Utilisation de résultats d'unicité de solutions très faibles pour l'étude de la convergence de schémas numériques vers la solution d'équations paraboliques dégénérées

R. Eymard, Université de Marne-la-Vallée

Cermics, novembre 2003

Plan

1. Motivations
2. Schéma de volumes finis
3. Résultats de convergence et compacité
4. Résultat d'unicité

Plan

1. Motivations

2. Schéma de volumes finis

3. Résultats de convergence et compacité

4. Résultat d'unicité

Un problème posé à l'ENPC

problème périodique parabolique/ hyperbolique linéaire

Cermics, novembre 2003

Un problème posé à l'ENPC

problème périodique parabolique/ hyperbolique linéaire

$u_t + u_x - u_{xx} = 0$ sur $(0,1) \times (0,T)$

$u_t + u_x = 0$ sur $(1,2) \times (0,T)$

$u(1^-,t) - u_x(1^-,t) = u(1^+,t)$ et
$u(2^-,t) = u(0^+,t) - u_x(0^+,t)$ sur $(0,T)$

$u(x,0) = u_0(x)$ sur $(0,2)$

Un problème posé à l'ENPC

problème périodique parabolique/ hyperbolique linéaire

$u_t + u_x - u_{xx} = 0$ sur $(0,1) \times (0,T)$

$u_t + u_x = 0$ sur $(1,2) \times (0,T)$

$u(1^-,t) - u_x(1^-,t) = u(1^+,t)$ et
$u(2^-,t) = u(0^+,t) - u_x(0^+,t)$ sur $(0,T)$

$u(x,0) = u_0(x)$ sur $(0,2)$

sens faible nécessaire

Un problème posé à l'ENPC

problème périodique parabolique/ hyperbolique linéaire

$u_t + u_x - u_{xx} = 0$ sur $(0,1) \times (0,T)$

$u_t + u_x = 0$ sur $(1,2) \times (0,T)$

$u(1^-,t) - u_x(1^-,t) = u(1^+,t)$ et
$u(2^-,t) = u(0^+,t) - u_x(0^+,t)$ sur $(0,T)$

$u(x,0) = u_0(x)$ sur $(0,2)$

sens faible nécessaire
n'assure pas unicité (Quarteroni, Ern, Lelièvre)

Un problème posé à l'ENPC

problème périodique parabolique/ hyperbolique linéaire

$u_t + u_x - u_{xx} = 0$ sur $(0,1) \times (0,T)$

$u_t + u_x = 0$ sur $(1,2) \times (0,T)$

$u(1^-,t) - u_x(1^-,t) = u(1^+,t)$ et
$u(2^-,t) = u(0^+,t) - u_x(0^+,t)$ sur $(0,T)$

$u(x,0) = u_0(x)$ sur $(0,2)$

sens faible nécessaire
n'assure pas unicité (Quarteroni, Ern, Lelièvre)
limite de solution visqueuse : quel sens faible ?

Une formulation faible avec conditions aux limites pour un pb hyperbolique

Une formulation faible avec conditions aux limites pour un pb hyperbolique

$u_t + u_x = 0$ dans $(0, 1) \times (0, T)$

$u(0, t) = \bar{u}(t)$ sur $(0, T)$

$u(x, 0) = u_0(x)$ p.p. $x \in \Omega$

Une formulation faible avec conditions aux limites pour un pb hyperbolique

$u_t + u_x = 0$ dans $(0,1) \times (0,T)$

$u(0,t) = \bar{u}(t)$ sur $(0,T)$

$u(x,0) = u_0(x)$ p.p. $x \in \Omega$

première formulation faible

$\int_0^T \int_0^1 u(x,t)\ (\varphi_t(x,t) + \varphi_x(x,t))dxdt +$
$\int_0^1 u_0(x)\ \varphi(x,0)dx + \int_0^T \bar{u}(t)\ \varphi(0,t)dt = 0$

pour tout φ tq $\varphi(.,T) = \varphi(1,.) = 0$

Une formulation faible avec conditions aux limites pour un pb hyperbolique

$u_t + u_x = 0$ dans $(0,1) \times (0,T)$

$u(0,t) = \bar{u}(t)$ sur $(0,T)$

$u(x,0) = u_0(x)$ p.p. $x \in \Omega$

première formulation faible

$\int_0^T \int_0^1 u(x,t)\ (\varphi_t(x,t) + \varphi_x(x,t))dxdt +$
$\int_0^1 u_0(x)\ \varphi(x,0)dx + \int_0^T \bar{u}(t)\ \varphi(0,t)dt = 0$

pour tout φ tq $\varphi(.,T) = \varphi(1,.) = 0$

inconvénient : pas le droit de prendre $\varphi(1,.) \neq 0$

ne convient donc pas au problème ENPC...

Deuxième formulation faible

Deuxième formulation faible

demies-entropies de Krushkov

$(x-\kappa)^+ = \max(x-\kappa, 0)$ et $(x-\kappa)^- = \max(\kappa - x, 0)$

Deuxième formulation faible

demies-entropies de Krushkov

$(x-\kappa)^+ = \max(x-\kappa, 0)$ et $(x-\kappa)^- = \max(\kappa - x, 0)$

$$\int_0^T \int_0^1 (u-\kappa)^\pm(\varphi_t + \varphi_x)dxdt +$$
$$\int_0^1 (u_0-\kappa)^\pm \varphi(x,0)dx +$$
$$\int_0^T (\bar{u}-\kappa)^\pm \varphi(0,t)dt + \int_0^T (\tilde{u}-\kappa)^\pm \varphi(1,t)dt \geq 0$$

pour tout $\varphi \geq 0$ tq $\varphi(.,T) = 0$

formulations de Otto, Vovelle, Gallouët

Deuxième formulation faible

demies-entropies de Krushkov

$(x-\kappa)^+ = \max(x-\kappa, 0)$ et $(x-\kappa)^- = \max(\kappa - x, 0)$

$$\int_0^T \int_0^1 (u-\kappa)^\pm (\varphi_t + \varphi_x) dx dt +$$
$$\int_0^1 (u_0 - \kappa)^\pm \varphi(x,0) dx +$$
$$\int_0^T (\bar{u} - \kappa)^\pm \varphi(0,t) dt + \int_0^T (\tilde{u} - \kappa)^\pm \varphi(1,t) dt \geq 0$$

