

Présentation d'un modèle corrélant le taux d'intérêt à l'intensité de défaut, et calibration au marché.

Aurélien Alfonsi
CERMICS, ENPC
6-8 Avenue Blaise Pascal
Cité Descartes - Champs sur Marne
77455 Marne la Vallée Cedex 2

Travail effectué à Milan avec :

Damiano Brigo
Banca IMI , SanPaolo IMI Group
Corso Matteotti 6
20121 Milano, Italie

14 Janvier 2004

Structure de l'exposé

- Première partie : Présentation du marché du risque de crédit, et des Credit Default Swaps (CDS)
- Deuxième partie : Modélisation du marché, et calibration
- Troisième partie : Aspects numériques

Première Partie: Présentation du marché du risque de crédit, et des Credit Default Swaps (CDS)

- Objectif du marché: permettre aux banques de se couvrir face au risque de défaut des entreprises ou des états, et plus particulièrement au niveau des obligations qu'ils émettent.
- Marché en pleine expansion dont le besoin s'est fait nettement ressentir après les faillites retentissantes d'ENRON et de l'état d'Argentine.



Figure 1: Evolution du volume des dérivés de crédit (La Tribune 13/10/03)

Un produit sur un seul sous-jacent: le Credit Default Swap (CDS)

- Supposons qu'une entreprise "A" ait souscrit à une obligation émise par une société ou un état "C". "A" reçoit alors régulièrement des intérêts de la part de "C", et à la maturité de l'obligation, "C" rembourse la somme prêtée par "A".
- Si "C" pendant le contrat de l'obligation fait faillite à un instant τ , il ne pourra verser les intérêts après τ , et surtout ne reversera qu'une fraction $1 - Z$ de la somme prêtée. ($Z \in [0, 1]$ sera supposé déterministe dans toute la suite.)
- Afin de ne pas supporter le risque de défaut de "C", "A" signe un contrat avec une société "B" (généralement une banque) qui s'engage à lui verser, en cas de défaut, la fraction Z manquante à l'instant de défaut τ . En échange, "A" paye à "B" régulièrement (par unité de temps de couverture) la somme R_f aux échéances $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$ fixées à l'avance, tant que le défaut n'a pas eu lieu.

Payoff du CDS

- Notations:
 - On pose $T_0 = 0$.
 - On note $\beta(t)$ l'indice tel que $t \in [T_{\beta(t)-1}, T_{\beta(t)})$.
 - $\alpha_i = T_i - T_{i-1}$
 - r_t désigne le taux d'intérêt spot à l'instant t
 - $D(t, T) = \exp(-\int_t^T r_s ds)$ désigne le discount factor
 - $P(t, T) = \mathbb{E}[D(t, T)]$
 - \mathcal{F}_t désigne la filtration "sans-défaut", c'est à dire que r_t est \mathcal{F}_t -mesurable, mais en revanche les $(\{\tau < u\}, u \leq t)$ ne sont pas \mathcal{F}_t -mesurables.
 - On note $\mathcal{H}_t = \sigma(\{\tau < u\}, u \leq t)$ et $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t$
- Avec ces notations, le payoff du CDS s'écrit, à l'instant t :

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} [D(t, \tau)(\tau - T_{\beta(\tau)-1})R_f \mathbf{1}_{\{\tau < T_n\}} \\ & + \sum_{i=\beta(t)}^n D(t, T_i)\alpha_i R_f \mathbf{1}_{\{\tau > T_i\}} - \mathbf{1}_{\{\tau < T\}} D(t, \tau) Z] \end{aligned}$$

et son prix évalué sous la probabilité risque-neutre \mathbb{P} , noté $\text{CDS}(t, \mathcal{T}, T, R_f, Z)$ vaut (cf. Bielecki et Rutkowski (2001)):

$$\begin{aligned} \text{CDS}(t, \mathcal{T}, T, R_f, Z) = & \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E} \left\{ D(t, \tau)[\tau - T_{\beta(\tau)-1}]R_f \mathbf{1}_{\{\tau < T_n\}} \right. \\ & \left. + \sum_{i=\beta(t)}^n D(t, T_i)\alpha_i R_f \mathbf{1}_{\{\tau > T_i\}} - \mathbf{1}_{\{\tau < T\}} D(t, \tau) Z \middle| \mathcal{G}_t \right\} \end{aligned}$$

Quelques remarques sur le marché du risque de crédit

- La pratique du marché est de coter la somme R_f qui rend le contrat du CDS équitable pour les deux parties "A" et "B" à l'instant t où est conclu le CDS:

$$\text{CDS}(t, \mathcal{T}, T, R_f^{\text{mkt}}, Z) = 0.$$

- Les Credit Default Swaps sont aujourd'hui encore les seuls produits liquides sur le marché du risque de crédit.
- Les premières cotations d'options d'achat de CDS en un instant T_o à un prix K , c'est à dire de payoff

$$D(t, T_o)(\text{CDS}(T_o, \mathcal{T}, T, R_f(T_o), Z) - \text{CDS}(T_o, \mathcal{T}, T, K, Z))^+$$

sont apparues début 2003. Elles présentaient néanmoins un bid/ask spread encore très important.

