Sigma_\varepsilon \times I\!R_+$.

Definition 3. *La fonction vectorielle* $(v_r^\varepsilon, v_z^\varepsilon, \eta^\varepsilon, s^\varepsilon) \in \mathcal{V}^\varepsilon$ *est une solution faible du problème (2)-(8), (9)-(12), si l'équation variationnelle suivante est satisfaite*

$$2\mu \int_{\Omega_\varepsilon} D(v^\varepsilon) : D(\varphi)\, r dr dz +$$
$$\varepsilon R \int_0^L \Big\{ h(\varepsilon) G(\varepsilon) k(\varepsilon) \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial z} \frac{\partial \varphi_r}{\partial z} +$$
$$\frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{1-\sigma^2}\Big(\frac{\sigma}{\varepsilon R}\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial z} + \frac{\eta^\varepsilon}{\varepsilon^2 R^2}\Big)\varphi_r + \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{1-\sigma^2}\Big(\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial \varphi_z}{\partial z} -$$
$$\frac{\sigma}{\varepsilon R}\frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial z}\varphi_z\Big)\Big\}\, dz + \varepsilon R \rho_w h \frac{d^2}{dt^2}\int_0^L \Big(\eta^\varepsilon \varphi_r + s^\varepsilon \varphi_z\Big)\, dz =$$
$$- \int_0^{\varepsilon R} A(t) \varphi_z\, r dr \quad \textit{dans} \quad \mathcal{D}'(I\!R_+),$$
$$\forall \varphi = \varphi_r \vec{e}_r + \varphi_z \vec{e}_z \in V^\varepsilon \qquad (13)$$

et

$$\eta^\varepsilon = s^\varepsilon = \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial t} = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma_\varepsilon \times \{0\}. \qquad (14)$$

- L'existence d'une solution faible pour le problème (13)-(14) est la conséquence de l'égalité d'énergie et de l'inégalité de Korn.

- Pour obtenir les équations asymptotiques dans la limite $\varepsilon \to 0$, on a besoin de l'égalité d'énergie.

EGALITÉ D'ÉNERGIE

- L'énergie élastique $\mathcal{E}_{el}$

$$\frac{d\mathcal{E}_{el}}{dt} \equiv \varepsilon R \int_0^L \Big\{ h(\varepsilon)G(\varepsilon)k(\varepsilon)\frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial^2 \eta^\varepsilon}{\partial z \partial t} +$$
$$\frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{1-\sigma^2}\Big(\Big(\frac{\sigma}{\varepsilon R}\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial z} + \frac{\eta^\varepsilon}{\varepsilon^2 R^2}\Big)\frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial t}$$
$$+\Big(\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial^2 s^\varepsilon}{\partial z \partial t} - \frac{\sigma}{\varepsilon R}\frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial t}\Big)\Big) +$$
$$\varepsilon R \rho_w h(\varepsilon)\Big(\frac{\partial^2 \eta^\varepsilon}{\partial t^2}\frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial^2 s^\varepsilon}{\partial t^2}\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial t}\Big)\Big\}\, dz$$

- On peut écrire l'énergie élastique sous la forme

$$\frac{d\mathcal{E}_{el}}{dt} \equiv \varepsilon R \frac{d}{2dt}\Big\{\rho_w h(\varepsilon)\int_0^L \Big(|\frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial t}|^2 + |\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial t}|^2\Big)\,dz + h(\varepsilon)G(\varepsilon)k(\varepsilon)\int_0^L |\frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial z}|^2\,dz + \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{1-\sigma^2}\Big(\sigma\int_0^L \big(\frac{\eta^\varepsilon}{\varepsilon R} - \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial z}\big)^2 + (1-\sigma)\int_0^L \Big(|\frac{\eta^\varepsilon}{\varepsilon R}|^2 + |\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial z}|^2\Big)\Big)\Big\}$$