pour tout $\varphi \geq 0$ tq $\varphi(.,T) = 0$

formulations de Otto, Vovelle, Gallouët

existence, unicité indépendante de $\tilde{u}$

la définition est devenue non linéaire

Prop. de form. faible pour le pb ENPC

Prop. de form. faible pour le pb ENPC

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_0^2 \eta(u)(\varphi_t + \varphi_x)dxdt \qquad +$$
$$\int_0^2 \eta(u_0(x))\varphi(x,0)dx \qquad -$$
$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_0^1 [\eta(u)_x\varphi_x + \eta''(u)(u_x)^2\varphi]dxdt \quad \geq 0$$

pour tout $\eta \in C^2(\mathbb{R})$, $\eta'' \geq 0$
et $\varphi \in C^1([0,2] \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ avec
$\varphi(\cdot, T) = 0$, $\varphi(0,\cdot) = \varphi(2,\cdot)$

Prop. de form. faible pour le pb ENPC

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_0^2 \eta(u)(\varphi_t+\varphi_x)dxdt \quad +$$
$$\int_0^2 \eta(u_0(x))\varphi(x,0)dx \quad -$$
$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_0^1 [\eta(u)_x\varphi_x+\eta''(u)(u_x)^2\varphi]dxdt \quad \geq 0$$

pour tout $\eta \in C^2(\mathbb{R})$, $\eta'' \geq 0$
et $\varphi \in C^1([0,2]\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ avec
$\varphi(\cdot,T)=0$, $\varphi(0,\cdot)=\varphi(2,\cdot)$

formulation non linéaire...

Prop. de form. faible pour le pb ENPC

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_0^2 \eta(u)(\varphi_t + \varphi_x) dx dt \quad +$$
$$\int_0^2 \eta(u_0(x))\varphi(x,0) dx \quad -$$
$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_0^1 [\eta(u)_x \varphi_x + \eta''(u)(u_x)^2 \varphi] dx dt \quad \geq 0$$

pour tout $\eta \in C^2(\mathbb{R})$, $\eta'' \geq 0$
et $\varphi \in C^1([0,2] \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ avec
$\varphi(\cdot, T) = 0$, $\varphi(0, \cdot) = \varphi(2, \cdot)$

formulation non linéaire... et quelques points non résolus

Modèles physiques paraboliques/hyperboliques

Ecoulement diphasique en milieu poreux
réaction diffusion en milieu poreux

Cermics, novembre 2003

Modèles physiques paraboliques/hyperboliques

Ecoulement diphasique en milieu poreux
réaction diffusion en milieu poreux

$$u_t + \mathrm{div}(\mathbf{q}\ f(u)) - \Delta\varphi(u) = 0 \text{ dans } \Omega \times (0,T)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \text{ p.p. } x \in \Omega$$

$$u = \bar{u} \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T)$$

Hypothèses

Hypothèses

Ω polygonal

Hypothèses

Ω polygonal
$u_I \leq u_0 \leq u_S$ p.p. dans Ω
$u_I \leq \bar{u} \leq u_S$ p.p. dans $\partial\Omega \times (0,T)$,
$\bar{u}$ trace d'une fonction de $H^1(\Omega \times (0,T)) \cap L^\infty(\Omega \times (0,T))$

Hypothèses

Ω polygonal
$u_I \leq u_0 \leq u_S$ p.p. dans Ω
$u_I \leq \bar{u} \leq u_S$ p.p. dans $\partial\Omega \times (0,T)$,
$\bar{u}$ trace d'une fonction de $H^1(\Omega \times (0,T)) \cap L^\infty(\Omega \times (0,T))$
φ Lipschitz-continue croissante (sens large)
ζ telle que $\zeta' = \sqrt{\varphi'}$

Hypothèses

Ω polygonal
$u_I \leq u_0 \leq u_S$ p.p. dans Ω
$u_I \leq \bar{u} \leq u_S$ p.p. dans $\partial\Omega \times (0,T)$,
$\bar{u}$ trace d'une fonction de $H^1(\Omega \times (0,T)) \cap L^\infty(\Omega \times (0,T))$
φ Lipschitz-continue croissante (sens large)
ζ telle que $\zeta' = \sqrt{\varphi'}$
$f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f' \geq 0$

Hypothèses

Ω polygonal
$u_I \leq u_0 \leq u_S$ p.p. dans Ω
$u_I \leq \bar{u} \leq u_S$ p.p. dans $\partial\Omega \times (0,T)$,
$\bar{u}$ trace d'une fonction de $H^1(\Omega \times (0,T)) \cap L^\infty(\Omega \times (0,T))$
φ Lipschitz-continue croissante (sens large)
ζ telle que $\zeta' = \sqrt{\varphi'}$
$f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f' \geq 0$
$\mathrm{div}\mathbf{q} = 0$ dans $\Omega \times (0,T)$, $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega \times (0,T)$

Propriétés continues

Cermics, novembre 2003

Propriétés continues

cas $\varphi = 0$, problème scalaire hyperbolique non linéaire

Propriétés continues

cas $\varphi = 0$, problème scalaire hyperbolique non linéaire
même pour u_0 régulier, chocs apparaissent
solution faible non unique
unicité de la solution faible entropique

Propriétés continues

cas $\varphi = 0$, problème scalaire hyperbolique non linéaire
même pour u_0 régulier, chocs apparaissent
solution faible non unique
unicité de la solution faible entropique
u_ε sol. de $u_t + \mathrm{div}(\mathbf{q}\ f(u)) - \varepsilon\Delta u = 0$
$u =$ limite de u_ε quand $\varepsilon \to 0$

