

Des outils pour l'adaptation de maillage anisotrope en dimension 2 et 3

F. Hecht

Laboratoire Jacques-Louis Lions
Université Pierre et Marie Curie
Paris, France

<http://www.ann.jussieu.fr/~hecht>

<mailto:hecht@ann.jussieu.fr>



PLAN

- Introduction
- un schéma d'adaptation
- Métrique et Maillage unité
- Outil lié aux métriques
 - intersection, interpolation, gradation
- Métrique versu indicateur d'erreur
- Métrique pour élément fini $P1$
- Métrique pour élément fini $P2$
- Problème de convergence (pas le temps)
- <http://www.ann.jussieu.fr/~hecht/freefem++.htm>
- Exemples / Demo of FreeFem++
- Conclusion / Future (pas le temps)

Introduction : Le vrai problème

Nous voulons résoudre une **EDP**, dans un domain Ω avec la méthode des éléments finis,

Le plus vite possible avec une précision donnée ε .

The theorie of error indicator given, the level of the error, but how to compute the local mesh size to get a equidistribuate error.

Scheme of mesh adaption

$i=0$;

Soit \mathcal{T}_h^i initial mesh

loop

compute u^i the solution on mesh \mathcal{T}_h^i

evaluate the level of error ε

si $\varepsilon < \varepsilon_0$ break

compute the new local mesh size

construct a mesh according to prescribe the mesh size.

Remarque : comment transformé un **indicateur d'erreur local** η_K en carte de taille. Moralement, il faut estimer :

$$\frac{\partial \eta_K}{\partial h_i}$$

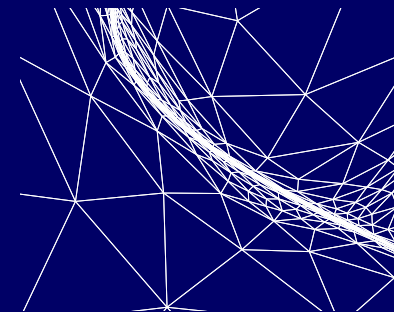
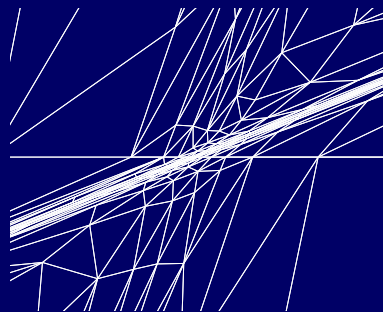
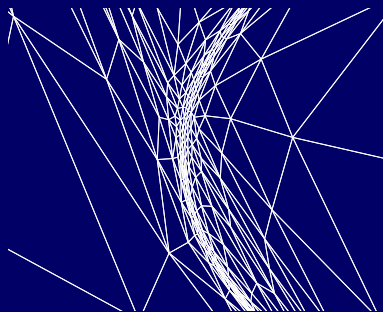
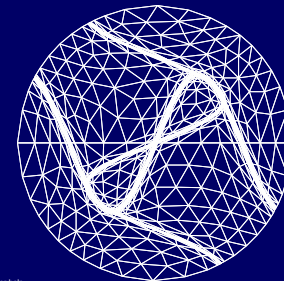
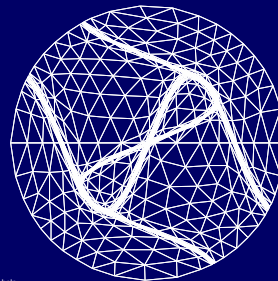
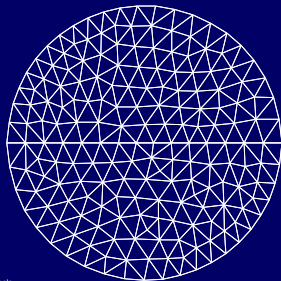
A main IDEA

- The difficulty is to find a tradeoff between the error estimate and the mesh generation, because these two works are strongly different.
- To do that, we propose a way based on a metric \mathcal{M} and unit mesh w.r.t \mathcal{M}
- The metric is a way to control the mesh size.
- remark : The class of the mesh which can be created by the metric, is very large.