- Il existe par ailleurs des produits de risque de crédits sur plusieurs défauts. Le plus courant est le First-to-Default (FTD) qui paye une somme nominale dès qu'une obligation du panier choisi a fait défaut.

Deuxième partie : Modélisation du marché

Un premier modèle de défaut avec intensité de défaut déterministe

- On considère un processus de Poisson standard ($M_u, u \geq 0$), et l'on se donne une fonction $\gamma(t)$ strictement positive qui est appelée *intensité de défaut* ou *credit spread*. On note :

$$\Gamma(t) = \int_0^t \gamma(s) ds$$

et l'on considère $N_t = M_{\Gamma(t)}$ qui est donc un processus de Poisson inhomogène en temps et d'intensité γ . On modélise alors le temps de défaut τ par le premier saut du processus N_t , si bien que l'on a :

$$\Gamma(\tau) \stackrel{\text{loi}}{=} \exp(1)$$

- Si l'on modélise par ailleurs le taux d'intérêt court r_t par une diffusion $dr_t = \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t$, r est automatiquement indépendant du processus de Poisson N_t , car un mouvement brownien et un processus de Poisson définis sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{G}_t)$ sont indépendants (cf. Bielecki et Rutkowski). Ainsi on a :

$$\Gamma(\tau) \text{ est indépendant de } (r_s, s \geq 0)$$

Quelques remarques sur le modèle

- Avec le modèle ci-dessus, un zéro coupon sans risque de défaut qui assure le paiement de la somme 1 en T vaut en 0:

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^T r_s ds\right)\right]$$

alors qu'un zéro coupon émis par une entreprise susceptible de faire défaut a un payoff en T $1_{\{\tau > T\}}$ et vaut en 0:

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^T r_s ds\right)1_{\{\tau > T\}}\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^T (r_s + \gamma(s)) ds\right)\right]$$

en utilisant l'indépendance de $\Gamma(\tau)$ avec $(r_s, s \geq 0)$ ce qui justifie le nom donné à γ de credit spread.

- Dans notre cas, on va seulement s'intéresser à τ et donc au seul premier saut du processus de Poisson. Néanmoins, certains modèles supposent que le zéro-coupon ne perd pas totalement sa valeur au premier saut et se déprécie au i -ème saut du processus de Poisson d'un facteur q_i (cf. Schönbucher - fractional recovery model-).

Prix du CDS avec intensité déterministe

Rappelons la valeur à l'instant t d'un CDS:

$$\begin{aligned} \text{CDS}(t, \mathcal{T}, T, R_f, Z) = & \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E} \left\{ D(t, \tau) [\tau - T_{\beta(\tau)-1}] R_f \mathbf{1}_{\{\tau < T_n\}} \right. \\ & \left. + \sum_{i=\beta(t)}^n D(t, T_i) \alpha_i R_f \mathbf{1}_{\{\tau > T_i\}} - \mathbf{1}_{\{\tau < T\}} D(t, \tau) Z \middle| \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t \right\} \\ & \mathcal{H}_t = \sigma(\{\tau < u\}, u \leq t) \end{aligned}$$

Calculons par exemple le premier terme:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\{t < \tau\}} \mathbb{E} \left\{ D(t, \tau) (\tau - T_{\beta(\tau)-1}) R_f \mathbf{1}_{\{\tau < T_n\}} \middle| \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t \right\} &= \mathbf{1}_{\{t < \tau\}} \cdot \\ \cdot \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left\{ D(t, \tau) (\tau - T_{\beta(\tau)-1}) R_f \mathbf{1}_{\{\tau < T_n\}} \middle| \mathcal{F}_t \vee \tau \right\} \middle| \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t \right\} &= \\ \mathbf{1}_{\{t < \tau\}} \mathbb{E} \left\{ P(t, \tau) (\tau - T_{\beta(\tau)-1}) R_f \mathbf{1}_{\{\tau < T_n\}} \middle| \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t \right\} &= \\ \mathbf{1}_{\{t < \tau\}} R_f \int_t^{T_n} P(t, u) (u - T_{\beta(u)-1}) d\mathbb{Q}\{\tau \leq u \mid \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t\} &= \\ \mathbf{1}_{\{t < \tau\}} R_f \int_t^{T_n} P(t, u) (T_{\beta(u)-1} - u) d(e^{\Gamma(t) - \Gamma(u)}) & \end{aligned}$$

puisque $\Gamma(\tau) \stackrel{\text{loi}}{=} \exp(1)$.

