Simulation numérique en élastodynamique non linéaire quasi-incompressible

Patrice Hauret

January 30, 2003

CERMICS, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

Patrick Le Tallec, François Jouve, CMAP,
Ali Rezgui, Michelin.

Contents

1 Elastodynamique non linéaire

Elastodynamique compressible

- $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, domaine déformable, densité $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+^*$,
- déplacements $\varphi : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^3$,
  gradients $F = \nabla\varphi : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^{3\times 3}$,
- Potentiel de déformation hyperélastique dépendant de F,

$$\hat{\mathcal{W}} : \Omega \times \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R},$$

  et $\hat{\mathcal{W}}(x, F) = \mathcal{W}(x, F^t \cdot F) = \mathcal{W}(x, C)$.

- Premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff:

$$\Pi(t, x) = \frac{\partial \hat{\mathcal{W}}}{\partial F}(x, F(t, x)), \quad [0, T] \times \Omega,$$

$$\Pi = F \cdot \left(2 \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial C} \right) = F \cdot \Sigma,$$

  où Σ, est le second tenseur (symétrique) de Piola-Kirchhoff.

Equation de l'élastodynamique compressible

$$\begin{cases} \rho\ddot{\varphi} - div\Pi = f, \quad [0,T] \times \Omega, \\ \Pi \cdot n = g, \quad [0,T] \times \Gamma_N, \\ \varphi = \varphi_D, \quad [0,T] \times \Gamma_D, \\ \varphi = \varphi_0, \quad \{0\} \times \Omega, \\ \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0, \quad \{0\} \times \Omega, \end{cases}$$

avec

$$\Pi = \frac{\partial \hat{\mathcal{W}}}{\partial F}(\nabla\varphi)$$

Elastodynamique incompressible

$$\begin{cases} \rho\ddot{\varphi} - div\Pi = f, \quad [0,T]\times\Omega, \\ det\nabla\varphi = 1, \quad [0,T]\times\Omega, \end{cases}$$

avec le premier tenseur de contraintes incompressible:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{\partial\hat{\mathcal{W}}}{\partial F} - p\,cof\,F \\ &= F\cdot\left(2\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial C} - \frac{1}{(\det C)^{1/2}}p\,cof\,C\right) \\ &= F\cdot\left(2\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial C} - 2p\frac{\partial\det C^{1/2}}{\partial C}\right) \\ &= F\cdot\Sigma, \end{aligned}$$

et la pression hydrostatique $p : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}$.

Formulation variationnelle quasi incompressible

- Espaces variationnels:

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = \{u \in W^{1,s}(\Omega)^3; \quad u = 0 \text{ on } \Gamma_D\}, \\ \mathcal{V} = \{w \in L^2(\Omega)^3\}, \\ \mathcal{P} = \{p \in L^q(\Omega); \quad \frac{3}{s} + \frac{1}{q} \leq 1\}. \end{cases}$$

- Soit à trouver:

$$\varphi - \varphi_D \in L^2(0,T;\mathcal{U}_0), \quad \dot{\varphi} \in L^2(0,T;\mathcal{V}), \quad \rho\ddot{\varphi} \in L^2(0,T;\mathcal{U}_0'),$$

$$p \in L^2(0,T;\mathcal{P}),$$

tels que dans $L^2(0,T)$:

$$\begin{cases} \langle \rho\ddot{\varphi}(t), v\rangle_{\mathcal{U}_0',\mathcal{U}_0} + \int_\Omega \Pi(t) : \nabla v = \int_\Omega f(t) \cdot v, \quad \forall v \in \mathcal{U}_0, \\ \int_\Omega (\det \nabla\varphi(t) - 1 + \epsilon\, p(t))\, q = 0, \quad \forall q \in \mathcal{P}. \end{cases} \tag{1}$$

Remarque 1

- *On a supposé* $\Pi \cdot n = 0$ *sur* Γ_N *pour éviter les problèmes de définition des efforts surfaciques.*
- *Le modèle présenté est pénalisé; raideur en volume* $1/\epsilon$.
- *Nous supposons la condition inf-sup:*

$$\exists \beta > 0, \quad \forall \varphi \in \varphi_D + \mathcal{U}_0,$$

$$\inf_{q \in \mathcal{P}, \|q\|_{\mathcal{P}}=1} \sup_{v \in \mathcal{U}_0, \|v\|_{\mathcal{U}_0}=1} \int_\Omega q \left((cof\ \nabla\varphi) : \nabla v \right) \geq \beta.$$

Propriétés de conservation (solutions régulières)

- conservation de l'énergie.

$$\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(0) = \int_0^t \int_\Omega f \cdot \dot{\varphi}, \tag{2}$$

avec:

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega \rho \dot{\varphi}(t,x)^2 \, dx + \int_\Omega \hat{\mathcal{W}}(x, \nabla\varphi(t,x)) \, dx + \frac{\epsilon}{2} \int_\Omega p(t)^2.$$