- Comme on veut étudier l'écoulement à l'échelle du temps dominante et aussi les oscillations de la membrane induites par le réponse du matériau élastique, nous posons $\tilde{t} = \omega^\varepsilon t$, avec $\omega^\varepsilon = \dfrac{\varepsilon^2}{\mu}$. On suppose que A est en effet une fonction de $\tilde{t}$. Alors on trouve l'égalité d'énergie suivante :

$$
\begin{aligned}
&\omega^{\varepsilon} h(\varepsilon)\varepsilon R\frac{d}{2dt}\Bigg\{\int_{\Omega_\varepsilon(t)}(\omega^{\varepsilon})^2\rho_w\int_0^L\Big(|\frac{\partial\eta^{\varepsilon}}{\partial t}|^2+\\
&|\frac{\partial s^{\varepsilon}}{\partial t}|^2\Big)\,dz+G(\varepsilon)k(\varepsilon)\int_0^L|\frac{\partial\eta^{\varepsilon}}{\partial z}|^2\,dz+\\
&\frac{E(\varepsilon)}{1-\sigma^2}\Bigg(\sigma\int_0^L\Big(\frac{\eta^{\varepsilon}}{\varepsilon R}-\frac{\partial s^{\varepsilon}}{\partial z}\Big)^2+\\
&+(1-\sigma)\int_0^L\Big(|\frac{\eta^{\varepsilon}}{\varepsilon R}|^2+|\frac{\partial s^{\varepsilon}}{\partial z}|^2\Big)\Bigg)\Bigg\}+\\
&2\mu\int_{\Omega_\varepsilon(t)}|D(v^{\varepsilon}(t))|^2\,rdrdz=\\
&-\int_0^{\varepsilon R}A(t)v_z^{\varepsilon}(t,r,L)\,rdr \qquad (15)
\end{aligned}
$$

avec $v_r^{\varepsilon}=\omega^{\varepsilon}\dfrac{\partial\eta^{\varepsilon}}{\partial t}$ et $v_z^{\varepsilon}=\omega^{\varepsilon}\dfrac{\partial s^{\varepsilon}}{\partial t}$ sur $\Sigma_\varepsilon\times(0,T)$.

ESTIMATIONS A PRIORI

- L'égalité (15) nous permet d'obtenir les estimations a priori suivantes pour la solution. Soient

$$
E_0=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{\varepsilon},\ \text{ et }\ G_0=\lim_{\varepsilon\to 0}G(\varepsilon)h(\varepsilon)k(\varepsilon)\varepsilon \qquad (16)
$$

Alors on a

$$\omega^{\varepsilon}\frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{4\varepsilon R(1+\sigma)}\Big\{\int_0^L |\eta^{\varepsilon}(t)|^2\,dz+\varepsilon^2R^2\|\frac{\partial s^{\varepsilon}}{\partial z}(t)\|^2_{L^2}\Big\}+$$
$$\mu\int_0^t\int_{\Omega_\varepsilon}|D(v^{\varepsilon})|^2\,rdrdz+$$
$$\omega^{\varepsilon}G(\varepsilon)k(\varepsilon)\varepsilon R\int_0^L|\frac{\partial\eta^{\varepsilon}(t)}{\partial z}|^2\,dz\leqslant$$
$$C(R,L)\int_0^t\Bigg\{\frac{\varepsilon^4}{\mu}|A(\tau)|^2+\Big(|\partial_\tau A(\tau)|^2+$$
$$|A(\tau)|^2\Big)\omega^{\varepsilon}\frac{\varepsilon^3}{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}\frac{(1+\sigma)LR^3}{2}\Bigg\}\,d\tau. \tag{17}$$

- Enfin on obtient

$$\frac{G_0}{\varepsilon^2}\|\frac{\partial\eta^{\varepsilon}}{\partial z}(t)\|^2_{L^2(0,L)}+\frac{1}{\varepsilon^2}\|\eta^{\varepsilon}(t)\|^2_{L^2(0,L)}+$$
$$\|\frac{\partial s^{\varepsilon}}{\partial z}(t)\|^2_{L^2(0,L)}\leqslant C\frac{1}{E_0}\|A\|^2_{\mathcal{V}}, \tag{18}$$

$$\|\frac{\partial v_z^\varepsilon}{\partial r}\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))} + \|\frac{\partial v_r^\varepsilon}{\partial z}\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))} \leqslant C\Big(\frac{\varepsilon^2}{\mu}\Big)^2\|A\|^2_{\mathcal{V}}, \qquad (19)$$

$$\|v_r^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))} \leqslant C\frac{\varepsilon^3}{\mu}\|A\|_{\mathcal{V}}, \qquad (20)$$

$$\|v_z^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon\times(0,T))} \leqslant C\frac{\varepsilon^3}{\mu}\|A\|_{\mathcal{V}}. \qquad (21)$$

- Les dérivées par rapport au temps satisfont les mêmes estimations mais avec A remplacé par $\partial_t A$.