Et en utilisant les mêmes arguments pour les autres termes, on obtient:

$$\begin{aligned} \text{CDS}(t, \mathcal{T}, T, R_f, Z) = & \\ & \mathbf{1}_{\{t < \tau\}} e^{\Gamma(t)} \left[R_f \int_t^{T_n} P(t, u) (T_{\beta(u)-1} - u) d(e^{-\Gamma(u)}) + \right. \\ & \left. + \sum_{i=\beta(t)}^n P(t, T_i) R_f \alpha_i e^{-\Gamma(T_i)} + Z \int_t^T P(t, u) d(e^{-\Gamma(u)}) \right] \end{aligned}$$

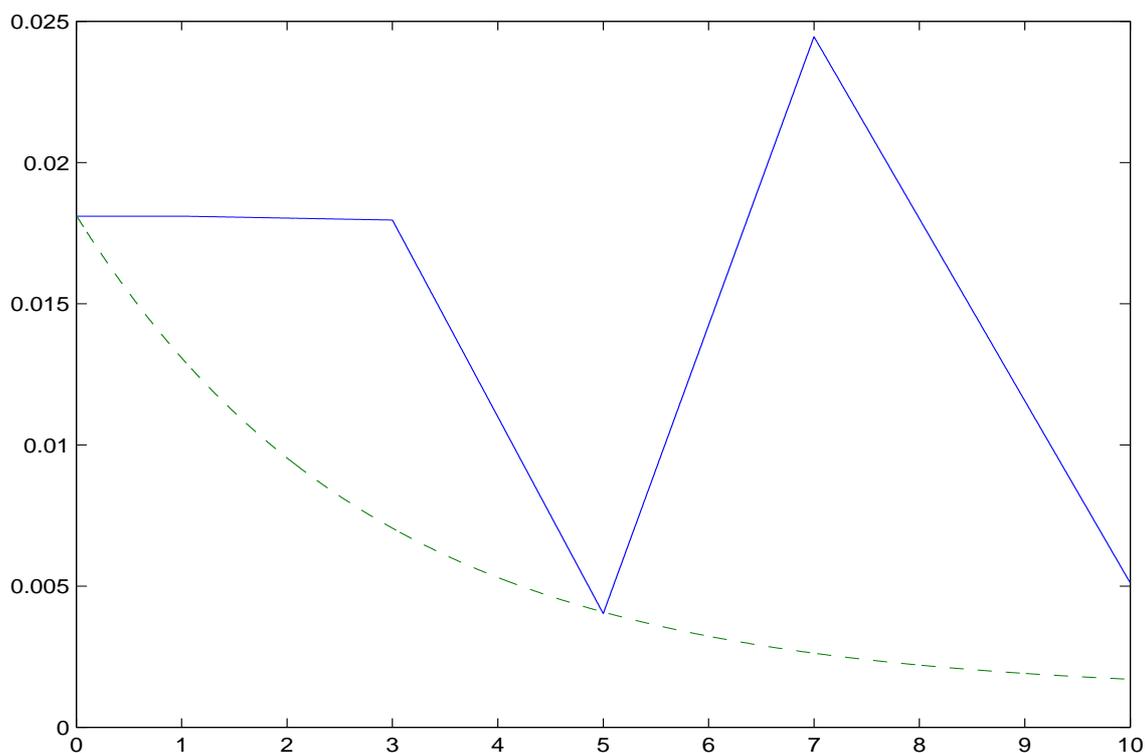
- On remarque que le prix du CDS est indépendant du modèle de taux si celui-ci est calibré de façon à reproduire exactement la courbe des prix des zéro-coupons à l'instant t $P^{\text{mkt}}(t, \cdot)$.
- On souhaite alors calibrer ce modèle à intensité déterministe aux cotations du marché $R_f^{\text{mkt}}(t, T)$ des CDS d'échéance T . Ainsi, on cherche une fonction croissante $\Gamma(\cdot)$ telle que:

$$\text{CDS}(t, \mathcal{T}, T, R_f^{\text{mkt}}(t, T), Z; \Gamma(\cdot)) = 0$$

Comme on ne dispose que de quelques échéances T pour les cotations, il y a bien évidemment de nombreuses fonctions Γ valables. On peut alors supposer pour trouver Γ par exemple que γ est constant par morceaux ou linéaire par morceaux.

Un exemple de calibration

- Calibration avec une intensité linéaire par morceaux avec les R_f observés sur le marché pour Merrill Lynch, aux échéances 1 an, 3 ans, 5 ans, 7ans et 10 ans, le 25/10/02 (courbe en bleu).



