Modélisation d'une structure en grands déplacements et petites déformations.

Analyse mathématique du problème.

C. Grandmont
CEREMADE, Université Paris-Dauphine

- Modélisation

- Analyse mathématique

Travail en collaboration avec Y. Maday et P. Métier.

Modèle

On cherche à décrire le mouvement d'un solide en grands déplacements et petites déformations élastiques.

Soit $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ la configuration de référence du solide.

On note $\phi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la déformation du corps.

On suppose que ϕ se décompose de la façon suivante :

- une translation de vecteur $\boldsymbol{\tau} : \xi \longmapsto \xi + \boldsymbol{\tau}$.

- une rotation : $\xi \longmapsto R_\theta \overrightarrow{G\xi}$, d'angle θ et de centre G, où G désigne le centre de gravité du solide.

$$R = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

- une déformation élastique $\begin{array}{rcl} \overline{\Omega} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \xi & \longmapsto & \xi + \mathbf{d}(\xi) \end{array}$

où $\mathbf{d}$ sera supposé “petit”.

Soit :

$$\forall \xi \in \overline{\Omega}, \qquad \phi(\xi) = \boldsymbol{\tau} + R_\theta(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}(\xi))$$

Unicité de la décomposition

Etant donné ϕ sait–on lui associer un unique triplet $(\tau, \theta, \mathbf{d})$ tel que

$$\phi = \boldsymbol{\tau} + R_\theta(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d})?$$

Critère

$$(\mathcal{P}) \qquad \min_{\substack{\theta \in [0, 2\pi[\\ \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^2}} \|\mathbf{d}\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad .$$

avec

$$\begin{aligned} \|\mathbf{d}\|^2_{L^2(\Omega)} &= \|R_\theta^T(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\tau}) - \overrightarrow{G\xi}\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\tau}\|^2 - 2\int_\Omega \phi \cdot R_\theta \overrightarrow{G\xi} + \|\overrightarrow{G\xi}\|^2. \end{aligned}$$

Résolution du problème de minimisation

Conditions d'optimalité

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \boldsymbol{\phi}\,, \quad \int_\Omega \boldsymbol{\phi}\wedge R_\theta\overrightarrow{G\xi} = 0\,, \quad \int_\Omega \boldsymbol{\phi}\cdot R_\theta\overrightarrow{G\xi} \geq 0\,.$$

Détermination de θ

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \boldsymbol{\phi}\wedge R_\theta\overrightarrow{G\xi} &= \left(\int_\Omega \boldsymbol{\phi}\wedge\overrightarrow{G\xi}\right)\cos\theta + \left(\int_\Omega \boldsymbol{\phi}\cdot\overrightarrow{G\xi}\right)\sin\theta,\\
\int_\Omega \boldsymbol{\phi}\cdot R_\theta\overrightarrow{G\xi} &= -\left(\int_\Omega \boldsymbol{\phi}\wedge\overrightarrow{G\xi}\right)\sin\theta + \left(\int_\Omega \boldsymbol{\phi}\cdot\overrightarrow{G\xi}\right)\cos\theta.
\end{aligned}$$

Ainsi si ϕ est tel que $\int_\Omega \phi \wedge \overrightarrow{G\xi} \neq 0$ ou $\int_\Omega \phi \cdot \overrightarrow{G\xi} \neq 0$ il existe un unique angle θ.

On a ainsi déterminé une unique solution (τ, θ) de $(\mathcal{P})$.

De plus le déplacement $\mathbf{d}$ associé vérifie :

$$\int_\Omega \mathbf{d} = 0, \int_\Omega \mathbf{d} \wedge \overrightarrow{G\xi} = 0 \text{ et } \int_\Omega (\mathbf{d} + \overrightarrow{G\xi}) \cdot \overrightarrow{G\xi} > 0.$$

Proposition. *Pour tout* $\phi \in L^2(\Omega)$ *tel que :*

$$\left(\int_\Omega \phi \wedge \overrightarrow{G\xi}\right)^2 + \left(\int_\Omega \phi \cdot \overrightarrow{G\xi}\right)^2 \neq 0\,,$$

il existe un unique triplet $(\boldsymbol{\tau}, \theta, \mathbf{d}) \in \mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi[\times L^2(\Omega)$ *avec* $\mathbf{d}$ *tel que :*

$$\int_\Omega \mathbf{d} = 0\,, \quad \int_\Omega \mathbf{d} \wedge \overrightarrow{G\xi} = 0 \text{ et } \int_\Omega (\mathbf{d} + \overrightarrow{G\xi}) \cdot \overrightarrow{G\xi} > 0\,.$$

satisfaisant $\boldsymbol{\tau} + R_\theta(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) = \phi$