LES INCONNUS DILATÉS

Pour effectuer la réduction dimensionnelle dans la direction " mince " nous utilisons l'approche de Ciarlet et al. (cf [0]), [0]), ou on remplace les inconnues par leurs " dilatées " $v(\varepsilon)(z,r,t) = v^\varepsilon(z,\varepsilon r,t)$ et $p(\varepsilon)(z,r,t) = p^\varepsilon(z,\varepsilon r,t)$. Ω_ε devient le domaine " non-mince " $\Omega = \Omega_1$.

Pour les inconnues " dilatées " définies sur le domaine Ω " non-mince " nous avons la formulation variationnelle suivante

$$\mathcal{E}_\mu(v,\varphi,\psi;\varepsilon) \equiv \int_0^T \int_\Omega \frac{\mu}{\varepsilon^2}\frac{\partial v(\varepsilon)_z}{\partial r}\frac{\partial \varphi_z}{\partial r}\psi(t)\ rdrdzdt$$
$$+2\varepsilon \int_0^T \int_\Omega \frac{\mu}{\varepsilon^2}\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial v(\varepsilon)_r}{\partial z}\frac{\partial \varphi_z}{\partial r} + \frac{\partial v(\varepsilon)_r}{\partial r}\frac{\partial \varphi_r}{\partial r}+$$
$$\frac{v(\varepsilon)_r\varphi_r}{r^2}\Big)\psi(t)\ rdrdzdt + 2\varepsilon^2 \int_0^T \int_\Omega \frac{\mu}{\varepsilon^2}\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial v(\varepsilon)_z}{\partial r}\frac{\partial \varphi_r}{\partial z}+$$
$$\frac{\partial v(\varepsilon)_z}{\partial z}\frac{\partial \varphi_z}{\partial z}\Big)\psi(t)\ rdrdzdt+$$
$$\varepsilon^3 \int_0^T \int_\Omega \frac{\mu}{\varepsilon^2}\frac{\partial v(\varepsilon)_r}{\partial z}\frac{\partial \varphi_r}{\partial z}\psi(t)\ rdrdzdt, \qquad (22)$$

$$\mathcal{E}_{\mathrm{el}}(\eta^\varepsilon, s^\varepsilon,\varphi,\psi;\varepsilon) \equiv R\int_0^T \int_0^L \Big\{ h(\varepsilon)G(\varepsilon)k(\varepsilon)\frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial \varphi_r}{\partial z}+$$
$$\frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{1-\sigma^2}\Big(\frac{\sigma}{\varepsilon R}\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial z} + \frac{\eta^\varepsilon}{\varepsilon^2 R^2}\Big)\varphi_r+$$
$$\frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{\varepsilon(1-\sigma^2)}\Big(\frac{\partial s^\varepsilon}{\partial z}\frac{\partial \varphi_z}{\partial z} - \frac{\sigma}{\varepsilon R}\frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial z}\varphi_z\Big)\Big\}\psi(t)\ dzdt$$
$$+\frac{R\rho_w h(\varepsilon)(\omega^\varepsilon)^2}{\varepsilon}\int_0^T \frac{d^2\psi(t)}{dt^2}\int_0^L \Big(\varepsilon\eta^\varepsilon\varphi_r + s^\varepsilon\varphi_z\Big)\ dzdt \qquad (23)$$

et

$$\mathcal{E}_{\mathsf{src}}(A,\varphi,\psi) \equiv \int_0^T \int_0^R A(t)\varphi_z\psi(t)\; rdrdt. \quad (24)$$

- Les espaces fonctionnels: $V = V^1$, $\mathcal{V} = \mathcal{V}^1$ mais avec l'incompressibilité remplacé par

  $$\mathrm{div}_\varepsilon v(\varepsilon) = \frac{\partial v(\varepsilon)_r}{\varepsilon \partial r} + \frac{\partial v(\varepsilon)_z}{\partial z} + \frac{v(\varepsilon)_r}{\varepsilon r} = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

  et $\frac{\partial}{\partial t}$ remplacé par $\frac{\mu}{\varepsilon^2}\frac{\partial}{\partial t}$.