Propriétés continues

cas $\varphi = 0$, problème scalaire hyperbolique non linéaire
même pour u_0 régulier, chocs apparaissent
solution faible non unique
unicité de la solution faible entropique
u_ε sol. de $u_t + \mathrm{div}(\mathbf{q}\ f(u)) - \varepsilon \Delta u = 0$
$u =$ limite de u_ε quand $\varepsilon \to 0$

cas $f = 0$, φ t.q. $\exists a, \varphi'(a) = 0$
pb parab. dégénéré : sol. faible unique

Propriétés continues

cas $\varphi = 0$, problème scalaire hyperbolique non linéaire
même pour u_0 régulier, chocs apparaissent
solution faible non unique
unicité de la solution faible entropique
u_ε sol. de $u_t + \mathrm{div}(\mathbf{q}\ f(u)) - \varepsilon \Delta u = 0$
$u =$ limite de u_ε quand $\varepsilon \to 0$

cas $f = 0$, φ t.q. $\exists a, \varphi'(a) = 0$
pb parab. dégénéré : sol. faible unique
ne suffit pas à l'unicité de u si f non linéaire

Propriétés continues

cas $\varphi = 0$, problème scalaire hyperbolique non linéaire
même pour u_0 régulier, chocs apparaissent
solution faible non unique
unicité de la solution faible entropique
u_ε sol. de $u_t + \mathrm{div}(\mathbf{q}\, f(u)) - \varepsilon \Delta u = 0$
$u =$ limite de u_ε quand $\varepsilon \to 0$

cas $f = 0$, φ t.q. $\exists a, \varphi'(a) = 0$
pb parab. dégénéré : sol. faible unique
ne suffit pas à l'unicité de u si f non linéaire

nécessité d'un sens entropique pour l'équation entière

Solution faible entropique (Krushkov, Carrillo)

Solution faible entropique (Krushkov, Carrillo)

$u \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$

Solution faible entropique (Krushkov, Carrillo)

$u \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$
$\varphi(u) - \varphi(\bar{u}) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$

Solution faible entropique (Krushkov, Carrillo)

$u \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$
$\varphi(u) - \varphi(\bar{u}) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$

$\forall\ \psi \in \mathcal{D}^+(\Omega \times [0,T)),\ \forall \kappa \in \mathbb{R},$

$$\int_{\Omega\times(0,T)} \left[\begin{array}{l} |u-\kappa|\ \psi_t + \\ (f(u\top\kappa) - f(u\bot\kappa))\ \mathbf{q}\cdot\nabla\psi \\ -\nabla|\varphi(u)-\varphi(\kappa)|\cdot\nabla\psi \end{array} \right] dxdt\ \ + \int_\Omega |u_0(x)-\kappa|\psi(x,0)dx \geq 0$$

où $a\top b = \max(a,b)$, $a\bot b = \min(a,b)$

Solution faible entropique (Krushkov, Carrillo)

$u \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$
$\varphi(u) - \varphi(\bar{u}) \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$

$\forall\ \psi \in \mathcal{D}^+(\Omega \times [0,T))$, $\forall \kappa \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\Omega\times(0,T)} \left[\begin{array}{l} |u-\kappa|\ \psi_t + \\ (f(u\top\kappa) - f(u\perp\kappa))\ \mathbf{q}\cdot\nabla\psi \\ -\nabla|\varphi(u)-\varphi(\kappa)|\cdot\nabla\psi \end{array} \right] dxdt \quad + $$
$$\int_\Omega |u_0(x)-\kappa|\psi(x,0)dx \qquad \geq 0$$

où $a\top b = \max(a,b)$, $a\perp b = \min(a,b)$

Carrillo: $\exists$ une et une seule sol.faible.ent.

Solution faible entropique (Krushkov, Carrillo)

$u \in L^\infty(\Omega \times (0,T))$
$\varphi(u) - \varphi(\bar{u}) \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$

$\forall\ \psi \in \mathcal{D}^+(\Omega \times [0,T))$, $\forall \kappa \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\Omega\times(0,T)} \left[\begin{array}{l} |u-\kappa|\ \psi_t + \\ (f(u\top\kappa) - f(u\perp\kappa))\ \mathbf{q}\cdot\nabla\psi \\ -\nabla|\varphi(u)-\varphi(\kappa)|\cdot\nabla\psi \end{array} \right] dxdt \ + $$
$$\int_\Omega |u_0(x)-\kappa|\psi(x,0)dx \qquad \geq 0$$

où $a\top b = \max(a,b)$, $a\perp b = \min(a,b)$

Carrillo: $\exists$ une et une seule sol.faible.ent.
demies-entropies si conditions à la limite

Comment atteindre u comme limite d'un schéma numérique ?

Comment atteindre u comme limite d'un schéma numérique ?

problème analoque : limite de u_ε sol. de
$u_t + \mathrm{div}(\mathbf{q}\ f(u)) - \Delta(\varphi(u) + \varepsilon u) = 0$

Comment atteindre u comme limite d'un schéma numérique ?

problème analoque : limite de u_ε sol. de
$u_t + \mathrm{div}(\mathbf{q}\ f(u)) - \Delta(\varphi(u) + \varepsilon u) = 0$

Quelles estimations fortes ?

Comment atteindre u comme limite d'un schéma numérique ?

problème analoque : limite de u_ε sol. de
$u_t + \mathrm{div}(\mathbf{q}\ f(u)) - \Delta(\varphi(u) + \varepsilon u) = 0$

Quelles estimations fortes ?
terme parabolique $\longrightarrow$ convergence forte de $\varphi(u_\varepsilon)$, pas de u_ε

Comment atteindre u comme limite d'un schéma numérique ?

problème analoque : limite de u_ε sol. de
$u_t + \mathrm{div}(\mathbf{q}\ f(u)) - \Delta(\varphi(u) + \varepsilon u) = 0$

Quelles estimations fortes ?
terme parabolique $\longrightarrow$ convergence forte de $\varphi(u_\varepsilon)$, pas de u_ε
est. fortes ds le cadre hyperbolique: estimations BV
ne marchent pas sur maillage déstructuré et u_0 non BV

Comment atteindre u comme limite d'un schéma numérique ?