Example of mesh adapted for 2 functions

$$f_1 = (10 * x^3 + y^3) + \text{atan2}(0.001, (\sin(5 * y) - 2 * x))$$

$$f_2 = (10 * y^3 + x^3) + \text{atan2}(0.01, (\sin(5 * x) - 2 * y)).$$



Metric / unit Mesh

In Euclidean geometry the length $|\gamma|$ of a curve γ of \mathbb{R}^d parametrized by $\gamma(t)_{t=0..1}$ is

$$|\gamma| = \int_0^1 \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} dt$$

We introduce the metric $\mathcal{M}(x)$ as a field of $d \times d$ symmetric positive definite matrices, and the length ℓ of Γ w.r.t \mathcal{M} is :

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{\langle \gamma'(t), \mathcal{M}(\gamma(t)) \gamma'(t) \rangle} dt$$

The key-idea is to construct a mesh where the lengths of the edges are close to 1 accordingly to \mathcal{M} .

Remark on the Metric

Let S be a surface , parametrized by

$$F(u) \in R^3 \quad \text{with } (u) \in \mathbb{R}^2, \text{ and let } \Gamma(t) = F(\gamma(t)), t \in [0, 1]$$

be a curve on the surface. The length of the curve Γ is

$$|\Gamma| = \int_0^1 \sqrt{\langle \Gamma'(t), \Gamma'(t) \rangle} dt$$

$$|\Gamma| = \int_0^1 \sqrt{\langle \gamma'(t), {}^t\partial F \partial F \gamma'(t) \rangle} dt$$

and on a parameteric surface the metric is

$$\mathcal{M} = {}^t\partial F \partial F$$

the Metric versus mesh size

at a point P ,

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \mathcal{R}^{-1}$$

where $\mathcal{R} = (v_1, v_2)$ is the matrix construct with the 2 unit eigenvectors v_i and λ_1, λ_2 the 2 eigenvalues.

The mesh size h_i in direction v_i is given by $1/\sqrt{\lambda_i}$

$$\lambda_i = \frac{1}{h_i^2}$$

Remark on metric :

If the metric is independant of position, then geometry is euclidian. But **the circle in metric become ellipse in classical space.**

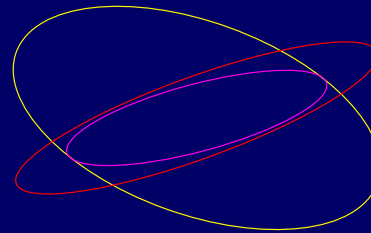
Infact, the unit ball (ellipse) in a metric given the mesh size in all the direction, because the size of the edge of mesh is close to 1 the metric.

If the metric is dependant of the position, then you can speak about Riemmanian geometry, and in this case the sides of triangle are geodesics, but the case of mesh generation, **you want linear edge.**

Matrix Tools

- The unit ball $\mathcal{B}(\mathcal{M})$ in a matrix \mathcal{M} plot the maximum mesh size on all the direction. If you two unknowns u and v , we just compute the matrix \mathcal{M}_v and \mathcal{M}_u , find a matrix \mathcal{M}_{uv} call intersection such that :

$$\mathcal{B}(\mathcal{M}_{uv}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{M}_u) \cap \mathcal{B}(\mathcal{M}_v)$$



- Near the wall we enforce the metric such that :

$$\mathcal{M}_w = (n \ t) \begin{pmatrix} f(y^+)/h_{wall}^2 & 0 \\ 0 & f(y^+)R \end{pmatrix} (n \ t)^t$$

Where R is the radius of curvature, n, t the normal and tangent vector and $f(y^+)$ is a smooth decreasing function from 1 to 0.

Interpolation de Metric

- Généralement, la Metric, n'est connue qu'aux sommets du maillage, il faut donc interpolé.
- l'interpolation direct des matrices (revient à dire que la fonction est P_3 (on genere trop de points).
- l'iterpolation en h revient a interpole avec

$$\mathcal{M}(t) = \left((t)\mathcal{M}_A^{-\frac{1}{2}} + (1-t)\mathcal{M}_B^{-\frac{1}{2}} \right)^{-2}$$

car $1/h^2 \sim \lambda$ (trop lent)

- une derniere solution est :

$$\mathcal{M}(t) = \left((t)\mathcal{M}_A^{-1} + (1-t)\mathcal{M}_B^{-1} \right)^{-1}$$