- **Definition** 4. (LA FORMULATION VARIATIONNELLE " DILATÉE " $P(\varepsilon)$ EN VITESSE - DÉPLACEMENTS) *Fonction* $(v(\varepsilon)_r, v(\varepsilon)_z, \eta^\varepsilon, s^\varepsilon) \in \mathcal{V}$ *est une solution faible du problème* $P(\varepsilon)$ *si la formulation variationnelle suivante est satisfaite*

  $$\mathcal{E}_\mu(v,\varphi,\psi;\varepsilon) + \mathcal{E}_{\mathsf{el}}(\eta^\varepsilon, s^\varepsilon, \varphi, \psi; \varepsilon) = -\mathcal{E}_{\mathsf{src}}(A,\varphi,\psi;\varepsilon) \quad dans\, \mathcal{D}'(I\!R_+),\, \forall \varphi \in V. \quad (25)$$

- Les conditions initiales sur la frontière latérale sont

$$\eta^\varepsilon = s^\varepsilon = \frac{\partial \eta^\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial s^\varepsilon}{\partial t} = 0 \quad \text{on } \Sigma \times \{0\}. \tag{26}$$

-

$$V_{div\neq 0} = \{\varphi \in H^1(\Omega)^3 | \varphi \text{ est axisymétrique },\ \varphi_r|_\Sigma, \varphi_z|_\Sigma \in H^1(0,L),\ \varphi_z(L,R) = \varphi_r(L,r) = \varphi_r(0,r) = 0\}. \tag{27}$$

-

Definition 5. (FORMULATION VARIATIONNELLE DU PROBLÈME $P(\varepsilon)$ DANS LA FORME VITESSE-PRESSION-DÉPLACEMENTS) *Fonction vectorielle* $(v(\varepsilon)_r, v(\varepsilon)_z, \eta^\varepsilon, s^\varepsilon) \in \mathcal{V}$ *and* $p(\varepsilon) \in L^2((0,T)\times\Omega)$ *est une solution faible du problème* $P(\varepsilon)$ *si*

$$\mathcal{E}_\mu(v(\varepsilon), \varphi, \psi; \varepsilon) - \int_0^T \int_\Omega p(\varepsilon)\Big(\frac{\partial \varphi_z}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial r} + \frac{\varphi_r}{r}\Big)\psi(t)\ r dr dz dt + \mathcal{E}_{\mathrm{el}}(\eta^\varepsilon, s^\varepsilon, \varphi, \psi; \varepsilon) = -\mathcal{E}_{\mathrm{src}}(A, \varphi, \psi) \text{ dans } \mathcal{D}'(I\!R_+),\ \forall \varphi \in V_{div\neq 0}. \tag{28}$$

- La vitesse et les déplacements " dilatés " satisfont les estimations a priori suivantes

$$\|\frac{v(\varepsilon)_r}{r}\|_{L^2} + \|v(\varepsilon)_z\|_{L^2} + \|\frac{\partial v(\varepsilon)_r}{\partial r}\|_{L^2} + \|\frac{\partial v(\varepsilon)_z}{\partial r}\|_{L^2} \leqslant C\frac{\varepsilon^2}{\mu}\|A\|_{\mathcal{V}}, \tag{29}$$

$$\|\frac{\partial v(\varepsilon)_r}{\partial z}\|_{L^2} + \|\frac{\partial v(\varepsilon)_z}{\partial z}\|_{L^2} \leqslant C\frac{\varepsilon}{\mu}\|A\|_{\mathcal{V}}, \tag{30}$$

$$\|s^\varepsilon\|_{H^1} \leqslant C\|A\|_{\mathcal{V}}, \tag{31}$$

où les normes L^2 et H^1 sont définies sur $(\Omega \times (0,T))$.

- La pression " dilatée " satisfait

$$\| \, p(\varepsilon) \, \|_{L^2(\Omega\times(0,T))} \leqslant C\|A\|_{\mathcal{V}}, \tag{32}$$

$$\int_0^T \| \, \frac{\partial}{\partial z} p(\varepsilon) \, \|^2_{H^{-1}(\Omega)} \; dt + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^T \| \, \frac{\partial}{\partial r} p(\varepsilon) \, \|^2_{H^{-1}(\Omega)} \; dt \leqslant C\|A\|^2_{\mathcal{V}}. \tag{33}$$