- conservation du moment cinétique ($\Gamma_D = \emptyset$).

$$\mathcal{J}(t) - \mathcal{J}(0) = \int_0^t \int_\Omega \varphi \times f, \tag{3}$$

avec:

$$\mathcal{J}(t) = \int_\Omega \rho\varphi(t,x) \times \dot{\varphi}(t,x) \, dx.$$

- conservation de l'impulsion ($\Gamma_D = \emptyset$).

$$\mathcal{I}(t) - \mathcal{I}(0) = \int_0^t \int_\Omega f, \tag{4}$$

avec:

$$\mathcal{I}(t) = \int_\Omega \rho \dot{\varphi}(t, x)\, dx.$$

Remarque 2

– *La conservation de l'impulsion et du moment angulaire décrivent le comportement de corps rigide.*

– *La conservation de l'énergie est un critère de stabilité.*

2 Schémas d'intégration en temps

De la nécessité de l'implicite...

On se limitera à des schémas d'ordre 2.

Défauts de schémas existant:

- explicite en quasi-incompressible ($\epsilon > 0$). Sur le cas linéarisé:
  - CFL: $\omega_\epsilon \Delta t \leq 2$ avec $\omega_\epsilon > C\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$!!!
  - viscosité facteur d'instabilité: $\omega_\epsilon \Delta t \leq 2\sqrt{1-\zeta^2}$!!!
- semi-implicite en pression (impossible à cause des non-linéarités),
- implicites pas forcément inconditionnellement stables en Δt...

Objectifs

- Analyse de conservation de l'énergie. (stabilité)
- Analyse de conservation des moments. (groupes de symétrie)

sur quelques schémas...

1. Schémas adaptés du schéma de Newmark trapézoïdal:
   (a) point milieu
   (b) trapèze
   (c) exactement conservatif
2. Schéma adapté du schéma HHT *linéairement dissipatif*:
   (d) Hilber-Hughes-Taylor

Schémas de type point-milieu

Schémas d'ordre 2 de la forme suivante:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \rho \dot{\varphi}_{n+1} \cdot v = \int_\Omega \rho \dot{\varphi}_n \cdot v - \Delta t_n \int_\Omega \Pi_{n+1/2} : \nabla v + \Delta t_n \int_\Omega \frac{f_n + f_{n+1}}{2} \cdot v, \\ \displaystyle\int_\Omega \varphi_{n+1} \cdot w = \int_\Omega \varphi_n \cdot w + \Delta t_n \int_\Omega \frac{\dot{\varphi}_n + \dot{\varphi}_{n+1}}{2} \cdot w, \\ \displaystyle\int_\Omega q \left(D_{n+1/2} - 1 + \epsilon\, \frac{p_n + p_{n+1}}{2} \right) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

pour lesquels on s'intéresse aux propriétés de conservation discrètes.

$$\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n = \mathfrak{P}_n + \ldots \qquad \mathfrak{P}_n = \int_\Omega \frac{f_n + f_{n+1}}{2} \cdot (\varphi_{n+1} - \varphi_n),$$

$$\mathcal{J}_{n+1} - \mathcal{J}_n = \mathfrak{M}_n + \ldots \qquad \mathfrak{M}_n = \Delta t_n \int_\Omega \frac{\varphi_n + \varphi_{n+1}}{2} \times \frac{f_n + f_{n+1}}{2},$$

$$\mathcal{I}_{n+1} - \mathcal{I}_n = \mathfrak{F}_n + \ldots \qquad \mathfrak{F}_n = \Delta t_n \int_\Omega \frac{f_n + f_{n+1}}{2}.$$

Trapèze

$$\begin{cases} \Pi_{n+1/2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial \hat{\mathcal{W}}}{\partial F}(F_n) + \dfrac{\partial \hat{\mathcal{W}}}{\partial F}(F_{n+1})\right) - \dfrac{1}{2}\left(p_n\, cof\; F_n + p_{n+1}\, cof\; F_{n+1}\right), \\ D_{n+1/2} = \dfrac{1}{2}\left(\det F_n + \det F_{n+1}\right) \end{cases}$$

Proposition 1 *Propriétés de conservation au deuxième ordre:*

- $\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n = \mathfrak{P}_n + c_n \Delta t_n^3$
- $\mathcal{J}_{n+1} - \mathcal{J}_n = \mathfrak{M}_n + c_n \Delta t_n^3$
- $\mathcal{I}_{n+1} - \mathcal{I}_n = \mathfrak{F}_n$

c_n ne dépendant que des déplacements, vitesses, pressions et dérivées en temps des pressions aux temps n et $n+1$.