Remark

- The quality of the generated triangles, depend on the variation of the \mathcal{M} in space
- The idea is to bound the variation of the \mathcal{M}

H- variation

- In the case of isotropic metric

$$\mathcal{M}(P) = \frac{1}{h_P^2} Id$$

- the length of a edge PQ of \mathcal{T}

$$\ell(PQ) = |PQ| \int_0^1 \frac{1}{h(t)} dt$$

where $h(t) = (1 - t) * h_P + t * h_Q$, linear interpolation

$$\ell(PQ) = |PQ| \frac{\ln(h_Q) - \ln(h_P)}{h_Q - h_P}$$

- the H-variation is

$$v(PQ) = \frac{h_Q - h_P}{|PQ|}$$

Definition

- let α be $Max(v(PQ))$ an all mesh edges PQ where $v(PQ) = \frac{h_Q - h_P}{|PQ|}$
- let β be the maximal ratio of the Euclidean length of all the two adjacent and opposite edges in a new unit mesh

Result :

$$\alpha \simeq \ln(\beta)$$

Size correction w/r H-variation

- In the isotropic case, the problem is to bound $v(PQ)$ by a threshold value α
- thus simply modify h_P and h_Q accordingly :

$$h_P = \min(h_P, h_Q + \alpha|\overrightarrow{PQ}|)$$

$$h_Q = \min(h_Q, h_P + \alpha|\overrightarrow{PQ}|)$$

- in anisotropic case

$$\mathcal{M}(P) = \mathcal{M}(P) \cap \mathcal{M}(Q)(1 + \alpha l_P(PQ))^{-2}$$

$$\mathcal{M}(Q) = \mathcal{M}(Q) \cap \mathcal{M}(P)(1 + \alpha l_Q(PQ))^{-2},$$

where $l_P(PQ)$ (resp. $l_Q(PQ)$) is the length of PQ w/r to $\mathcal{M}(P)$ (resp. $\mathcal{M}(Q)$)

Metric computation with Hessian for $P1$ Lagrange finite element

The Le Cea lemma says : the error is bound with the interpolation error. In a classical Adaption way, the metric tensor \mathcal{M} is constructed in order to equilibrate the error of interpolation.

Find a metric tensor \mathcal{M} , such that, the adapted mesh constructed from \mathcal{M} minimizes the interpolation error :

$$\|U - \Pi_h(U)\|_X$$

where Π_h is the finite element interpolation operator considered

En dimension un et la solution u est connu

notons : $\underline{u}'' = \inf_{[a,b]} u''$ et $\overline{u}'' = \sup_{[a,b]} u''$.

$$\frac{1}{2}\overline{u}''(x-a)(x-b) \leq (u - \Pi_1 u) \leq \frac{1}{2}\underline{u}''(x-a)(x-b)$$

d'où

$$\frac{(b-a)^2}{8}\overline{u}'' \leq u - \Pi_1 u \leq \frac{(b-a)^2}{8}\underline{u}''$$

donc les erreurs d'interpolation sur $[a, b]$ sont :

$$\|u - \Pi_1 u\|_{L^\infty} \leq \frac{(b-a)^2}{8} |\overline{u}''|$$

$$\|u - \Pi_1 u\|_{L^1} \leq \frac{(b-a)^3}{12} |\overline{u}''|$$

$$\|u - \Pi_1 u\|_{L^2} \leq \frac{(b-a)^{\frac{5}{2}}}{2\sqrt{30}} |\overline{u}''|$$

En dimension Un L'adaptation revient à découper le segment $[x_0, x_N]$ telle que

$$\mathcal{L}_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sqrt{|u''|} = \frac{\mathcal{L}}{N}$$

soit independant de i .

La question naturelle est

$$\int_a^b \sqrt{|u''|} \leq \varepsilon \quad \longrightarrow \quad \|u - \Pi_1 u\| \leq C\varepsilon^p$$

où p est un exposant à déterminer en fonction de la norme et C une contante indépendante de la longueur $b - a$.