- Maintenant nous cherchons les équations efficaces en utilisant les développements asymptotiques suivantes

$$v(\varepsilon)(z,r,t) = \frac{\varepsilon^2}{\mu} \sum_{i \geqslant 0} \varepsilon^i v^i(z,r,t),$$
$$p(\varepsilon)(z,r,t) = p^0(z,t) + \sum_{i \geqslant 1} \epsilon^i p^i(z,r,t), \tag{34}$$

$$\eta^\varepsilon(z,t) = \varepsilon \sum_{i \geqslant 0} \epsilon^i \eta^i(z,t),$$
$$s^\varepsilon(z,t) = \sum_{i \geqslant 0} \epsilon^i s^i(z,t), \tag{35}$$

qui nous donnent au Tableau 1 le problème parabolique suivant pour la pression efficace $p = p^0$ et les expressions et les expressions suivants pour les autres inconnus

$$\frac{E_0 \eta^0}{R(1-\sigma^2)} = \frac{R}{2-\sigma}\Big(- \frac{1}{2}p + \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)R}{\varepsilon} \frac{1}{8(1-\sigma^2)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^t p \Big), \tag{36}$$

$$\frac{\partial s^0}{\partial z} = \frac{R}{2-\sigma}\left(- \frac{R\sigma}{8} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^t p + \frac{1-\sigma^2}{E_0} p \right), \tag{37}$$

$$v_z^0(z,r,t) = \frac{r^2 - R^2}{4} \frac{\partial p}{\partial z}(z,t) + \frac{\partial s}{\partial t}(z,t), \tag{38}$$

$$v_r^0 = \frac{R}{r}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{(R^2-r^2)^2}{4r} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{R^2 - r^2}{2} \frac{\partial^2 s}{\partial z \partial t}. \tag{39}$$

Notons que pour $G_0 = 0$, on obtient la loi

$$p = \frac{E_0 \eta}{(1-\sigma/2)R^2} = \Bigg(\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{(1-\sigma/2)\varepsilon R} \Bigg) (1 - \sqrt{\frac{\mathcal{A}(0)}{\mathcal{A}}} + \mathcal{O}(\frac{\eta}{R})), \qquad (40)$$

liant la pression efficace p et le déplacement radial efficace η. $\mathcal{A}$ est l'aire de la section radiale de l'arteriole. Pour $\sigma = 1/2$ (40) est exactement la Loi de Laplace (voir [0]) utilisée habituellement dans la literature [**?**, 0, 0] pour modéliser de parois artérielles dans le modèle des anneaux indépendants.

G_0 **PETIT**	G_0 **NON-NÉGLIGEABLE**
$(\frac{5}{2} - 2\sigma)\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{E_0 R}{8}\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$	$\frac{\partial}{\partial t}\left\{(\frac{5}{2} - 2\sigma)p - (1-\sigma^2)\frac{G_0 R^2}{2E_0}\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right\} =$
	$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{\frac{E_0 R}{8}p - \frac{G_0 R^3}{8}\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right\}$
$p(0,t) = p(z,0) = 0;$	$p(0,t) = 0;$
$p(L,t) = A(t)$	$p(L,t) = A(t)$
$p(z,0) = 0$	$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}(0,t) = 0;$
	$\frac{E_0 R}{8(1-\sigma^2)}\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}(L,t) = \frac{1}{2}\frac{dA}{dt}$

CONVERGENCE $\varepsilon \to 0$

•

$$W = \{\varphi \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial \varphi}{\partial r} \in L^2(\Omega)\} \qquad (41)$$

$$W_r = \{r^{-1}\varphi \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial \varphi}{\partial r} \in L^2(\Omega)\}. \qquad (42)$$

•

Theorem 6. *Il existe une sous-suite* $(v(\varepsilon), p(\varepsilon), \eta^\varepsilon, s^\varepsilon)$ *de la suite des solutions du problème* $P(\varepsilon)$ *telle que* $(\mu/\varepsilon^2 \; v(\varepsilon), p(\varepsilon), \eta^\varepsilon, s^\varepsilon)$ *converge faiblement lorsque* $\epsilon \to 0$*. Si la limite (le point d'accumulation)* *est* (u, p, η, s), *avec* $u = u_r \vec{e}_r + u_z \vec{e}_z$, *alors*

$$u(\varepsilon)_z = \frac{\mu}{\varepsilon^2} v(\varepsilon)_z \rightharpoonup u_z \text{ dans } L^2(0, T; W), \tag{43}$$

$$u(\varepsilon)_r = \frac{\mu}{\varepsilon^2} v(\varepsilon)_r \rightharpoonup u_r \text{ dans } L^2(0, T; W_r), \tag{44}$$

$$s^\varepsilon \rightharpoonup s \text{ dans } H^1((0, T) \times (0, L)), \tag{45}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} \sqrt{G_0}\varepsilon^{-1}\partial_z \eta^\varepsilon & \to & \sqrt{G_0}\partial_z \eta \\ \varepsilon^{-1}\eta^\varepsilon & \to & \eta \end{array}\right\}$$

$$\text{faible* dans } L^\infty(0, T; L^2(0, L)), \tag{46}$$

$$p(\varepsilon) \rightharpoonup p \text{ dans } \quad L^2((0, T) \times \Omega). \tag{47}$$