Remarque 3 *Si la contrainte cinématique est assurée initialement, elle l'est à chaque pas de temps.*

Point milieu

$$\begin{cases} \Pi_{n+1/2} = \dfrac{\partial \hat{\mathcal{W}}}{\partial F}\left(\dfrac{F_n + F_{n+1}}{2}\right) - \dfrac{p_n + p_{n+1}}{2}\, cof\left(\dfrac{F_n + F_{n+1}}{2}\right), \\ D_{n+1/2} = \det\left(\dfrac{F_n + F_{n+1}}{2}\right), \end{cases}$$

Proposition 2 *Propriétés de conservation au deuxième ordre, avec* $\Delta t_n = \Delta t$*:*

- $\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n = \mathfrak{P}_n + c_n \Delta t_n^3$
- $\mathcal{J}_{n+1} - \mathcal{J}_n = \mathfrak{M}_n$
- $\mathcal{I}_{n+1} - \mathcal{I}_n = \mathfrak{F}_n$

c_n *dépendant en plus des accélérations et de leurs dérivées.*

Remarque 4 *On résout en la variable* $u_{n+1/2}$ *sur laquelle est assurée la contrainte.*

Remarque 5 *En compressible ce schéma est symplectique [Hairer, Lubich, Wanner] , ce qui n'assure de stabilité que pour* Δt *petit.*

Conservation exacte

- La conservation du moment angulaire s'obtient pour:

$$\Pi_{n+1/2} = \left(\frac{F_n + F_{n+1}}{2}\right) \cdot \Sigma_{n+1/2},$$

avec un tenseur symétrique $\Sigma_{n+1/2}$.

- La meilleure conservation de l'énergie pour le schéma en trapèze provient de l'imposition de la contrainte cinématique sur les pas de temps entiers:

$$D_{n+1/2} = \frac{1}{2}\left(\det F_n + \det F_{n+1}\right).$$

- Condition de conservation exacte de l'énergie:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \Sigma_{n+1/2} : (C_{n+1} - C_n) =$$

$$\int_\Omega \left(\mathcal{W}(C_{n+1}) + \frac{\epsilon}{2}p_{n+1}^2\right) - \int_\Omega \left(\mathcal{W}(C_n) + \frac{\epsilon}{2}p_n^2\right).$$

Entre autres schémas possibles, celui de [Gonzalez,2000]:

$$\Sigma_{n+1/2} =$$

$$2\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial C}(C_{n+1/2}) + 2\left(\mathcal{W}(C_{n+1}) - \mathcal{W}(C_n) - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial C}(C_{n+1/2}) : \delta C_n\right)\frac{\delta C_n}{\delta C_n : \delta C_n}$$

$$-(p_n + p_{n+1})\left[\frac{\partial \det C^{1/2}}{\partial C}(C_{n+1/2}) + \right.$$

$$\left. + \left(\det C_{n+1}^{1/2} - \det C_n^{1/2} - \frac{\partial \det C^{1/2}}{\partial C}(C_{n+1/2}) : \delta C_n\right)\frac{\delta C_n}{\delta C_n : \delta C_n}\right],$$

avec $C_{n+1/2} = \frac{1}{2}(C_n + C_{n+1})$, et $\delta C_n = C_{n+1} - C_n$.

Remarque 6 *Pour simplifier le schéma, on propose d'utiliser une méthode de quasi-Newton avec opérateur tangent de point milieu, pour résoudre l'itération de Gonzalez.*

Schéma de Hilber-Hughes-Taylor

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \rho \ddot{\varphi}_{n+1} \cdot v + \int_\Omega (\alpha \Pi_n + (1-\alpha)\Pi_{n+1}) : \nabla v = \int_\Omega f_{n+1-\alpha} \cdot v, \quad \forall v \in \mathcal{U}_0, \\ \displaystyle\int_\Omega q\,(\det F_{n+1} - 1) = 0, \quad \forall q \in \mathcal{P}, \end{cases} \tag{6}$$

avec les relations de Newmark:

$$\begin{cases} \varphi_{n+1} = \varphi_n + \Delta t_n \dot{\varphi}_n + \Delta t_n^2 \left(\left(\dfrac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\varphi}_n + \beta \ddot{\varphi}_{n+1} \right), \\ \dot{\varphi}_{n+1} = \dot{\varphi}_n + \Delta t_n \left((1-\gamma)\, \ddot{\varphi}_n + \gamma \ddot{\varphi}_{n+1} \right). \end{cases}$$

De plus $\gamma = \frac{1}{2} + \alpha$, et $\beta = \frac{(1+\alpha)^2}{4}$.

Remarque 7 *Cas limite de 2 valeurs propres complexes conjuguées. Stabilité linéaire pour* $\beta \geq (1+2\alpha)/4$.

Remarque 8 *Trapèze pour* $\alpha = 0$.