problème analoque : limite de u_ε sol. de
$u_t + \mathrm{div}(\mathbf{q}\ f(u)) - \Delta(\varphi(u) + \varepsilon u) = 0$

Quelles estimations fortes ?
terme parabolique $\longrightarrow$ convergence forte de $\varphi(u_\varepsilon)$, pas de u_ε
est. fortes ds le cadre hyperbolique: estimations BV
ne marchent pas sur maillage déstructuré et u_0 non BV

méthode : atteindre un sens plus faible
résultat d'unicité sens plus faible $\Rightarrow$ convergence forte
Di Perna : sens mesures d'Young

Plan

1. Motivations

2. Schéma de volumes finis

3. Résultats de convergence et compacité

4. Résultat d'unicité

Equations de conservation

Cermics, novembre 2003

Equations de conservation

$$A_t + \mathrm{div} F = R$$

Cermics, novembre 2003

Equations de conservation

$$A_t + \mathrm{div} F = R$$

Principe de la méthode:

Equations de conservation

$$A_t + \mathrm{div} F = R$$

Principe de la méthode:

Intégration des équations de conservation
dans une partition du domaine
durant chaque pas de temps

Equations de conservation

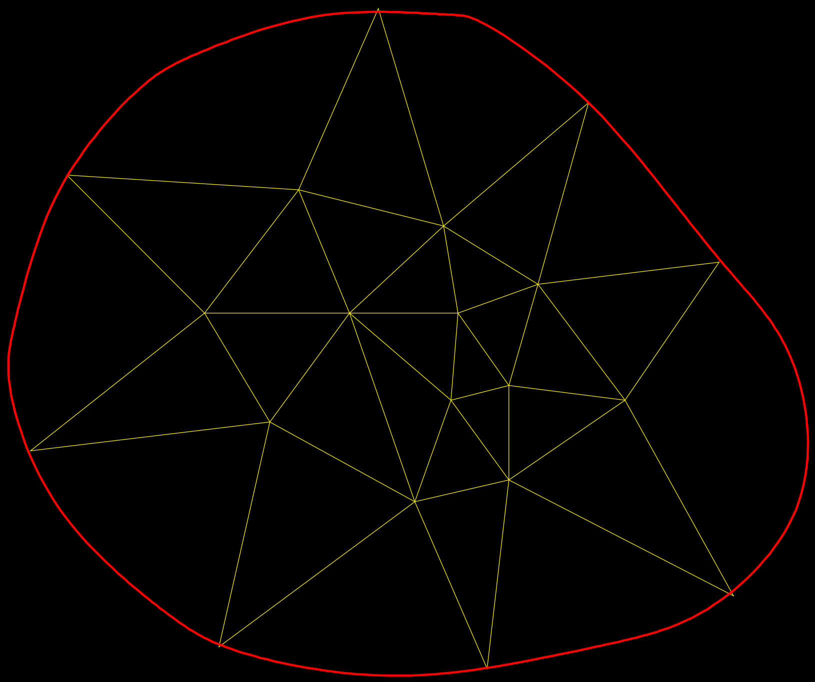
$$A_t + \mathrm{div} F = R$$

Principe de la méthode:

Intégration des équations de conservation
dans une partition du domaine
durant chaque pas de temps

partition du domaine = maillage

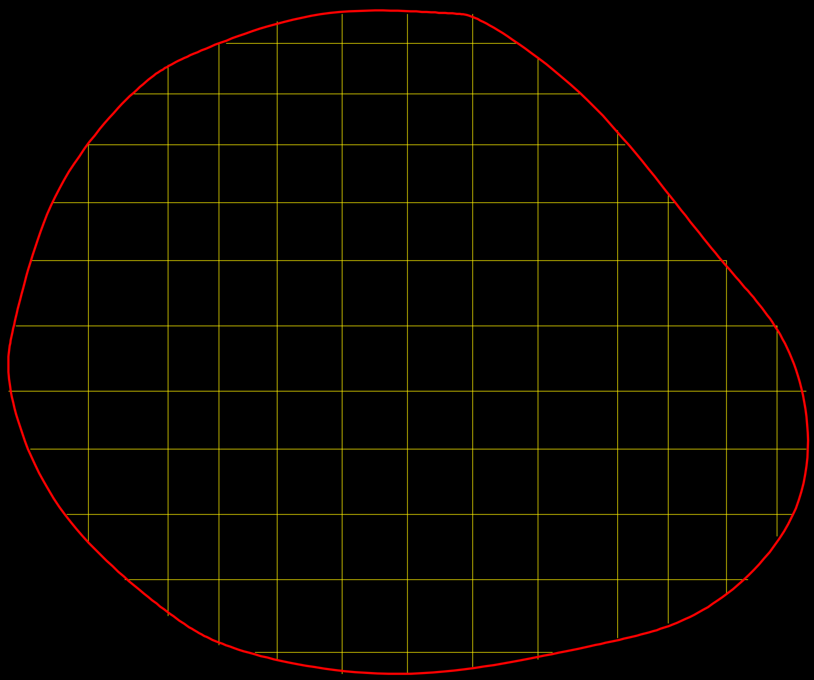
Maillages triangulaires



Cermics, novembre 2003

Maillages rectangulaires

très employés en CFD et en ingénierie pétrolière



Cermics, novembre 2003

Schémas de volumes finis

Cermics, novembre 2003

Schémas de volumes finis

$$m_K \frac{A_K^{(n+1)} - A_K^{(n)}}{\delta t} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma}^{(n+1)} = m_K R_K^{(n+1)}$$

Schémas de volumes finis

$$m_K \frac{A_K^{(n+1)} - A_K^{(n)}}{\delta t} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma}^{(n+1)} = m_K R_K^{(n+1)}$$

consistance :

$F_{K,\sigma}^{(n+1)}$ approx. de $\displaystyle \frac{1}{\delta t} \int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \int_\sigma F \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} ds dt$

Schémas de volumes finis

$$m_K \frac{A_K^{(n+1)} - A_K^{(n)}}{\delta t} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} F_{K,\sigma}^{(n+1)} = m_K R_K^{(n+1)}$$