De plus, $u_r = 0$, $\dfrac{\partial p}{\partial r} = 0$ *et*

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{1}{R}\int_0^R u_z(r, z, t)\ r dr dz\Big) = 0 \quad \text{au sens des distributions.} \tag{48}$$

Finalement,

$$\varepsilon^{-1}\partial_t \eta^\varepsilon \rightharpoonup \partial_t \eta \text{ dans } L^2(0, T; H^{-1}(0, L)). \tag{49}$$

•

Corollary 7. *Soit $G_0 > 0$. Alors pour chaque point d'accumulation* $\{u_z, p, \eta, s\} \in L^2(0,T;W) \times L^2(\Omega \times (0,T)) \times \Big(L^\infty(0,T;H^1(0,L))^2 \cap C([0,T];L^2(0,L))^2 \Big)$ *on a*

$$u_z(R,z,t) = \frac{\partial s}{\partial t}(z,t) \text{ pour }, (z,t) \in (0,L) \times (0,T), \tag{50}$$

$$\eta(0,t) = 0 = p(0,t) = \frac{\partial s}{\partial z}(0,t) \text{ pour }, t \in (0,T), \tag{51}$$

$$\eta(L,t)s(L,t) = 0,\ p(L,t) = A(t) \text{ pour } t \in (0,T), \tag{52}$$

$$s(z,0) = \eta(z,0) = 0 \text{ pour } z \in (0,L). \tag{53}$$

Si $G_0 = 0$, $\eta \in L^\infty(0,T;L^2(0,L))$ et nous omettons la condition aux limites pour η à $z = L$.

• Pour passer à la limite dans les équations nous utilisons la formulation vitesse -pression - déplacements :

- Soient

$$\mathcal{E}_\mu(u,\varphi,\psi;0) = \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial u_z}{\partial r}\frac{\partial \varphi_z}{\partial r}\psi(t)\, rdrdzdt,$$

$$\mathcal{E}_{\mathsf{el}}(\eta,s,\varphi,\psi;0) = R\int_0^T\int_0^L \Big\{G_0\frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{\partial \varphi_r}{\partial z} + \frac{E_0}{1-\sigma^2}\Big(\frac{\sigma}{R}\frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\eta}{R^2}\Big)\varphi_r + \frac{E_0}{1-\sigma^2}\Big(\frac{\partial s}{\partial z}\frac{\partial \varphi_z}{\partial z} - \frac{\sigma}{R}\frac{\partial \eta}{\partial z}\varphi_z\Big)\Big\}\psi(t)\; dzdt,$$

et

$$\mathcal{E}_{\mathsf{src}}(A,\varphi,\psi;0) = \int_0^T\int_0^R A(t)\varphi_z\psi(t)\; rdrdt.$$

•

Definition 8. (LA FORMULATION FAIBLE VITESSE-DÉPLACEMENTS DU PROBLÈME LIMITE $P(0)$)
Soit $G_0 > 0$. *Une fonction vectorielle* $(u_z, \eta, s) \in L^2(0, T; W) \times L^\infty(0, T; H^1(0, L))^2$ *telle que* $\{\partial_t \eta, \partial_t s\} \in L^2(0, T; H^{-1}(0, L)) \times L^2((0, T) \times (0, L))$ *est appelé une solution faible du problème limite* $P(0)$ *si*

$$\mathcal{E}_\mu(u, \varphi, \psi; 0) + \mathcal{E}_{\text{el}}(\eta, s, \varphi, \psi; 0) = -\mathcal{E}_{\text{src}}(A, \varphi, \psi), \quad in\, \mathcal{D}'(I\!R_+), \forall \varphi \in V \quad (54)$$

et les conditions (50)-(53) sont satisfaits.

Si $G_0 = 0$ *alors on a seulement* $\eta \in L^\infty(0, T; L^2(0, L))$ *et*
$\partial_t \eta \in L^2(0, T; H^{-1}(0, L))$.