Proposition 3 *Pour $\Delta t_n = \Delta t$:*

- *Conservation de l'énergie:*

$$\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n = \mathfrak{P}_n - \mathfrak{D}_n^\alpha \Delta t^3 + c_n \Delta t^3,$$

avec:

$$\mathfrak{D}_n^\alpha = \frac{\alpha^2}{8} \int_\Omega \rho \left(\ddot{\varphi}_{n+1}^2 - \ddot{\varphi}_n^2 \right) + \frac{\alpha^3}{4} \int_\Omega \left(\ddot{\varphi}_{n+1} - \ddot{\varphi}_n \right)^2$$

$$+k \int_\Omega \ddot{\Pi}_n : (\nabla V_{n+1/2}) + k \int_\Omega \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_n) \cdot V_{n+1/2}, \quad k = \alpha(\frac{1}{2} - \alpha)$$

et:

$$\ddot{\Pi}_n = \frac{1}{\Delta t^2} \left(\Pi_{n-1} - 2\Pi_n + \Pi_{n+1} \right).$$

- *Conservation des moments au deuxième ordre.*

Proposition 4 *Dans le cas linéaire sans sollicitation ($f = 0$), le schéma HHT est dissipatif pour l'énergie modifiée:*

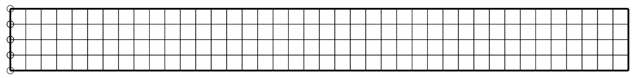
$$\mathcal{E}_n^{HHT} = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho\dot{\varphi}_n^2 + \int_\Omega \hat{\mathcal{W}}(F_n) + \frac{\epsilon}{2}\int_\Omega p_n^2$$
$$+\frac{\alpha^2\Delta t^3}{8}\int_\Omega \rho\ddot{\varphi}_{n+1}^2 + k\Delta t^2\hat{\mathcal{W}}\left(\dot{F}_{n-1/2}\right) + \frac{k\epsilon}{2}\Delta t^2\left(\dot{p}_{n-1/2}\right)^2,$$

avec $\dot{F}_{n-1/2} = (F_n - F_{n-1})/\Delta t$ et $\dot{p}_{n-1/2} = (p_n - p_{n-1})/\Delta t$. Plus précisément:

$$\mathcal{E}_{n+1}^{HHT} - \mathcal{E}_n^{HHT} = -\frac{\alpha^3\Delta t^3}{4}\int_\Omega \left(\ddot{\varphi}_{n+1} - \ddot{\varphi}_n\right)^2$$
$$-k\Delta t^4\int_\Omega \hat{\mathcal{W}}\left(\ddot{F}_n\right) - \frac{k\epsilon}{2}\Delta t^4\left(\ddot{p}_n\right)^2 \leq 0.$$

3 Tests numériques

Une force constante f est appliquée à l'extrêmité d'une poutre (250 éléments):