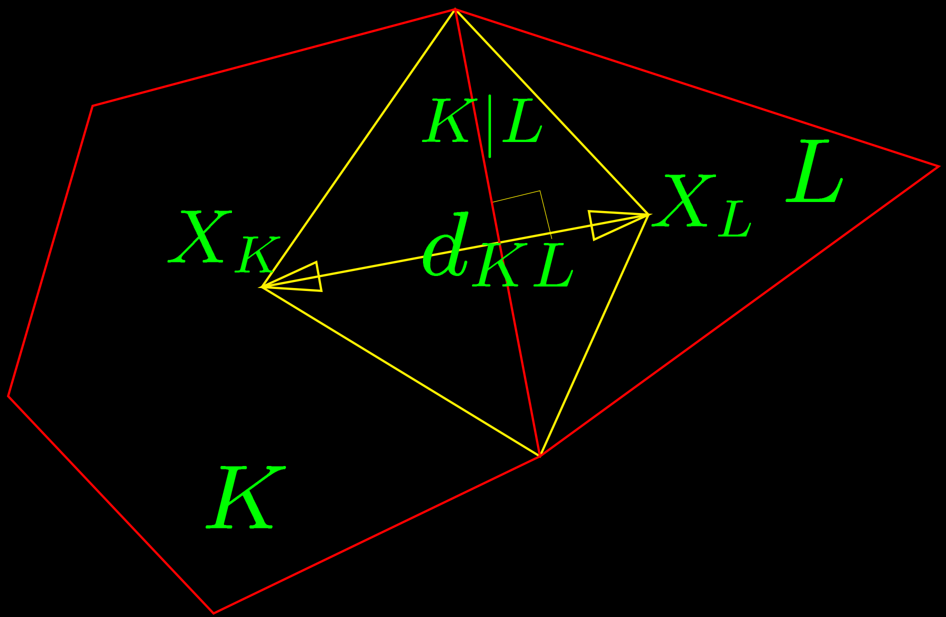
consistance :

$F_{K,\sigma}^{(n+1)}$ approx. de $\dfrac{1}{\delta t} \displaystyle\int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \int_\sigma F \cdot \mathbf{n}_{K,\sigma} ds dt$

conservation locale :

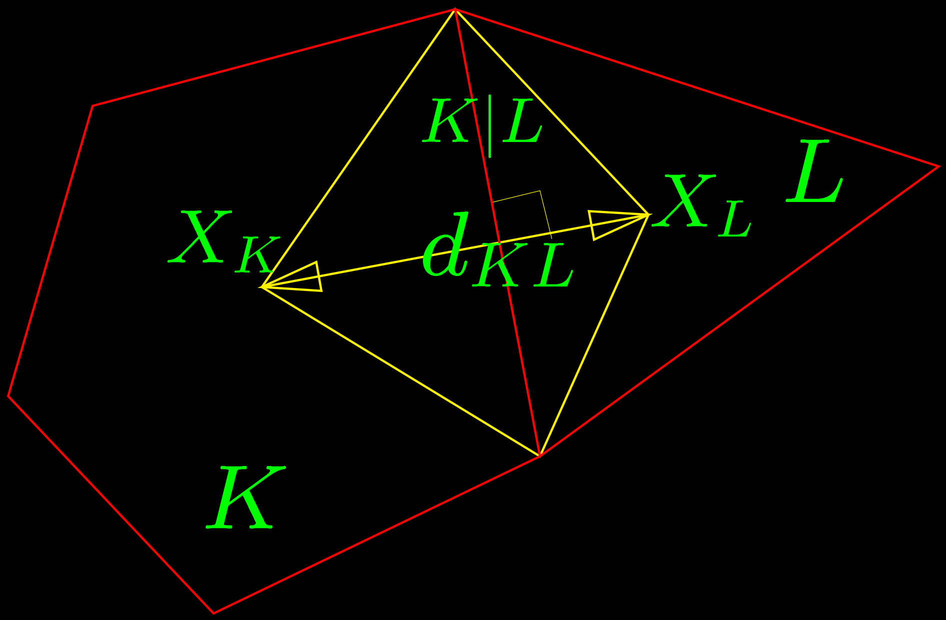
if $\sigma = K|L$, $F_{K,\sigma}^{(n+1)} = -F_{L,\sigma}^{(n+1)}$