•

Definition 9. (LA FORMULATION FAIBLE VITESSE-PRESSION - DÉPLACEMENTS DU PROBLÈME LIMITE $P(0)$) *Soit* $G_0 > 0$. *Une fonction vectorielle* $(u_z, \eta, s) \in L^2(0,T; W) \times L^\infty(0,T; H^1(0,L))^2$ *telle que* $\{\partial_t \eta, \partial_t s\} \in L^2(0,T; H^{-1}(0,L)) \times L^2((0,T) \times (0,L))$, *et* $p \in L^2((0,T) \times \Omega)$ *est appelé une solution faible du problème limite* $P(0)$ *si*

$$\mathcal{E}_\mu(u, \varphi, \psi; 0) - \int_0^T \int_\Omega p(\mathrm{div}\varphi)\, \psi\, r dr dz dt$$
$$+\mathcal{E}_{\mathrm{el}}(\eta, s, \varphi, \psi; 0) = -\mathcal{E}_{\mathrm{src}}(A, \varphi, \psi),$$
$$\textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+), \forall \varphi \in V_{div \neq 0}, \tag{55}$$

et les conditions (50)-(53) sont satisfaites. $V_{div\neq 0}$ *est défini par* (27).

Si $G_0 = 0$ *on a* $\eta \in L^\infty(0,T; L^2(0,L))$ *et* $\partial_t \in L^2(0,T; H^{-1}(0,L))$.

•

Theorem 10. *Chaque point d'accumulation* $\{u_z, p, \eta, s\}$ $\in L^2(0,T;W)\times L^2((0,T)\times\Omega)\times L^\infty(0,T;L^2(0,L))$ $\times L^\infty(0,T;H^1(0,L))$ *satisfait la formulation faible du problème limite* $P(0)$.

ESTIMATION D'ERREUR

- On construit la couche limite en considérant le problème suivant dans le cylindre $Z^- = S \times \mathbb{R}_-$, avec $S = \{r < R\} \times \{y_3 = 0\}$:

$$-\Delta\beta^{bl} + \nabla\pi^{bl} = 0 \text{ et div } \beta^{bl} = 0 \text{ dans } Z^-, \tag{56}$$

$$\beta_r^{bl} = v_r^0(t,r,L),\ -2\frac{\partial\beta_z^{bl}}{\partial y_3} + \pi^{bl} = -2\frac{\partial v_z^0}{\partial z}(t,r,L) \text{ sur } y_3 = 0$$
$$\text{et } \beta^{bl} = 0 \ \text{ sur } \partial S \times \mathbb{R}_-. \tag{57}$$

- La théorie dans l'article [0] donne

$$\begin{cases} e^{\gamma_0|y_3|} D^\alpha \beta^{bl} \in L^2(Z^-)^9, \text{ pour chaque } \alpha \in I\!N^3 \\ e^{\gamma_0|y_3|}\Big(\pi^{bl} - C_\pi\Big) \in L^2(Z^-), \quad \text{et} \\ e^{\gamma_0|y_3|} D^\alpha \pi^{bl} \in L^2(Z^-)^9, \text{ pour chaque } \alpha \in I\!N^3. \end{cases} \tag{58}$$

- On définit la vitesse de la couche limite et la pression par

$$\beta^\varepsilon(t,r,z) = \varepsilon\beta^{bl}(t,r,\frac{z-L}{\varepsilon}),$$
$$\pi^\varepsilon(t,r,z) = \varepsilon^2\Big(\pi^{bl}(t,r,\frac{z-L}{\varepsilon}) - C_\pi\Big). \tag{59}$$

- Soient

$$\overline{p}(\varepsilon) = p(\varepsilon) - p + \pi^\varepsilon,$$
$$\overline{v}(\varepsilon) = \frac{\mu}{\varepsilon^2}v(\varepsilon) - v_z\vec{e}_z - \varepsilon v_r\vec{e}_r + \beta^\varepsilon,$$
$$\overline{s}(\varepsilon) = s^\varepsilon - s,\ \overline{\eta}(\varepsilon) = \eta^\varepsilon - \varepsilon\eta.$$

Theorem 11. *Supposons que* $A \in C_0^\infty(0, +\infty)$ *et que les paramètres satisfont*

$$|E_0 - \frac{h(\varepsilon)E(\varepsilon)}{\varepsilon}| \leqslant C\varepsilon^{3/2},$$
$$|G_0 - h(\varepsilon)G(\varepsilon)k(\varepsilon)\varepsilon| \leqslant C\varepsilon^{3/2},$$
$$\frac{\rho_w h(\varepsilon)\varepsilon^3}{\mu^2} \leqslant C\varepsilon^{3/2}. \tag{60}$$