avec matériau de Money-Rivlin

$$\mathcal{W}(C) = c_1(tr\, C - 3) + c_2(tr\; cof\; C - 3),$$

et on observe la conservation de l'energie discrète

$$H_n = \int_\Omega f \cdot \varphi_n - \mathcal{E}_n.$$

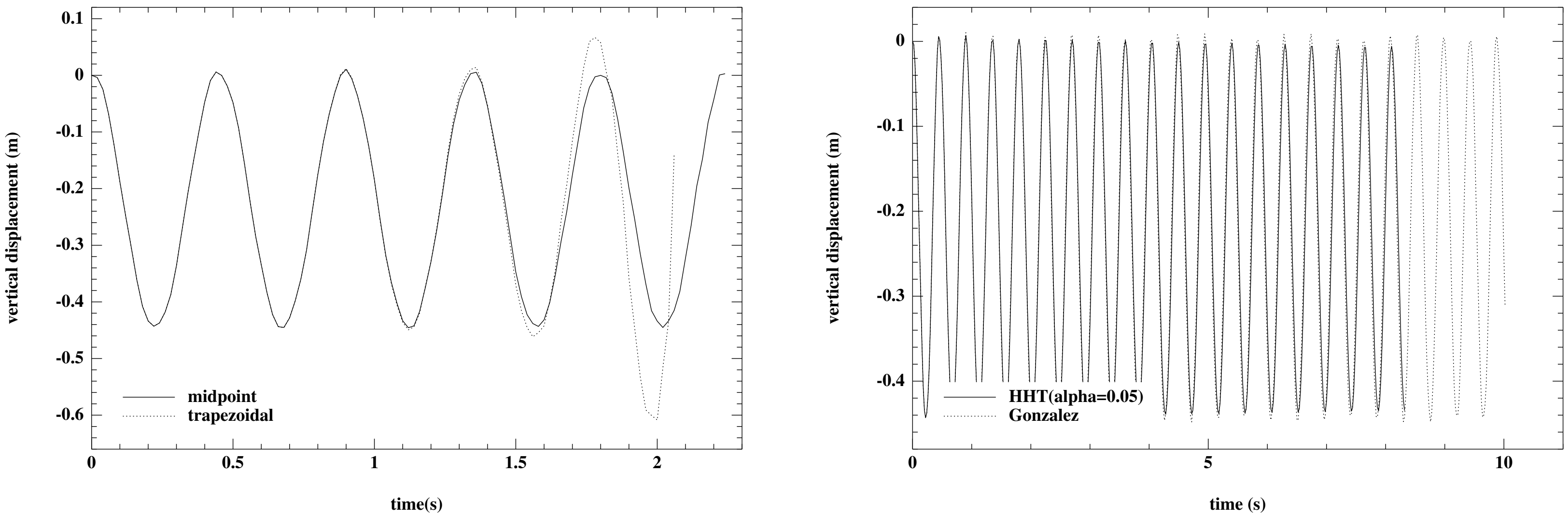


Figure 1: Vertical displacement of the tip of the cantilever beam. Simulation stops when the time step calculation exceeds 20 Newton's iterations.

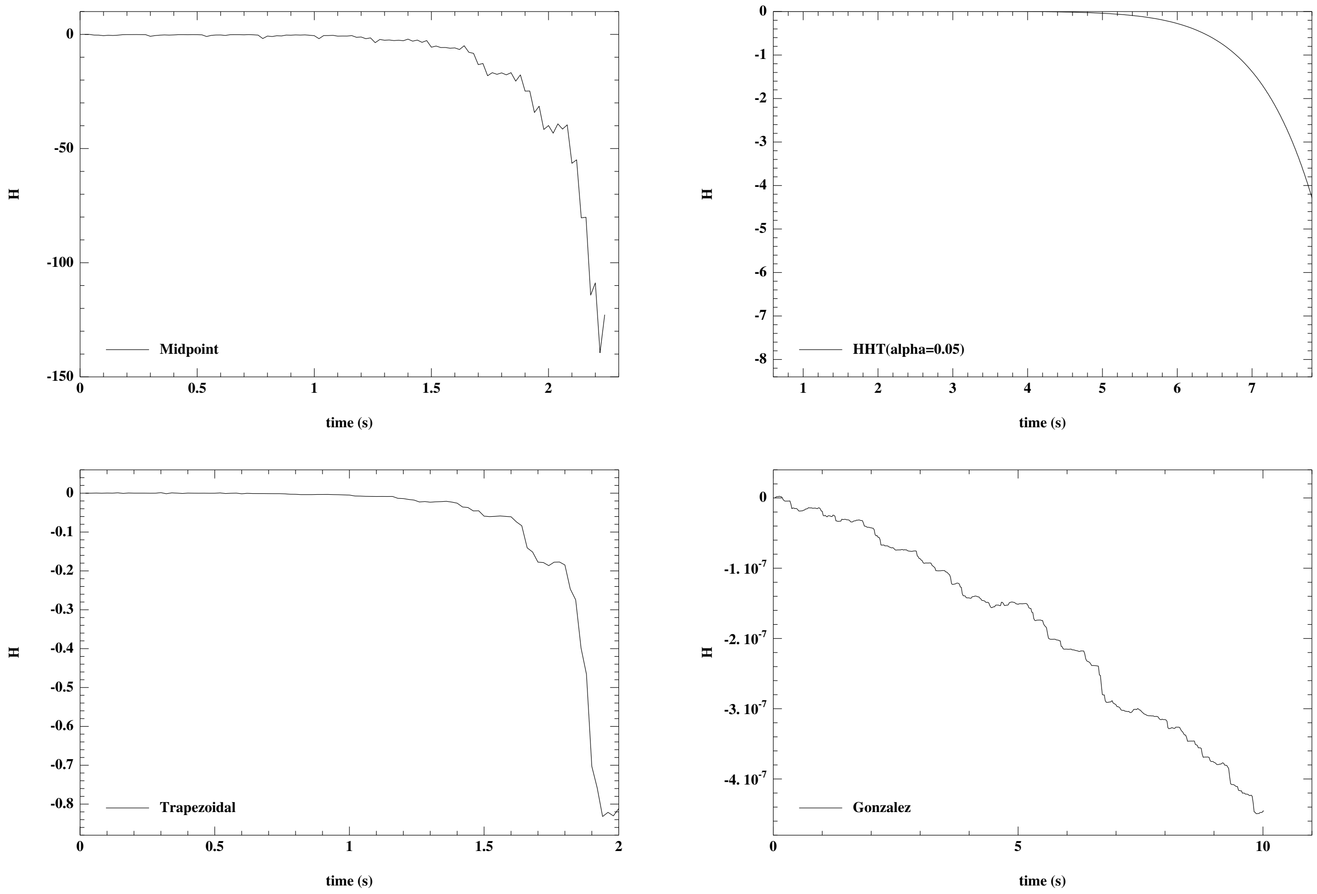


Figure 2: Evolution of the discrete total potential H (in Joules) as a function of time. As an indication, the maximal value of the deformation potential $\int_\Omega \mathcal{W}(C)$ is about 0.5 Joules.