En dimension 2

With the $P1$ finite element the error interpolation is :

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty}^T \leq \frac{1}{2} \sup_{x,y \in T} ({}^t \vec{ax} | \mathcal{H}(y) | \vec{ax})$$

where a is a vertex of triangle T

where $|\mathcal{H}|$ have the same eigen-vectors and the eigen-value of $|\mathcal{H}|$ is the **abs** of the eigen-value of \mathcal{H} ,

We take $\mathcal{M} = \frac{1}{\varepsilon_0} |\mathcal{H}|$ and where ε_0 is the expected error.

Suite

$$\|u - \Pi_h u\|_{\infty}^T \leq \frac{1}{2} \sup_{x,y \in T} ({}^t_{\vec{a}x} |\mathcal{H}(y)| \vec{a}x)$$

il y a 2 cas, le maximum est atteint en c a l'interieur de T ou sur une arête de T . Dans le second cas nous sommes ramené au cas 1D. Donc c considère comme interne et on a donc : $\frac{\partial(u - \Pi_h u)}{\partial x_i}(c) = 0$, La formule de Taylor Mac Laurin dit q'il existe un point $d \in]a, c[$ tel que

$$0 = (u - \Pi_h u)(a) = u(c) + \frac{1}{2} \left({}^t_{\vec{a}c} \frac{\partial^2(u - \Pi_h u)}{\partial x_i \partial x_j}(d) \right) \vec{a}c$$

mais

$${}^t_{\vec{a}d} \left(\frac{\partial^2(u - \Pi_h u)}{\partial x_i \partial x_j}(d) \right) \vec{a}d \leq \sup_{x,y \in T} ({}^t_{\vec{a}x} |\mathcal{H}(y)| \vec{a}x)$$

La solution u_h est discrète

Nous voulons calculer \mathcal{H} d'une fonction $P1$ par morceaux. Approximation du Hessian \mathcal{H}_h^k à chaque sommet k

Methode 1

$$\mathcal{H}_{hij}^k = -\frac{1}{3|\Omega_k|} \int_{\Omega_k} \partial_i u_h \partial_j w^k$$

Remarques : cette approximation ne converge pas si $h \rightarrow 0$, et le stencil est juste formé des triangles contenant k .

Methode 2 faire une double projection :

$$H = \Pi_{L^2} \left(\nabla \Pi_{L^2} (\nabla u) \right)$$

où Π_{L^2} est la projection L^2 sur l'espace des fonctions éléments finis $P1$ Lagrange.

Remarques : cette approximation converge t'elle si $h \rightarrow 0$?. Le stencil est formé des triangles voisins des triangles contenant k .

Problème ouvert

Pour que la méthode d'adaptation proposée converge, il faut résoudre le problème d'interpolation, (on calcule le Hessien à partir de l'interpolation)

Question : construire un schéma pour calculer une approximation du Hessien \mathcal{H}_ε de l'interpolation u_ε de u sur le maillage adapté à une erreur ε , avec le vrai Hessien.

$$\varepsilon \longrightarrow 0, \quad u_\varepsilon \longrightarrow u, \quad \mathcal{H}_\varepsilon \longrightarrow \mathcal{H}$$

Metric with a local relative error

Find a metric tensor \mathcal{M} , such that, the adapted mesh constructed from \mathcal{M} minimizes the relative interpolation error :

$$\frac{\|U - \Pi_h(U)\|_X}{\|U\|_X}$$

Remark : This error is adimensional

In this case we take :

$$\mathcal{M} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{|\mathcal{H}|^p}{\max(10^{-10}, |U|^p)}$$

This comes from a dimensional analysis.

Métrie pour de élément fini $P2$

Il semble naturel, de dire que l'erreur d'interpolation dépend de la dérivé troisième $u^{(3)}$ de la solution

Donc comment construire une métrie en fonction de $u^{(3)}$.