- Notons ici que la donnée de l'intensité calibrée est équivalente à la donnée des R_f observés sur le marché. Par conséquent, on désignera par $\Gamma^{\text{mkt}}(\cdot)$ une fonction strictement croissante qui est ainsi calibrée.

Modèle à intensité de défaut stochastique

- Nous allons désormais considérer un modèle avec une intensité de défaut stochastique que l'on note $(\lambda_t, t \geq 0)$, et on pose

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda_s ds.$$

- Soit $(M_u, u \geq 0)$ un processus de Poisson standard indépendant de l'intensité de défaut et du taux d'intérêt, on s'intéresse désormais au processus

$$N_t = M_{\Lambda(t)}$$

appelé *processus de Cox* dont le premier saut τ sera l'instant de défaut. Ainsi, $\xi := \Lambda(\tau)$ est une variable exponentielle de paramètre 1 indépendante de r et λ .

- Dans ce cadre, la filtration "sans-défaut" \mathcal{F}_t contient la filtration engendrée par λ et r et est indépendante de ξ .
- Comme nous souhaitons avoir la possibilité de mettre de la dépendance entre les taux r_t et l'intensité de défaut λ_t , il est nécessaire désormais préciser le modèle de taux que l'on prend.

Modèle de taux : CIR++ (Brigo & Mercurio)

- On écrit le taux court comme la somme d'une fonction déterministe et d'un processus de Cox-Ingersoll-Ross de paramètre $\alpha = (k, \theta, \sigma, x_0^\alpha)$ tel que $x_0^\alpha > 0$ et $2k\theta > \sigma^2$:

$$\begin{aligned} r_t &= \varphi(t; \alpha) + x_t^\alpha \\ dx_t^\alpha &= k(\theta - x_t^\alpha)dt + \sigma \sqrt{x_t^\alpha} dW_t \end{aligned}$$

- $\varphi(\cdot; \alpha)$ est entièrement déterminée par α , car elle est choisie pour calibrer exactement la courbe zéro $P^{\text{mkt}}(t, \cdot)$ observée à l'instant t sur le marché des prix des zéro-coupons:

$$P^{\text{mkt}}(t, T) = \exp \left[- \int_t^T \varphi(s; \alpha) ds \right] \cdot \mathbb{E} \left[e^{- \int_t^T x_u^\alpha du} \right]$$

où

$$\mathbb{E} \left(e^{- \int_t^T x_u^\alpha du} \right) = A(t, T; \alpha) \exp \{ - B(t, T; \alpha) x_t^\alpha \}$$

avec

$$A(t, T; \alpha) = \left[\frac{2h \exp\{(k + h)(T - t)/2\}}{2h + (k + h)(\exp\{(T - t)h\} - 1)} \right]^{2k\theta/\sigma^2},$$

$$B(t, T; \alpha) = \frac{2(\exp\{(T - t)h\} - 1)}{2h + (k + h)(\exp\{(T - t)h\} - 1)},$$

$$h = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}.$$

- Notons que si $\varphi(\cdot; \alpha)$ est positive, le taux d'intérêt r_t est alors positif.
- Avec ce modèle, on dispose de formules analytiques pour le prix des caps (cf. Brigo & Mercurio). La calibration du paramètre α se fait en cherchant le paramètre qui approche le mieux les prix des caps sur le marché (ou plus exactement leurs volatilités) et qui satisfait

$$\varphi(\cdot; \alpha) \geq 0.$$

Modèle pour l'intensité de défaut : CIR++

On prend le même modèle pour l'intensité de défaut, et l'on écrit:

$$\begin{aligned}\lambda_t &= y_t^\beta + \psi(t; \beta), \quad t \geq 0, \\ dy_t^\beta &= \kappa(\mu - y_t^\beta)dt + \nu\sqrt{y_t^\beta}dZ_t,\end{aligned}$$

où $\psi(\cdot; \beta)$ est une fonction déterministe, et le paramètre $\beta = (\kappa, \mu, \nu, y_0^\beta)$ vérifie $2\kappa\mu > \nu^2$ et $y_0^\beta > 0$ pour assurer l'existence et la positivité de y^β . On suppose en outre que le mouvement Brownien Z est corrélé avec W :

$$d\langle W, Z \rangle_t = \rho dt$$

Calibration du Modèle

- Nous nous plaçons dans le cas où $\rho = 0$. Dans ce cas, conditionnellement à $(\lambda_s, s \geq 0)$, le prix du CDS effectué se calcule comme avec l'intensité déterministe et vaut:

$$\mathbf{1}_{\{t < \tau\}} e^{\Lambda(t)} \left[R_f \int_t^{T_n} P(t, u) (T_{\beta(u)-1} - u) d(e^{-\Lambda(u)}) + \sum_{i=\beta(t)}^n P(t, T_i) R_f \alpha_i e^{-\Lambda(T_i)} + Z \int_t^T P(t, u) d(e^{-\Lambda(u)}) \right]$$

et ainsi, le prix du CDS en t $\text{CDS}(t, \mathcal{T}, T, R_f, Z)$ vaut:

$$\mathbf{1}_{\{t < \tau\}} e^{\Lambda(t)} \left[R_f \int_t^{T_n} P(t, u) (T_{\beta(u)-1} - u) d(\mathbb{E}[e^{-\Lambda(u)}]) + \sum_{i=\beta(t)}^n P(t, T_i) R_f \alpha_i \mathbb{E}[e^{-\Lambda(T_i)}] + Z \int_t^T P(t, u) d(\mathbb{E}[e^{-\Lambda(u)}]) \right]$$

- On peut alors calibrer exactement les CDS en choisissant $\psi(\cdot; \beta)$ telle que $\mathbb{E}(e^{\Lambda(t) - \Lambda(u)}) = e^{\Gamma^{\text{mkt}}(t) - \Gamma^{\text{mkt}}(u)}$, $u \geq t$:

$$\exp \left[- \int_t^u \psi(s; \beta) ds \right] \mathbb{E}(e^{-\int_t^u y_s^\beta ds}) = e^{\Gamma^{\text{mkt}}(t) - \Gamma^{\text{mkt}}(u)}$$

où Γ^{mkt} est calibrée au marché comme précédemment.

- Le paramètre β devrait normalement être choisi pour calibrer une option liquide sur le marché du risque de crédit. En l'absence actuelle de tout autre produit liquide, nous avons décidé de "maximiser l'aléa" (qui correspond à la partie homogène en temps) en minimisant la fonction déterministe ψ à partir du critère

$$\int_t^T \psi(s, \beta)^2 ds$$

sous la contrainte $\psi(\cdot, \beta) \geq 0$ afin de garantir la positivité de λ et ainsi l'inversibilité de Λ , importante pour calculer τ .

- Si l'on veut désormais faire une calibration avec ρ éventuellement non nulle, la calibration rigoureuse aux prix des CDS n'est plus faisable facilement.

- Cependant, si l'on fait varier ρ avec différents paramètres β permettant une calibration (i.e. tels que $\psi(\cdot; \beta) \geq 0$), on obtient des écarts de prix de l'ordre de 3 bps ($1bp = 10^{-4}$), alors que l'on a par exemple sur Merrill Lynch un bid/ask spread de l'ordre d'une trentaine de bps:

$$\text{CDS}(0, \mathcal{T}, T, R_f^{\text{BID}}, Z) = -17.14E - 4,$$

$$\text{CDS}(0, \mathcal{T}, T, R_f^{\text{ASK}}, Z) = 17.16E - 4.$$

Par conséquent, on peut considérer que la dépendance en ρ du prix des CDS est négligeable, et qu'ainsi le paramètre β obtenu avec la calibration à ρ nul est correct: il nous faut attendre un produit liquide significativement dépendant de ρ pour pouvoir calibrer ρ correctement.

- Ce résultat est intéressant d'un point de vue pratique: il signifie que les équipes de crédit et de taux peuvent travailler indépendamment.

Prix des CDS en fonction de ρ

Prix des CDS	Valeur calculée par Monte Carlo à 95%
$\rho = -1$	-1.48625E-4 (-1.79586 -1.17664)
$\rho = 0$	0.17708E-4 (-0.142444 0.496605)
$\rho = 1$	1.25475E-4 (0.922997 1.5865)

Avec d'autres paramètres: κ, ν multipliés par 5 et μ par 3 :

Prix des CDS	Valeur calculée par Monte Carlo à 95%
$\rho = -1$	-1.77E-4 (-2.02 -1.51)
$\rho = 0$	0.143E-4 (-0.138 0.424)
$\rho = 1$	1.08E-4 (0.78 1.37)

Table 1: Prix des CDS en fonction de ρ par simulation MC

Avec comme paramètres issus de la calibration:

$$\beta : \quad \kappa = 0.354201, \quad \mu = 0.00121853, \\ \nu = 0.0238186; \quad y_0 = 0.0181,$$

$$\alpha : \quad k = 0.528905, \quad \theta = 0.0319904, \\ \sigma = 0.130035, \quad x_0 = 8.32349 \times 10^{-5}.$$