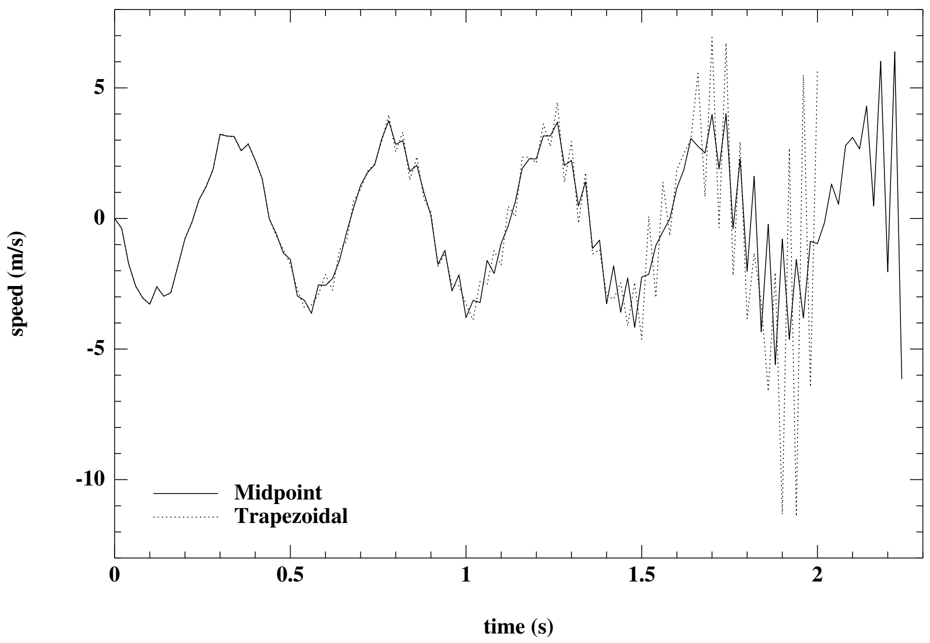


Figure 3: Instability of the vertical velocity at the tip of the cantilever beam, for midpoint and trapezoidal schemes.

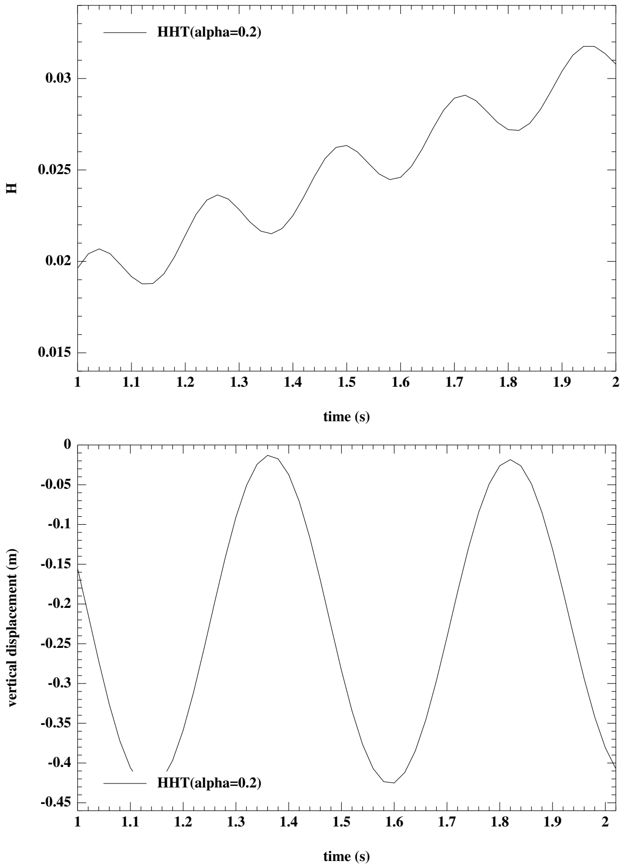


Figure 4: Zoom on total discrete potential for HHT scheme ($\alpha = 0.2$).