$\boxed{\textbf{Espaces fonctionnels}}$

$$\mathbf{X}_s = \left\{ \phi \in H^s(\Omega);\ \left(\int_\Omega \phi \cdot \overrightarrow{G\xi} \right)^2 + \left(\int_\Omega \phi \wedge \overrightarrow{G\xi} \right)^2 \neq 0 \right\}$$

$$\mathcal{E}_s = \left\{ \mathbf{d} \in H^s(\Omega);\ \int_\Omega \mathbf{d} = 0,\ \int_\Omega \mathbf{d} \wedge \overrightarrow{G\xi} = 0 \right\} \quad ,$$

$$\mathbf{Y}_s = \left\{ \mathbf{d} \in \mathcal{E}_s;\ \int_\Omega (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \overrightarrow{G\xi} > 0 \right\} \quad ,$$

$$\mathbf{Z}_s = \mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi[\times \mathbf{Y}_s \quad ,$$

On introduit l'application

$$\begin{array}{llcc} \mathcal{H}: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times L^2(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ & (\boldsymbol{\tau}, \theta, \mathbf{d}) & \longmapsto & \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\tau} + R_\theta(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \end{array} .$$

$$\forall (\overline{\boldsymbol{\tau}}, \overline{\theta}, \overline{\mathbf{d}}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathcal{E}_0,$$

$$D\mathcal{H}(\boldsymbol{\tau}, \theta, \mathbf{d}).(\overline{\boldsymbol{\tau}}, \overline{\theta}, \overline{\mathbf{d}}) = \overline{\boldsymbol{\tau}} + \overline{\theta}\overrightarrow{e_z} \wedge R_\theta(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) + R_\theta \overline{\mathbf{d}} \quad .$$

$$L^2(\Omega) = \langle \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y} \rangle \overset{\perp}{\oplus} \left\langle \overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{G\xi} \right\rangle \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{E}_0 \quad .$$

$\longrightarrow$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$L^2(\Omega) = \langle \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y} \rangle \overset{\perp}{\oplus} \left\langle \overrightarrow{e_z} \wedge R_\theta \overrightarrow{G\xi} \right\rangle \overset{\perp}{\oplus} \left\langle R_\theta \overline{\mathbf{d}};\ \overline{\mathbf{d}} \in \mathcal{E}_0 \right\rangle \quad .$$

$\longrightarrow$ pour tout $\mathbf{d} \in L^2(\Omega)$ tel que $\int_\Omega (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \overrightarrow{G\xi} \neq 0$, on a

$$L^2(\Omega) = \langle \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y} \rangle \oplus \left\langle \overrightarrow{e_z} \wedge R_\theta (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \right\rangle \oplus \left\langle R_\theta \overline{\mathbf{d}};\ \overline{\mathbf{d}} \in \mathcal{E}_0 \right\rangle$$

$\longrightarrow$ pour tout $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)$, il existe un unique triplet $(\overline{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{v}), \overline{\theta}(\mathbf{v}), \overline{\mathbf{d}}(\mathbf{v})) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathcal{E}_0$ tel que :

$$\mathbf{v} = \overline{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{v}) + \overline{\theta}(\mathbf{v}) \overrightarrow{e_z} \wedge R_\theta (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) + R_\theta \overline{\mathbf{d}}(\mathbf{v}) \quad .$$

De plus

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{v}) &= \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \mathbf{v} \quad ,\\ \overline{\theta}(\mathbf{v}) &= \frac{1}{\int_\Omega(\overrightarrow{G\xi}+\mathbf{d})\cdot\overrightarrow{G\xi}}\int_\Omega \mathbf{v}\cdot(\overrightarrow{e_z}\wedge R_\theta\overrightarrow{G\xi}) \quad ,\end{aligned}$$

et donc

$$\overline{\mathbf{d}}(\mathbf{v}) = R_\theta^T(\mathbf{v}-\overline{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{v})-\overline{\theta}(\mathbf{v})\overrightarrow{e_z}\wedge R_\theta(\overrightarrow{G\xi}+\mathbf{d}))$$

$$= R_\theta^T\Bigg(\mathbf{v}-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \mathbf{v}$$
$$-\frac{1}{\int_\Omega(\overrightarrow{G\xi}+\mathbf{d})\cdot\overrightarrow{G\xi}}\left(\int_\Omega \mathbf{v}\cdot(\overrightarrow{e_z}\wedge R_\theta\overrightarrow{G\xi})\right)\overrightarrow{e_z}\wedge R_\theta(\overrightarrow{G\xi}+\mathbf{d})\Bigg) \quad .$$