Fonction ψ issue de la calibration aux données du marchés sur Merrill Lynch

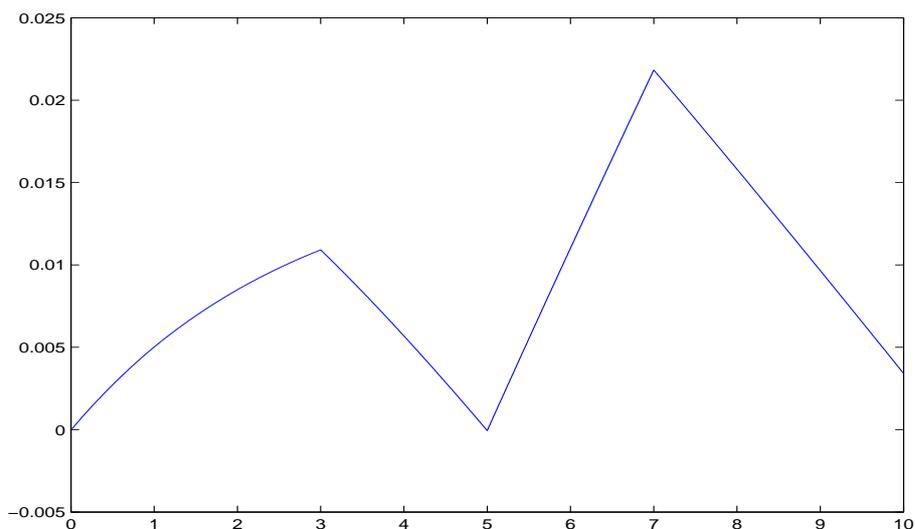


Figure 2: Fonction $\psi(., \beta)$

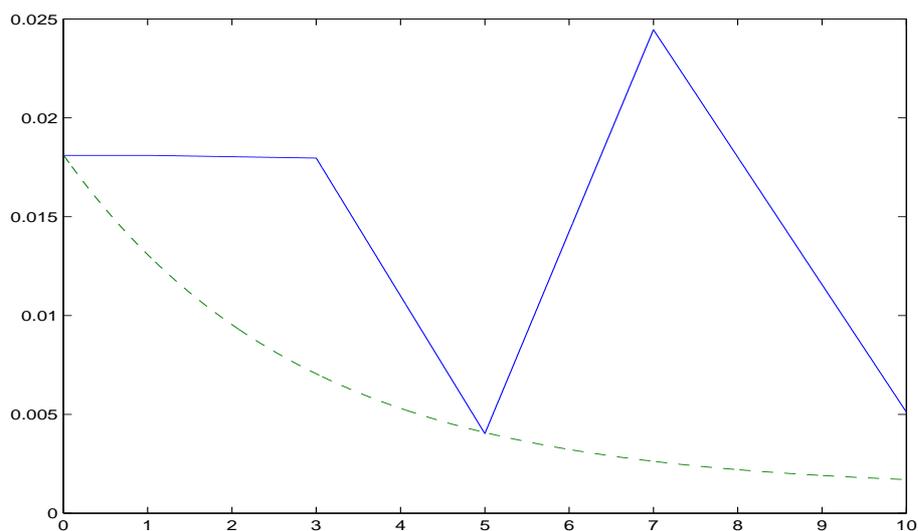


Figure 3: En bleu, intensité $\gamma^{\text{mkt}}(.)$ et en vert $-\frac{d}{dt} \ln(\mathbb{E}[e^{-\int_0^t y_u^\beta du}])$

Troisième partie: Quelques aspects numériques

Remarque sur l'algorithme de Monte-Carlo en risque de crédit

- En général, comme pour les CDS, la variance des produits en risque de crédit est assez élevée à cause de la présence de l'indicatrice

$$I = \mathbf{1}_{\{\tau < T\}}$$

dans les payoffs. Pour se donner une idée du nombre de scénarii à simuler, l'écart-type de I avec les données de Merrill-Lynch à $T = 5$ ans est de 0.2551, et il est nécessaire de faire de l'ordre de 10^7 scénarii pour avoir une précision à un basis point.

- Outre les méthodes standards de réduction de variance (variables de contrôle), on peut, dans le cas du CDS améliorer la situation, en suivant l'heuristique que "seuls les scénarii où il y a un défaut sont intéressants".