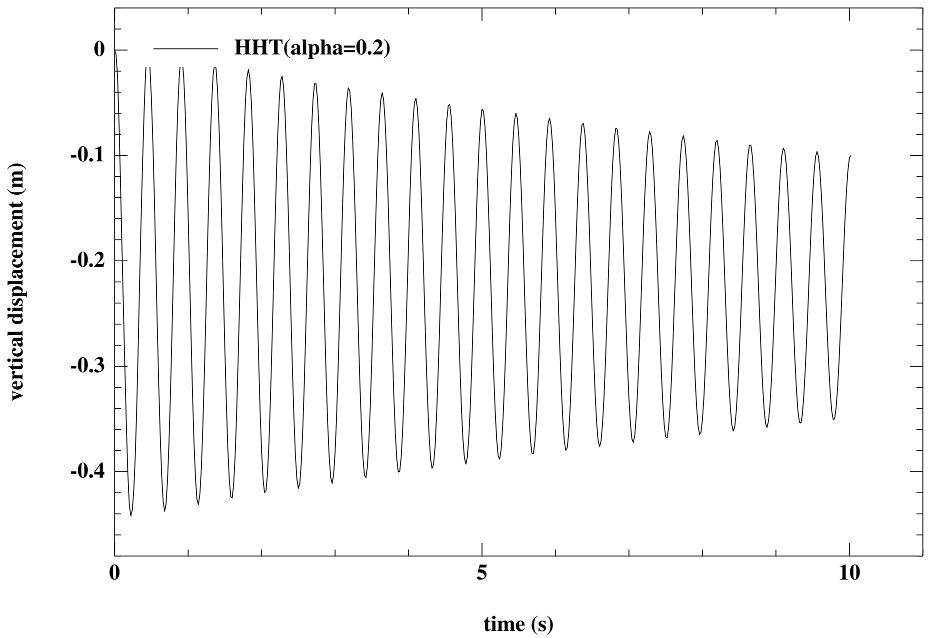


Figure 5: Overdissipation for vertical displacement at the tip of the beam for HHT scheme ($\alpha = 0.2$).

Idées et conclusion

- La conservation de l'énergie est un critère de stabilité théorique et numérique fondamental pour des schémas en grands déplacements,
- Les schémas linéairement dissipatifs ne se généralisent pas forcément en des schémas non linéaires dissipant de l'énergie,
- En non linéaire, il est plus facile de conserver de l'énergie que de la dissiper [Armero,Romero,2000].
- Les viscosités physiques usuelles n'améliorent pas significativment la qualité des schémas non conservatifs.
- L'écriture de schémas conservant l'énergie se généralise de même pour le problème d'interaction fluide-structure, avec formulation ALE non conservative. [Le Tallec,Hauret,2002]...

4 Schéma exactement conservatif en interaction fluide-structure.

Problème

- $\overline{\Omega(t)} = \overline{\Omega^f(t)} \cup \overline{\Omega^s(t)}$, domaine déformé au temps $t \in [0, T]$ contenant fluide + structure
- ρ masse volumique, V vitesse, σ tenseur de Cauchy.
- Bilans de masse et de quantité de mouvement:

$$\int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div_x (\rho V) \right) \hat{q} = 0, \quad \forall \hat{q},$$

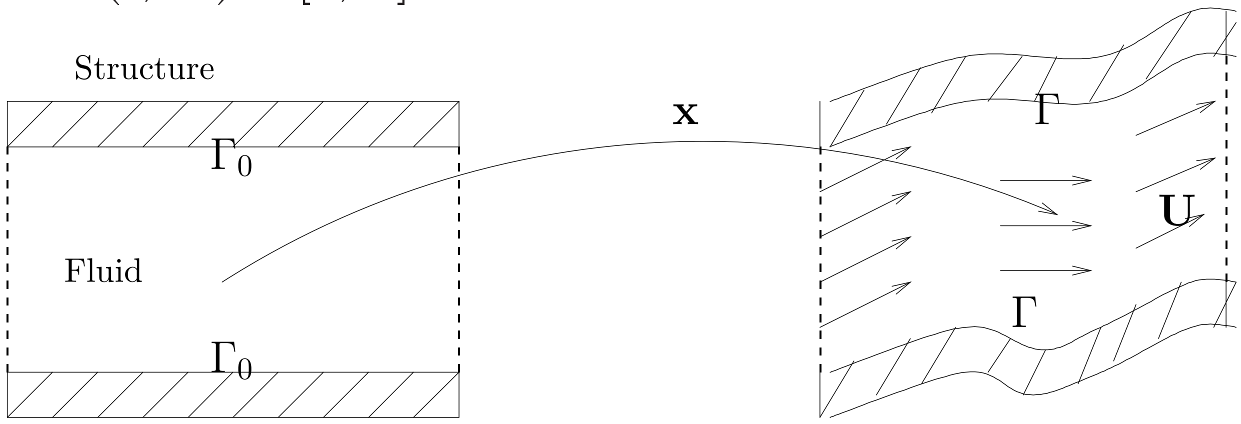
$$\int_{\Omega(t)} \left(\frac{\partial \rho V}{\partial t} + div_x (\rho V \otimes V) \right) \hat{V} + \int_{\Omega(t)} \sigma : \nabla_x \hat{V} =$$

$$\int_{\Omega(t)} f \cdot \hat{V} + \int_{\partial\Omega(t)} g \cdot \hat{V}, \quad \forall \hat{V}.$$

- Condition aux limites sur $\Gamma(t) = \overline{\Omega^f(t)} \cap \overline{\Omega^s(t)}$: "$V^s = V^f$" sur $\Gamma(t)$.