Approximation du gradient par différences finies



Approximation du gradient par différences finies

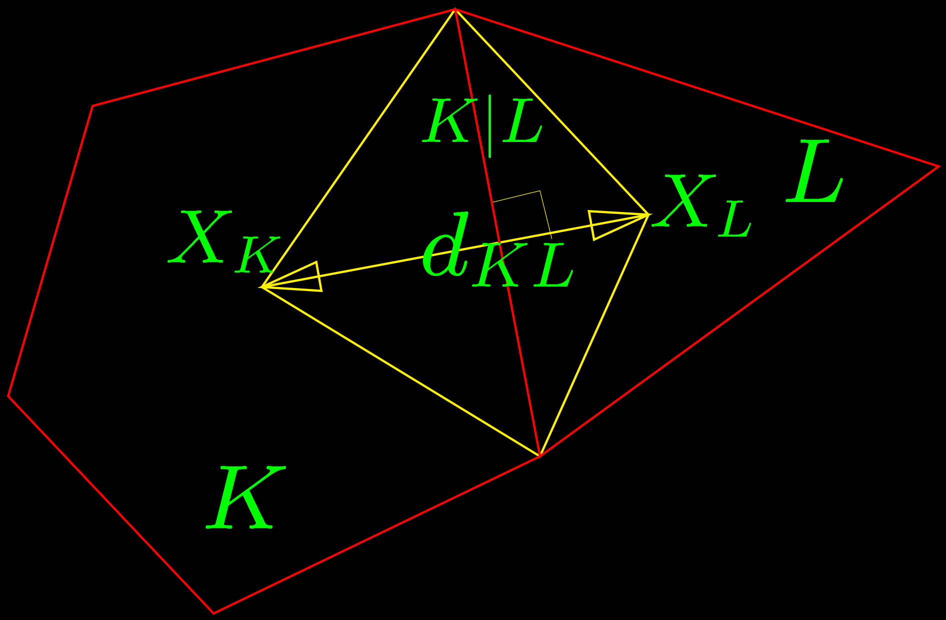
cas $F = -\nabla u$



Cermics, novembre 2003

Approximation du gradient par différences finies

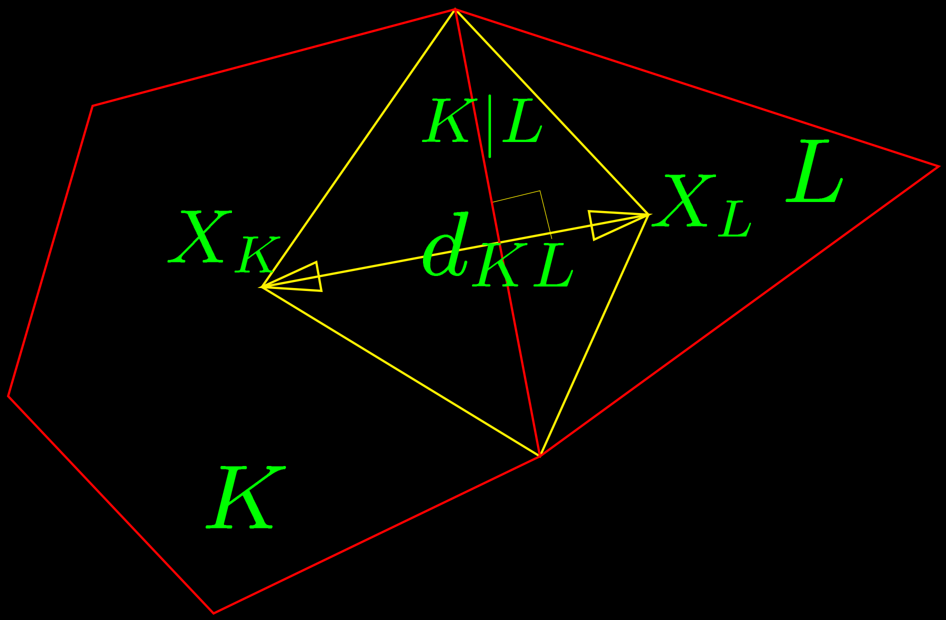
cas $F = -\nabla u$



$$\sigma = K|L \to F_{K,\sigma} = -m_{K|L}\frac{u_L - u_K}{d_{KL}}$$

Approximation du gradient par différences finies

cas $F = -\nabla u$



$$\sigma = K|L \to F_{K,\sigma} = -m_{K|L} \frac{u_L - u_K}{d_{KL}}$$

$$\sigma \subset \partial\Omega \to F_{K,\sigma} = -m_\sigma \frac{u_\sigma - u_K}{d_{K,\sigma}}$$

Schéma de volumes finis dans ce cas

Schéma de volumes finis dans ce cas

$$u_K^0 = \frac{1}{m(K)} \int_K u_0(x) dx$$

Schéma de volumes finis dans ce cas

$$u_K^0 = \frac{1}{m(K)} \int_K u_0(x)dx$$

$$\bar{u}_\sigma^{n+1} = \frac{1}{\delta t^n \ m(\sigma)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_\sigma \bar{u}(x,t) d\gamma(x) dt$$

Schéma de volumes finis dans ce cas

$$u_K^0 = \frac{1}{m(K)} \int_K u_0(x) dx$$

$$\bar{u}_\sigma^{n+1} = \frac{1}{\delta t^n \; m(\sigma)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_\sigma \bar{u}(x,t) d\gamma(x) dt$$

$$q_{K,L}^{n+1} = \frac{1}{\delta t^n} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{K|L} \mathbf{q}(x,t) \cdot \mathbf{n}_{K,L} d\gamma(x) dt$$

Schéma de volumes finis dans ce cas

$$u_K^0 = \frac{1}{m(K)} \int_K u_0(x)dx$$

$$\bar{u}_\sigma^{n+1} = \frac{1}{\delta t^n \; m(\sigma)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_\sigma \bar{u}(x,t) d\gamma(x) dt$$

$$q_{K,L}^{n+1} = \frac{1}{\delta t^n} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{K|L} \mathbf{q}(x,t) \cdot \mathbf{n}_{K,L} d\gamma(x) dt$$

$$\begin{array}{lc}
(u_K^{n+1} - u_K^n) \; m(K) & + \\
\delta t^n \displaystyle\sum_{L \in \mathcal{N}_K} \left[(q_{K,L}^{n+1})^+ f(u_K^{n+1}) - (q_{K,L}^{n+1})^- f(u_L^{n+1}) \right] & - \\
\delta t^n \displaystyle\sum_{L \in \mathcal{N}_K} \tau_{K|L} (\varphi(u_L^{n+1}) - \varphi(u_K^{n+1})) & - \\
\delta t^n \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext,K}} \tau_\sigma (\varphi(\bar{u}_\sigma^{n+1}) - \varphi(u_K^{n+1})) & = \; 0
\end{array}$$