Proposition. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{H}: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times L^2(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ & (\boldsymbol{\tau}, \theta, \mathbf{d}) & \longmapsto & \boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\tau} + R_\theta(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \end{array}$$

est un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{Z}_s$ sur $\mathbf{X}_s$. Pour tout $\boldsymbol{\phi} \in \mathbf{X}_s$, la différentielle $D\mathcal{F}(\boldsymbol{\phi})$ de l'inverse $\mathcal{F}$ de $\mathcal{H}$ est l'application linéaire de $H^s(\Omega)$ dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathcal{E}_s$ definie par

$$D\mathcal{F}(\boldsymbol{\phi}).\mathbf{v} = \Big(\overline{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{v}), \overline{\theta}(\mathbf{v}), \overline{\mathbf{d}}(\mathbf{v})\Big)$$

où

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{\tau}}(\mathbf{v}) &= \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \mathbf{v} \quad , \\ \overline{\theta}(\mathbf{v}) &= \frac{1}{\int_\Omega (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \overrightarrow{G\xi}} \int_\Omega \mathbf{v} \cdot (\overrightarrow{e_z} \wedge R_\theta \overrightarrow{G\xi}) \quad , \end{aligned}$$

et

$$\overline{\mathbf{d}}(\mathbf{v}) = R_\theta^T \left(\mathbf{v} - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \mathbf{v} - \frac{1}{\int_\Omega (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \overrightarrow{G\xi}} \left(\int_\Omega \mathbf{v} \cdot (\overrightarrow{e_z} \wedge R_\theta \overrightarrow{G\xi}) \right) \right)$$

avec $(\boldsymbol{\tau}, \theta, \mathbf{d}) = \mathcal{F}(\boldsymbol{\phi})$.

$\boxed{\textbf{Equations du mouvement}}$

On suppose que le matériau est isotrope, élastique, homogène. Dans le cadre de petites déformations on peut considérer un matériau de Saint–Venant Kirchhoff. Sa densité d'énergie s'ecrit :

$$\breve{W}(\mathbf{E}(\mathbf{u})) = \frac{\lambda}{2}[\mathrm{Tr}(\mathbf{E}(\mathbf{u}))]^2 + \mu \mathrm{Tr}[\mathbf{E}(\mathbf{u})]^2$$

avec $\mathbf{u} = \phi - Id$, le déplacement du solide et

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T + \nabla\mathbf{u}^T\nabla\mathbf{u}\right) \quad .$$

Remarque

On a

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) = \mathbf{E}(\mathbf{d}),$$

où $\mathbf{d}$ est associé à $\phi = Id + \mathbf{u}$.

On suppose maintenant que $\nabla \mathbf{d}$ est petit. Au premier ordre on a :

$$\varepsilon(\mathbf{d}) = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{d} + (\nabla \mathbf{d})^T\right) \quad ,$$

et

$$\hat{\mathcal{W}}(\mathbf{d}) = \frac{\lambda}{2}[\mathrm{Tr}(\varepsilon(\mathbf{d}))]^2 + \mu \mathrm{Tr}[\varepsilon(\mathbf{d})]^2 \quad .$$

Formulation faible

Les équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{cases} \forall \mathbf{v} \text{ suffisament régulière} \\ \\ \rho_S \displaystyle\int_\Omega (\partial_{tt}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + \int_\Omega \overline{\sigma}(\mathbf{d}) : \varepsilon(\overline{\mathbf{d}}) = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} \end{cases}$$

où $\mathbf{d}$ est associé à $\mathbf{u}$:

$$Id + \mathbf{u} = \tau + R_\theta \overrightarrow{G\xi} + R_\theta \mathbf{d}$$

et $\overline{\mathbf{d}}$ est associé à $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = \overline{\boldsymbol{\tau}} + \overline{\theta}\overrightarrow{e_z} \wedge R_\theta(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) + R_\theta \overline{\mathbf{d}}.$$

Ce système est complété par des conditions initiales

$$\mathbf{u}(\cdot, t = 0) = \mathbf{u}_0, \;\; \partial_t \mathbf{u}(\cdot, t = 0) = \mathbf{u}_1$$

Remarque : $\overline{\mathbf{d}}$ dépend de la solution.