Formulation ALE

- $\varphi : [0,T] \times \Omega_0 \to \mathbb{R}^3$, et $\varphi(t)$ est bijective de Ω_0 sur $\Omega(t)$, $t \in [0,T]$.
- $\overline{\Omega_0} = \overline{\Omega_0^f} \cup \overline{\Omega_0^s}$, avec $\Omega^s(0) = \Omega_0^s$.
- $\varphi^f(t, \Omega_0^f) = \Omega^f(t)$ et $\varphi^s(t, \Omega_0^s) = \Omega^s(t)$.
- $J(t, x_0) = \det \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t, x_0)$, et $V_g(t, x_0) = \partial_t \varphi(t, x_0)$ pour $(t, x_0) \in [0,T] \times \Omega_0$.



Reference config. Ω_0 Present config. $\Omega(t)$

Conservation de la masse

$$\int_{\Omega_0^f} \frac{\partial J\rho}{\partial t}\hat{q}^f + \int_{\varphi(t,\Omega_0^f)} div_x(\rho(V-V_g))\hat{q}^f$$

$$+\int_{\Omega_0^s} (\det F - 1)\hat{q}^s = 0, \qquad \forall(\hat{q}^s, \hat{q}^f)$$

Conservation de la quantité de mouvement

$$m^s(\ddot{\varphi}^s, \hat{V}^s) + a^s(\nabla\varphi^s, \nabla\hat{V}^s)$$

$$+\int_{\Omega_0^f} \frac{\partial J\rho V^f}{\partial t}\cdot\hat{V}^f + \int_{\varphi^f(t,\Omega_0^f)} div_x(\rho V^f \otimes (V^f - V_g))\cdot\hat{V}^f$$

$$+\int_{\varphi^f(t,\Omega_0^f)} (\mu(\nabla_x V^f + \nabla_x^t V^f) - pId) : \nabla_x\hat{V}^f$$

$$= \int_{\Omega(t)} f\cdot\hat{V} + \int_{\partial\Omega(t)} g\cdot\hat{V} + \int_{\Gamma_0} g_\Gamma \cdot \left(tr(\hat{V}^s)_{|\Gamma} - tr(\hat{V}^f)_{|\Gamma} \right), \qquad \forall(\hat{V}^s, \hat{V}^f)$$

Contrainte cinématique d'interface

$$tr(V^s)_{|\Gamma} = tr(V^f)_{|\Gamma}$$

Compatibilité des cartes fluide et solide

$$\varphi^f = ext(\varphi^s_{|\Gamma_0})$$

Il est standard d'adopter un schéma de type point milieu sur cette formulation, mais pour la conservation de l'énergie, on obtient alors les termes d'erreur suivant:

1. erreur de troncature en espace:

$$e_h = \int_{\Omega^f(t_{n+1/2})} \frac{\Delta t}{2} \inf_{q_h \in Q_h} \left(\frac{1}{2}|V^f_{n+1/2}|^2 - q_h\right) \times$$
$$\left(\frac{1}{J_{n+1/2}} \left(\frac{\partial J\rho}{\partial t}\right)_{n+1/2} + div_x[\rho(V^f - V_g)]_{n+1/2}\right)$$

2. erreur de troncature en temps en $O(\Delta t^2)$ avec une constante dépendant de la régularité de φ^f, φ^s.

Une formulation ALE modifiée, un schéma conservatif

Si on rajoute à l'équation de conservation de quantité de mouvement, $(q-1)V^f$ fois la conservation de la masse, on obtient une formulation ALE modifiée. En particulier pour $q = \frac{1}{2}$, on obtient une formulation originale avec la quantité de mouvement $(\sqrt{\rho J} V^f)$ pour le fluide. Si on discrétise:

- la structure par un schéma conservatif,
- le fluide par point milieu $(\dot{\square}_{n+1} + \dot{\square}_n)/2 = (\square_{n+1} - \square_n)/\Delta t_n$, excepté:
- la vitesse du fluide par:

$$V^f_{n+1/2} = \frac{\left(\sqrt{\rho J} V^f\right)_{n+1} + \left(\sqrt{\rho J} V^f\right)_n}{\left(\sqrt{\rho J}\right)_n + \left(\sqrt{\rho J}\right)_{n+1}}.$$

le schéma obtenu est exactement conservatif.

Bilan en fluide-structure

- Des avantages considérables en stabilité ...
- Inconvénients fluide-structure entièrement couplé. Il faut préconditionner par une résolution découplée (méthode par relaxation, quasi-Newton). [Le Tallec, Mouro]

MERCI