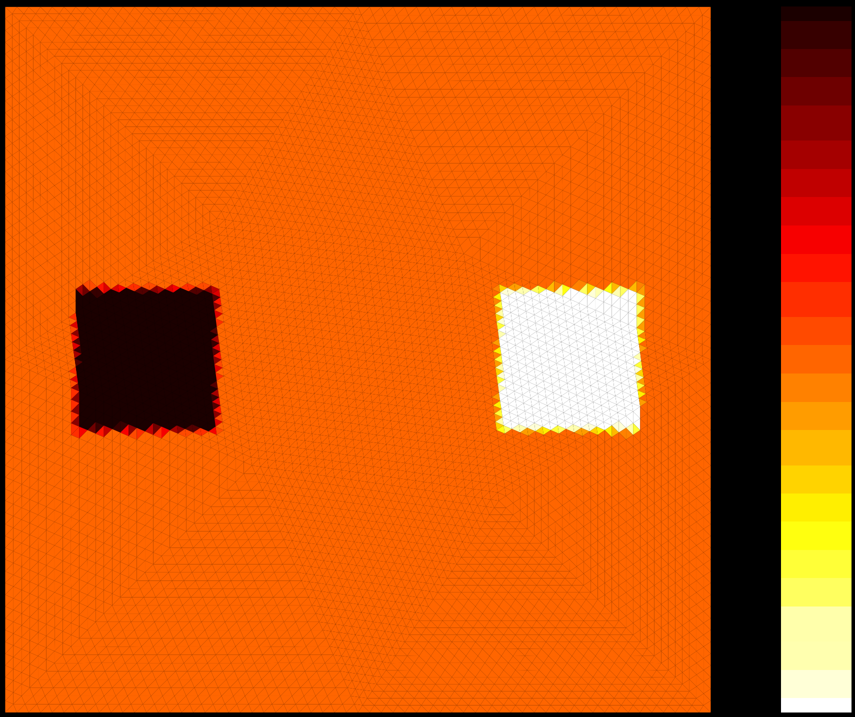
Un exemple numérique

$$\varphi(u) = \max(u, .5)$$

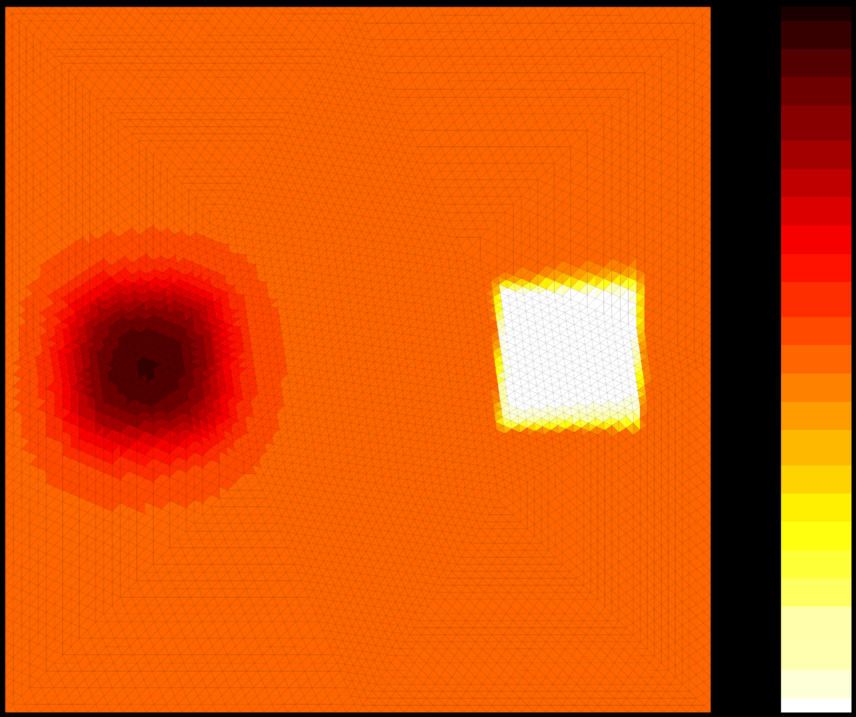
$$f(u) = u$$

$$\Omega = (0,1) \times (0,1)$$
$$\mathbf{q}(x_1, x_2) = \mathrm{rot}\,(x_1(1-x_1)x_2(1-x_2))$$