L'erreur d'interpolation \mathcal{E} ressemble à

$$\mathcal{E} \sim \sup_{a,b,c \in K} \frac{1}{6} |u^{(3)}(c)(\vec{ab}, \vec{ab}, \vec{ab})|$$

Le but est de construire un maillage telle que

$$|u^{(3)}(c)(\vec{ab}, \vec{ab}, \vec{ab})| \leq \varepsilon_0$$

le problèmes est de construire des triangles contenue dans la « boule » $\sqrt[3]{\varepsilon_0} B_c$ avec $B_c = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 / |u^{(3)}(c)(\vec{x}, \vec{x}, \vec{x})| \leq 1\}$

Métrie pour de élément fini P2/ suite

Soit \mathcal{A} une matrice symétrique définie positive de **boule unité la plus grande possible** tel que

$$|u^{(3)}(c)(\vec{x}, \vec{x}, \vec{x})| \leq 1 \Rightarrow (\vec{x}, \mathcal{A}_c \vec{x}) \leq 1$$

Alors la métrie est :

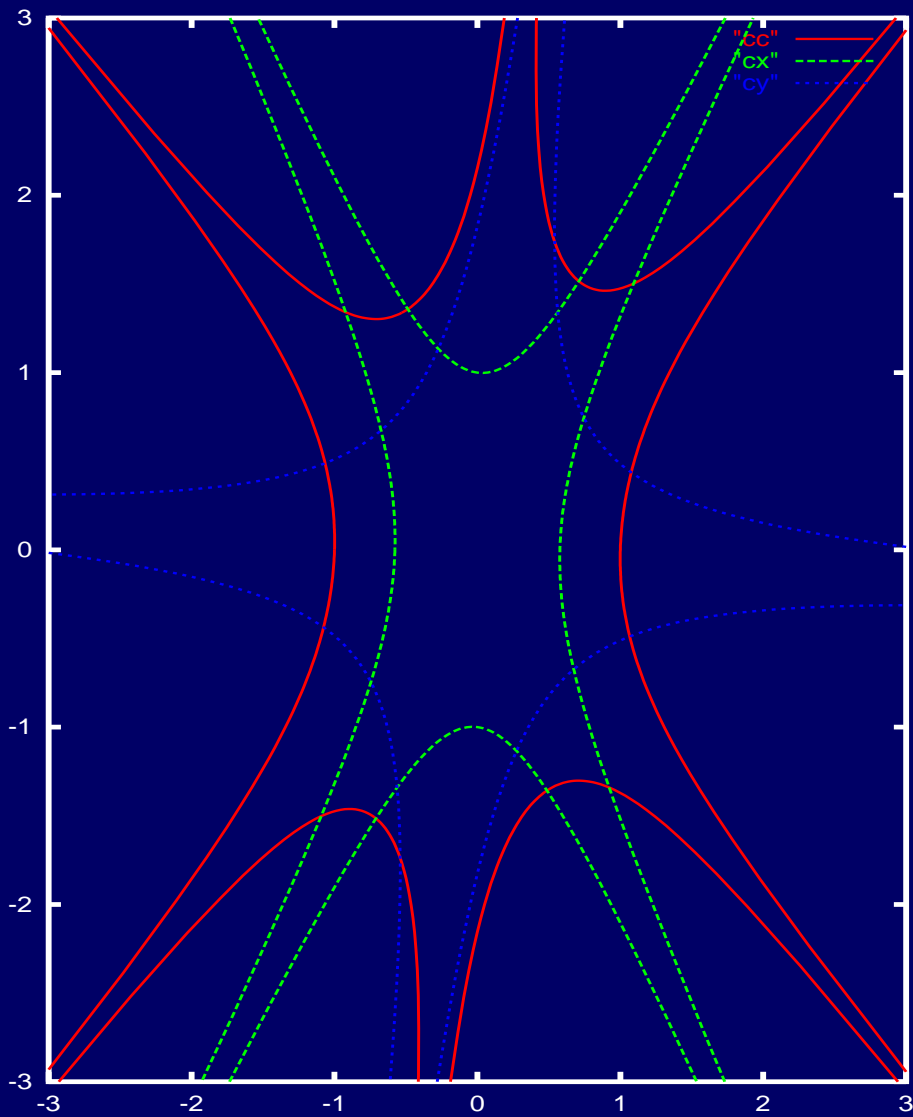
$$\mathcal{M}_c = \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \mathcal{A}_c$$