Cette formulation est équivalente à

- Dynamique de la translation

$$m\ddot{\boldsymbol{\tau}} = \rho_S \int_\Omega \partial_{tt}\mathbf{u} = \int_\Omega \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g}$$

- Dynamique de la rotation

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}J\right) + \rho_S \int_\Omega \mathbf{d} \wedge \partial_{tt}\mathbf{d} = \int_\Omega R_\theta(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \wedge \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} R_\theta(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \wedge \mathbf{g}.$$

- Dynamique du déplacement élastique

$$\forall \overline{\mathbf{d}} \in \mathcal{E}_1,\quad \rho_S \left(\int_\Omega \partial_{tt}\mathbf{d} \cdot \overline{\mathbf{d}} + 2\dot{\theta} \int_\Omega \partial_t \mathbf{d} \wedge \overline{\mathbf{d}} + \ddot{\theta} \int_\Omega \mathbf{d} \wedge \overline{\mathbf{d}} - (\dot{\theta})^2 \int_\Omega (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \overline{\mathbf{d}} \right) + \int_\Omega \overline{\sigma}(\mathbf{d}) : \nabla \overline{\mathbf{d}} = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot R_\theta \overline{\mathbf{d}} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot R_\theta \overline{\mathbf{d}} \quad .$$

$\boxed{\text{Estimations d'énergie}}$

Pour simplifier on suppose que $\mathbf{g} = 0$.

On choisit $\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{u} = \dot{\boldsymbol{\tau}} + \dot{\theta}\overrightarrow{e_z} \wedge R_\theta(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) + R_\theta \partial_t \mathbf{d}$ comme fonction test. On obtient

$$\frac{\rho_S}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_\Omega |\partial_t \mathbf{u}|^2\right) + \frac{d}{dt}[\mathcal{W}(\mathbf{d})] = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \partial_t \mathbf{u}.$$

$\Longrightarrow$ $\partial_t \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ et $\mathbf{d} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$.

En supposant que $\int_\Omega(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \overrightarrow{G\xi} > \delta > 0$ pour tout t, on obtient

$$\tau \in W^{1,\infty}(0, T),$$

$$\theta \in W^{1,\infty}(0, T),$$

$$\mathbf{d} \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$$

$\boxed{\text{Théorème d'existence et d'unicité}}$

On suppose que

$$\mathbf{d}_0 \in \mathbf{Y}_1, \ \mathbf{d}_1 \in L^2(\Omega),$$

$$\mathbf{f} \in L^2_{loc}(0, +\infty; L^2(\Omega))$$

$$\mathbf{g} \in H^1_{loc}(0, +\infty; H^{-1/2}(\partial\Omega)) \cap L^2_{loc}(0, +\infty; L^1(\partial\Omega)).$$

Il existe $T^* > 0$ tel que pour tout $T < T^*$ il existe un unique triplet $(\boldsymbol{\tau}, \theta, \mathbf{d})$ solution faible du problème avec

$\boldsymbol{\tau} \in H^2(0, T)$, $\theta \in H^2(0, T)$,
$\partial_{tt}\mathbf{d} \in L^2(0, T; (H^1(\Omega))')$
$\mathbf{d} \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$,
$\mathbf{d} \in C^0([0, T], \mathbf{Y}_0)$

De plus l'alternative suivante est vérifiée :

- $T^* = +\infty$ ou
- $\displaystyle \lim_{t \longrightarrow T^*} \int_\Omega (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \overrightarrow{G\xi} = 0.$

Ce résultat est équivalent au théorème suivant :

Soit $\mathbf{u}_0 \in H^1(\Omega)$ tel que $\mathbf{u}_0 + \overrightarrow{O\xi} \in \mathbf{X}_1$ et $\mathbf{u}_1 \in L^2(\Omega)$

Il existe $T^* > 0$ tel que $\forall T < T^*$ il existe un unique

$$\partial_{tt}\mathbf{u} \in L^2(0,T;(H^1(\Omega))')$$

$$\mathbf{u} \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$$

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{u} + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} \in C^0([0,T],\mathbf{X}_0)$$

solution du problème.