- Rappelons le payoff du CDS à l'instant 0:

$$DCDS := [D(0, \tau)(\tau - T_{\beta(\tau)-1})R_f \mathbf{1}_{\{\tau < T_n\}} + \sum_{i=1}^n D(0, T_i)\alpha_i R_f \mathbf{1}_{\{\tau > T_i\}} - \mathbf{1}_{\{\tau < T\}} D(0, \tau) Z]$$

- Sur $\{\tau > T\}$, ce payoff s'écrit simplement:

$$DCDS^{\tau > T} := \sum_{i=1}^n D(0, T_i)\alpha_i R_f$$

- On considère alors une barrière \bar{B} telle que

$$\mathbb{Q}(\Lambda(T) < \bar{B}) \simeq 1$$

et on considère alors qu'un défaut ne peut intervenir sur $[0, T]$ que si $\{\xi := \Lambda(\tau) < \bar{B}\}$ (ce qui est vrai sur $\{\Lambda(T) < \bar{B}\}$ puisque Λ est croissante). On écrit alors:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[DCDS] &= \mathbb{E}[DCDS | \xi < \bar{B}](1 - e^{-\bar{B}}) \\ &\quad + \mathbb{E}[DCDS | \xi \geq \bar{B}]e^{-\bar{B}} \end{aligned}$$

Et $\mathbb{E}[DCDS | \xi \geq \bar{B}] \simeq \mathbb{E}[DCDS^{\tau > T} | \xi \geq \bar{B}] = \sum_{i=1}^n P(0, T_i)\alpha_i R_f$ par indépendance de ξ .

- Il est ainsi suffisant de calculer par Monte-Carlo le terme

$$\mathbb{E}[DCDS|\xi < \bar{B}]$$

ce qui se fait en simulant r, λ et une loi exponentielle conditionnée à être plus petite que \bar{B} , c'est à dire de densité:

$$1_{\{u < \bar{B}\}} e^{-u} / (1 - e^{-\bar{B}}) du$$

- Par rapport à un Monte-Carlo sur $\mathbb{E}[DCDS]$, on divise le nombre de scénarii nécessaires à une précision donnée par $1/(1 - e^{-\bar{B}})$ qui vaut de l'ordre de 10 dans le cas étudié de Merrill Lynch avec $T = 5$ ans.
- Cette méthode peut être étendue à tout payoff dont la valeur sur $\{\tau > T\}$ est indépendante de ξ et peut être calculée analytiquement.
- L'erreur commise est en $O(1 - \mathbb{Q}(\Lambda(T) < \bar{B}))$ pour un payoff borné.

Formules analytiques approchées

Lorsque $\rho \neq 0$, nous ne disposons pas de formule analytique pour le CDS dont la valeur en 0 s'écrit:

$$\begin{aligned}
 R_f \int_0^{T_n} \mathbb{E}[\exp(-\int_0^u (r_s + \lambda_s) ds) \lambda_u] (u - T_{\beta(u)-1}) du \\
 + \sum_{i=1}^n \alpha_i R_f \mathbb{E}[\exp(-\int_0^{T_i} (r_s + \lambda_s) ds)] \\
 - Z \int_0^T \mathbb{E}[\exp(-\int_0^u (r_s + \lambda_s) ds) \lambda_u] du,
 \end{aligned}$$

et de manière générale, il peut être intéressant de connaître une formule analytique, même approchée, de la valeur des payoffs élémentaires $D(0, T)\mathbf{1}_{\{\tau > T\}}$ et $D(0, \tau)\mathbf{1}_{\{\tau < T\}}$:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}[\exp(-\int_0^T (r_s + \lambda_s) ds)] \\
 & \int_0^T \mathbb{E}[\exp(-\int_0^u (r_s + \lambda_s) ds) \lambda_u] du
 \end{aligned}$$

- Pour cela, il nous faut être capable de calculer:

$$h_1^{CIR}(\rho; \alpha, \beta) := \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^T (x_s^\alpha + y_s^\beta) ds \right) \right]$$

$$h_2^{CIR}(\rho; \alpha, \beta) := \mathbb{E} \left[y_T^\beta \exp \left(- \int_0^T (x_s^\alpha + y_s^\beta) ds \right) \right]$$

- On dispose de formule pour $\rho = 0$, et l'on peut essayer l'approximation:

$$h_i^{CIR}(\rho; \alpha, \beta) \approx h_i^{CIR}(0; \alpha, \beta) + h_i^V(\rho; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) - h_i^V(0; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$$

où $h_i^V(\rho; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ désigne la fonction analogue à $h_i^{CIR}(\rho; \alpha, \beta)$ calculée avec des processus de Vasicek $\tilde{x}^{\tilde{\alpha}}$ et $\tilde{y}^{\tilde{\beta}}$ de paramètres $\tilde{\alpha} = (\tilde{x}_0^{\tilde{\alpha}}, \tilde{k}, \tilde{\theta}, \tilde{\sigma})$ et $\tilde{\beta} = (\tilde{y}_0^{\tilde{\beta}}, \tilde{\kappa}, \tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ ¹. Les fonctions $h_1^V(\rho; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ et $h_2^V(\rho; \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ ont des formules analytiques.