Une approximation est de prendre la métrie

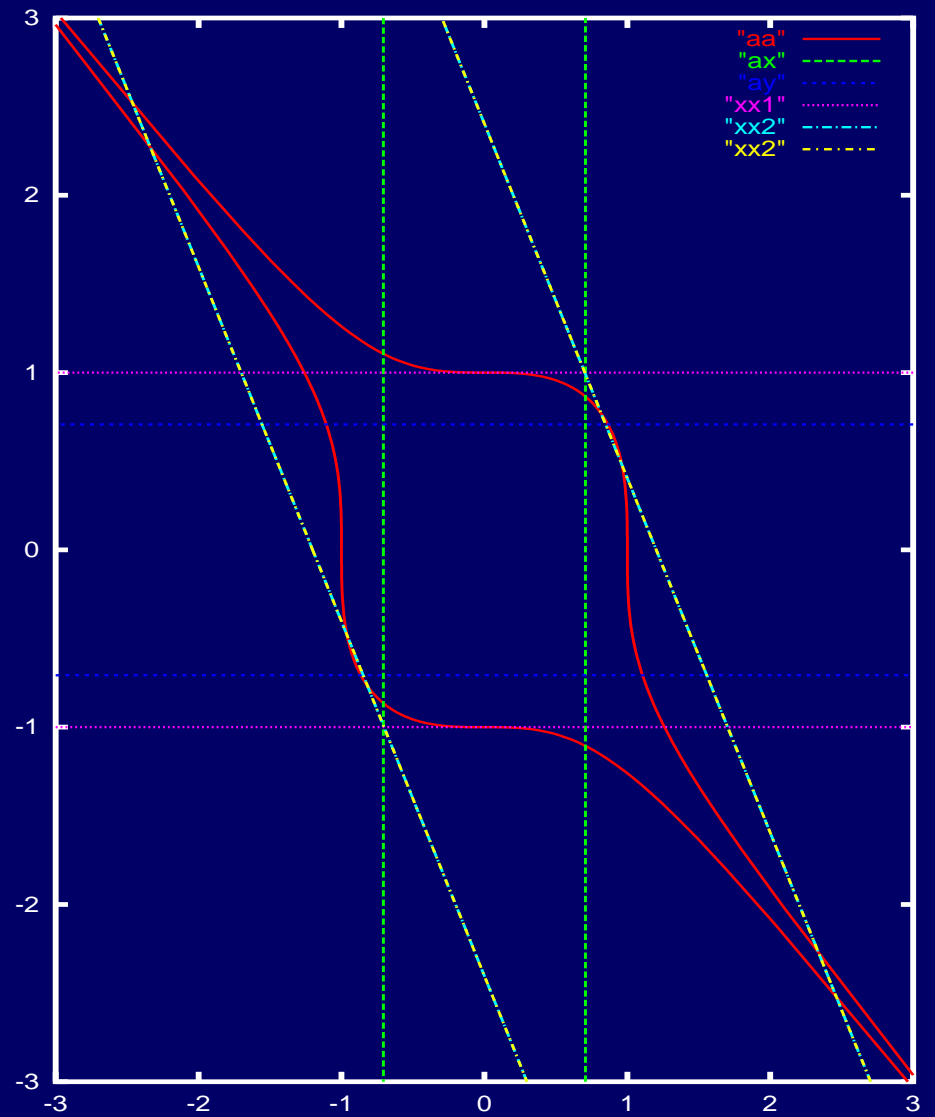
$$\mathcal{M}_c = \varepsilon^{-1} (\mathcal{H}_{u_x} \cap \mathcal{H}_{u_y})$$

où opérateur \cap construite une métrie de boule unité maximale contenue dans l'intersection des boules unités des 2 métriques.

$$x^3 - \frac{1}{10}x^2y - xy^2 + \frac{1}{10}x^3$$



$$x^3 + y^3$$



Conclusion

Les métriques sont une méthode très puissantes pour faire de l'adaptation de maillage.

Mais, il y a un manque de support mathématique.

Problème ouvert :

Trouver de bons schémas pour calculer le Hessien.

Logiciel sur la Toile

In the directory

<ftp://ftp.inria.fr/INRIA/Projects/Gamma/> on INTERNET :

- 2D CAD+ mesh generator :
[Emc2.tar.gz](#)
written in **f77** translated in **C**
- 2D adaption loop
[bamg.tar.gz](#)
written in **C++**
- 2D Compressible Navier Stokes solver
written in **F77**
[NSC2KE.tar.gz](#)
- FreeFem++ : a 2D PDE solve
<http://www.ann.jussieu.fr/hecht/freefem++.htm>