De plus l'alternative suivante est satisfaite
- $T^* = +\infty$ or
- $\lim\limits_{t \longrightarrow T^*} \int_\Omega (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}) \cdot \overrightarrow{G\xi} = 0.$

Etapes de la preuve

- Méthode de Galerkin

- Existence d'une solution d'un problème approché

- Estimations *a priori*

- *Estimations supplémentaires* $\Longrightarrow$ *compacité*

- *Passage à la limite*

- *Unicité*

- *Prolongement*

$\boxed{\text{Problème approché}}$

Base de Galerkin : modes propres de l'opérateur de l'élasticité linéarisée associés aux valeurs propres strictement positives.

$$\mathbf{d}_N = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \boldsymbol{\psi}_i$$

Le problème approché s'écrit

$$A(X)\ddot{X} = h(t, X, \dot{X})$$

avec

$$A(X) = \begin{pmatrix} J_N & \left(\rho_S \int_\Omega \mathbf{d}_N \wedge \psi_i\right)_i^T \\ \left(\rho_S \int_\Omega \mathbf{d}_N \wedge \psi_i\right)_i & \left(\rho_S \delta_{i,j}\right)_{i,j} \end{pmatrix}$$

La matrice de masse est symétrique définie positive si $\int_\Omega (\mathbf{d}_N + \overrightarrow{G\xi}) \cdot \overrightarrow{G\xi} \geq \delta > 0$.

Les estimations d'energie sont les mêmes que pour le problème continu.

$$\tau \in W^{1,\infty}(0,T),$$

$$\theta_N \in W^{1,\infty}(0,T),$$

$$\mathbf{d}_N \in W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^1(\Omega)),$$

$\boxed{\textbf{Estimations supplémentaires}}$

On cherche à estimer $\ddot{\theta}_N$ et $\partial_{tt}\mathbf{d}_N$.

On a, grâce au choix de la base de Galerkin,

$$\int_\Omega \partial_{tt}\mathbf{d}_N \sqcap_N(\mathbf{b}) = \int_\Omega \partial_{tt}\mathbf{d}_N \mathbf{b}.$$

Or

$$\rho_S \int_\Omega \partial_{tt}\mathbf{d}_N \mathbf{b}_N = -2\dot{\theta}_N \int_\Omega \partial_t \mathbf{d}_N \wedge \mathbf{b}_N +$$
$$-\ddot{\theta}_N \int_\Omega \mathbf{d}_N \wedge \mathbf{b}_N - (\dot{\theta}_N)^2 \int_\Omega (\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N) \cdot \mathbf{b}_N$$
$$-\int_\Omega \overline{\sigma}(\mathbf{d}_N) : \nabla \mathbf{b}_N + \int_\Omega \mathbf{f} \cdot R_{\theta N} \mathbf{b}_N + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot R_{\theta N} \mathbf{b}_N \quad .$$

et

$$\ddot{\theta}_N J_N = -\rho_S \int_\Omega \mathbf{d}_N \wedge \partial_{tt}\mathbf{d}_N - \dot{\theta}_N \dot{J}_N$$
$$+\int_\Omega R_{\theta N}(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N) \wedge \mathbf{f} + \int_{\partial\Omega} R_{\theta N}(\overrightarrow{G\xi} + \mathbf{d}_N) \wedge \mathbf{g}.$$

Séparation des hautes et des basses fréquences

On choisit comme fonction $\mathbf{b}_N = \Pi_N^h(\mathbf{b}) = \sum_{i=N_0}^{N} \beta_i \boldsymbol{\psi}_i$.

On a

$$\|\mathbf{b}_N\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\lambda_{N_0}} \|\mathbf{b}\|_{H^1(\Omega)}.$$

$\Longrightarrow$ Estimation de la partie hautes fréquences de $\partial_{tt}\mathbf{d}_N$ dans $L^2(0,T;(H^1(\Omega))')$.

On estime la partie basses fréquences de $\partial_{tt}\mathbf{d}_N$ en choisissant $\mathbf{b}_N = \Pi_N^b(\partial_{tt}\mathbf{d}_N)$.

$\Longrightarrow$ Estimation de la partie basses fréquences de $\partial_{tt}\mathbf{d}_N$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et sur $\ddot{\theta}_N$.

$\Longrightarrow$ Passage à la limite dans les équations.

$\Longrightarrow$ Existence d'une solution.

$\boxed{\textbf{Unicité}}$

On suppose qu'il existe deux solutions et on choisit la différence des vitesses comme fonction test.

- Même type de modèle en dimension 3 [ref : De Veubeke – C.G, Maday]

- Existence de solution pour un problème couplé fluide-structure [ref : C.G, Maday, Métier – Boulakia]