- Etant donnés les rôles analogues joués par les 3 premiers paramètres dans les deux modèles, on prend:

$$\tilde{\alpha} = (x_0^\alpha, k, \theta, \tilde{\sigma}) \quad , \quad \tilde{\beta} = (y_0^\beta, \kappa, \mu, \tilde{\nu})$$

¹ $d\tilde{x}_t = \tilde{k}(\tilde{\theta} - \tilde{x}_t)dt + \tilde{\sigma}dW_t$ et $d\tilde{y}_t = \tilde{\kappa}(\tilde{\mu} - \tilde{y}_t)dt + \tilde{\nu}dW_t$

- On choisit alors $\tilde{\sigma}$ et $\tilde{\nu}$ tels que:

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^T \tilde{x}_s^{\tilde{\alpha}} ds \right) \right] = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^T x_s^{\alpha} ds \right) \right]$$

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^T \tilde{y}_s^{\tilde{\beta}} ds \right) \right] = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^T y_s^{\beta} ds \right) \right]$$

- Tests numériques:

$$(k, \theta, \sigma, x_0^{\alpha}) = (0.5289, 0.03199, 0.13, 8.323E - 5)$$

$$(\kappa, \mu, \nu, y_0^{\beta}) = (0.3542, 0.00122, 0.0238, 0.0181)$$

	MC	Approx
$\rho = -1$	0.86191	0.86176
$\rho = 1$	0.8624	0.86255

Table 2: Approximation pour h_1

	MC	Approx
$\rho = -1$	3.585 E-3	3.598 E-3
$\rho = 1$	3.449E-3	3.432E-3

Table 3: Approximation pour h_2

Remarque sur la simulation du CIR

- Pour simuler un processus CIR x de paramètre $\alpha = (x_0, k, \theta, \sigma)$ sur $[0, 1]$, la première idée est de se donner une discrétisation $(t_i = i/n, i = 0, \dots, n)$, et de considérer le schéma d'Euler (explicite):

$$\hat{x}_{t_{i+1}} - \hat{x}_{t_i} = k(\theta - \hat{x}_{t_i})/n + \sigma \sqrt{\hat{x}_{t_i}}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

- Malheureusement, ce schéma peut conduire à des valeurs négatives, même si $\sigma^2 < 2k\theta$.
- Pour pallier à ce problème, on peut, lorsque $\hat{x}_{t_{i+1}} < 0$ discrétiser plus finement sur $[t_i, t_{i+1}]$ afin de "retrouver" la positivité assurée dans le cas continu.
- Delbaen et Deelstra proposent de remplacer \sqrt{x} par $\sqrt{x\mathbf{1}_{x>0}}$ et considèrent:

$$\hat{x}_{t_{i+1}} - \hat{x}_{t_i} = k(\theta - \hat{x}_{t_i})/n + \sigma \sqrt{\hat{x}_{t_i} \mathbf{1}_{\hat{x}_{t_i} > 0}}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

\hat{x}_{t_i} peut toujours être négatif, mais cela ne pose plus de problème pour le calcul de $\hat{x}_{t_{i+1}}$. On peut en outre considérer $(\hat{x}_{t_i})^+$ au lieu de \hat{x}_{t_i} si la positivité est indispensable (notamment pour inverser dans notre cas Λ).

- Comme le processus x_t vérifie:

$$\begin{aligned}
x_t &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{t_i < t} \frac{k}{n} (\theta - x_{t_i}) + \sigma \sqrt{x_{t_i}} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{t_i < t} \frac{k}{n} (\theta - x_{t_{i+1}}) + \sigma \sqrt{x_{t_{i+1}}} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \right. \\
&\quad \left. - \sigma (\sqrt{x_{t_{i+1}}} - \sqrt{x_{t_i}}) (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{t_i < t} \frac{1}{n} (k\theta - \frac{\sigma^2}{2} - kx_{t_{i+1}}) + \sigma \sqrt{x_{t_{i+1}}} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \right]
\end{aligned}$$

(en utilisant $d\langle \sqrt{x}, W \rangle_t = \sigma dt/2$), on regarde le schéma d'Euler implicite:

$$\tilde{x}_{t_{i+1}} = \tilde{x}_{t_i} + \frac{1}{n} (k\theta - \sigma^2/2 - k\tilde{x}_{t_{i+1}}) + \sigma \sqrt{\tilde{x}_{t_{i+1}}} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

et si $k\theta > \sigma^2/2$, $\sqrt{\tilde{x}_{t_{i+1}}}$ est l'unique racine positive d'un polynôme de degré 2 et peut être calculée explicitement. Outre la positivité des $\tilde{x}_{t_{i+1}}$, ce schéma assure également que si $\tilde{x}_{t_0} \leq \tilde{x}'_{t_0}$, alors $\tilde{x}_{t_i} \leq \tilde{x}'_{t_i}$ pour un même brownien, propriété que l'on a dans le cas continu.