Alors pour chaque $\epsilon > 0$ *fixe on a*

(1) L'erreur en vitesse et en pression

$$\|\frac{\overline{v}(\varepsilon)_r}{r}\|_{L^2} + \|\overline{v}(\varepsilon)_z\|_{L^2} + \|\frac{\partial\overline{v}(\varepsilon)_r}{\partial r}\|_{L^2} + \|\frac{\partial\overline{v}(\varepsilon)_z}{\partial r}\|_{L^2} \leqslant C\varepsilon^{3/2}\|A\|_{H^5(0,T)} \tag{61}$$

$$\|\frac{\partial\overline{v}(\varepsilon)_r}{\partial z}\|_{L^2} + \|\frac{\partial\overline{v}(\varepsilon)_z}{\partial z}\|_{L^2} \leqslant C\varepsilon^{1/2}\|A\|_{H^5(0,T)} \tag{62}$$

$$\| \overline{p}(\varepsilon) \|_{L^2} \leqslant C\varepsilon^{3/2}\|A\|_{H^5(0,T)}, \tag{63}$$

où la norme L^2 *est définie sur* $\Omega \times (0, T)$.

(2) L'erreur en déplacements radial and longitudi-

nale

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \{ \sqrt{G_0} \| \frac{\partial \overline{\eta}(\varepsilon)}{\varepsilon \partial z}(t) \|_{L^2} + \sqrt{E_0} \| \frac{\overline{\eta}(\varepsilon)}{\varepsilon}(t) \|_{L^2}$$
$$+ \| \frac{\partial \overline{s}(\varepsilon)}{\partial z}(t) \|_{L^2} \} \leqslant C \varepsilon^{3/2} \| A \|_{H^5(0,T)}, \qquad (64)$$

où les normes L^2 sont définies sur $(0, L)$.

M.A. Biot. *Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Lower frequency range*, and *II. Higher frequency range*, J. Acoust Soc. Am. **28**(2) (1956), 168-178 and 179-191.

P.G. Ciarlet, *Plates and junctions in elastic multi-structures*, R.M.A. 14, Masson, Paris, 1990.

U. Dinar. *Cardiovascular Fluid Dynamics*, CRC Press Inc., Boca Raton, Florida 1981.

H. Dridi, *Comportement asymptotique des équations de Navier-Stokes dans des domaines applatis*, Bull. Sc. Math. 106 (1982), p. 369–385.

W.Jäger and A.Mikelić. *On the effective equations for a viscous incompressible fluid flow through a filter of finite thickness*, Communications on Pure and Applied Mathematics, **Vol. LI** (1998), p. 1073–1121.

Y.C. Fung. Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues. Springer New York 1993.

J. Keener and J. Sneyd. *Mathematical Physiology*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Vol. 8, Springer New York, 1998.

L.D. Landau, E.M. Lifschitz. *Elasticity theory,* Pergamon Press, Oxford, 1975.

H. Le Dret. *Problemes variationnels dans les multidomaines*, R.M.A. 19, Masson, Paris, 1991.

J.L. Lions. *Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en controle optimal*, Springer Verlag, Berlin, 1973.

P. Luchini, M. Lupo, A. Pozzi. *Unsteady Stokes flow in a distensible pipe*, ZAMM - Z. angew. Math. Mech. **71** (1991), p. 367-378.

S.A. Nazarov. *Asymptotic Solution of the Navier-Stokes Problem on the Flow of a Thin Layer of Fluid*, translated from Siberian Math J. , **31** (1990), pp. 131 - 144.

M.S. Olufsen, C.S. Peskin, W.Y. Kim, E.M. Pedersen, A. Nadim, J. Larsen, *Numerical Simulation and Experimental Validation of Blood Flow in Arteries with Structured-Tree Outflow Conditions*, Annals of Biomedical Engineering, **28** (2000), p. 1281-1299.

A. Quarteroni, M. Tuveri and A. Veneziani. *Computational vascular fluid dynamics: problems, models and methods. Survey article*, Comput. Visual. Sci. **2** (2000), 163-197.

I. Tolstoy, ed. *Acoustics, elasticity, and thermodynamics of porous media.* Twenty-one papers by M.A. Biot, Acoustical Society of America, New York, 1992.