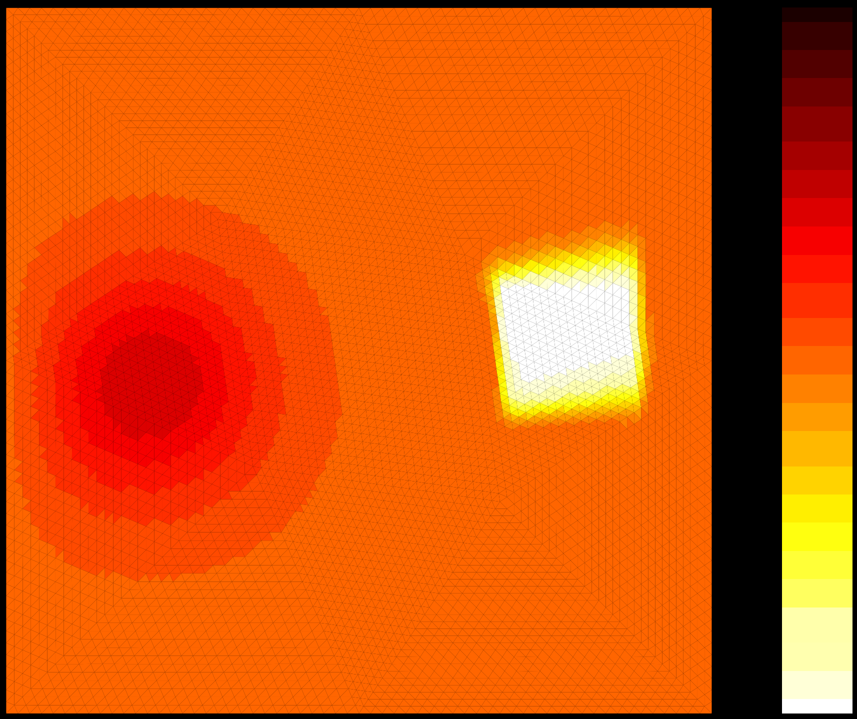
Un exemple numérique : $t = 0$



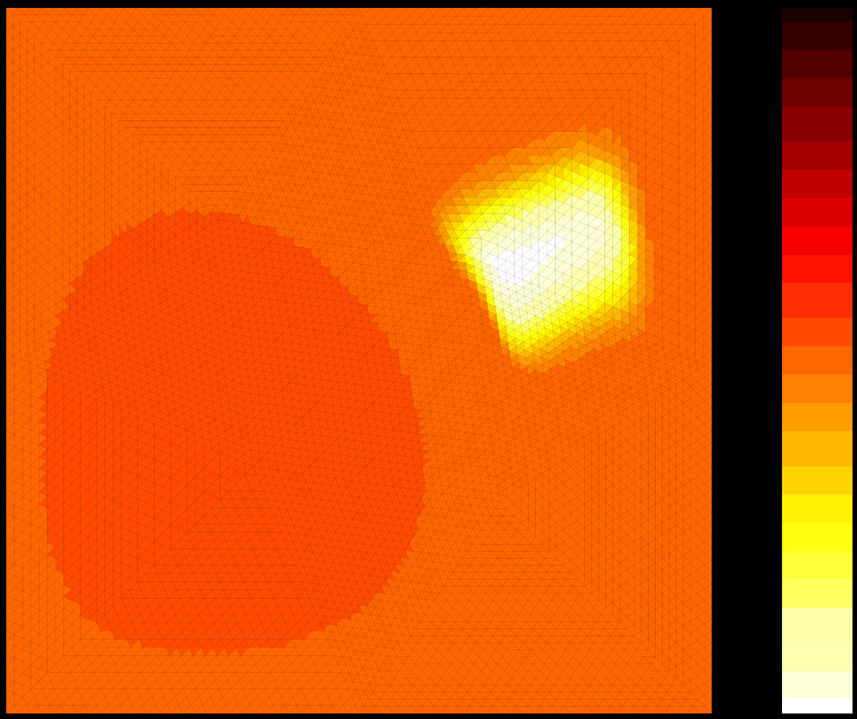
Un exemple numérique : $t = 0.01$



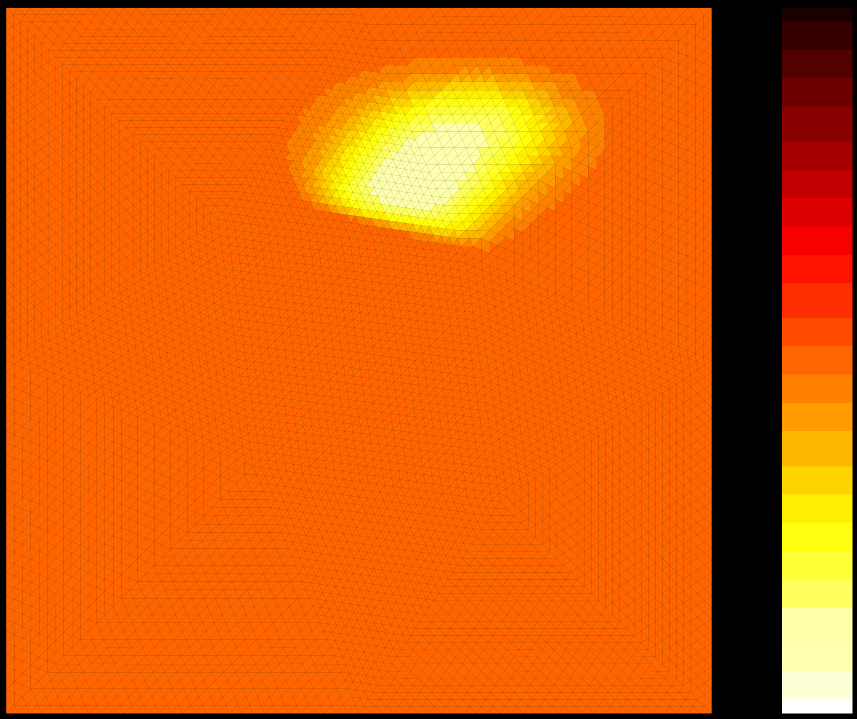
Un exemple numérique : $t = 0.04$



Un exemple numérique : $t = 0.16$



Un exemple numérique : $t = 0.4$



Résultat de convergence (E., Gallouët, Herbin, Michel)

Résultat de convergence (E., Gallouët, Herbin, Michel)

La solution approchée
$u_{\mathcal{D}}(x,t) = u_K^{n+1}, \ \forall x \in K, \ \forall t \in (t^n, t^{n+1})$

Résultat de convergence (E., Gallouët, Herbin, Michel)

La solution approchée
$u_{\mathcal{D}}(x,t) = u_K^{n+1}$, $\forall x \in K$, $\forall t \in (t^n, t^{n+1})$
$\longrightarrow u$ solution faible entropique qd $\mathrm{pas}(\mathcal{D}) \longrightarrow 0$
ds $L^p(\Omega \times (0,T))$, $\forall p \in [1, +\infty)$

Estimation L^∞

Estimation L^∞

soit $u_K^{n+1} \in \mathbb{R}$ t.q.

$$
\begin{aligned}
&(u_K^{n+1} - u_K^n)\, m(K) && + \\
&\delta t^n \sum_{L \in \mathcal{N}_K} \left[(q_{K,L}^{n+1})^+ f(u_K^{n+1}) - (q_{K,L}^{n+1})^- f(u_L^{n+1}) \right] && - \\
&\delta t^n \sum_{L \in \mathcal{N}_K} \tau_{K|L} (\varphi(u_L^{n+1}) - \varphi(u_K^{n+1})) && - \\
&\delta t^n \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext,K}} \tau_\sigma (\varphi(\bar{u}_\sigma^{n+1}) - \varphi(u_K^{n+1})) = 0
\end{aligned}
$$

Estimation L^∞

soit $u_K^{n+1} \in \mathbb{R}$ t.q.

$$
\begin{aligned}
&(u_K^{n+1} - u_K^n)\, m(K) && + \\
&\delta t^n \sum_{L\in\mathcal{N}_K} \left[(q_{K,L}^{n+1})^+ f(u_K^{n+1}) - (q_{K,L}^{n+1})^- f(u_L^{n+1}) \right] && - \\
&\delta t^n \sum_{L\in\mathcal{N}_K} \tau_{K|L} (\varphi(u_L^{n+1}) - \varphi(u_K^{n+1})) && - \\
&\delta t^n \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{ext,K}} \tau_\sigma (\varphi(\bar{u}_\sigma^{n+1}) - \varphi(u_K^{n+1})) = 0
\end{aligned}
$$

alors $u_I \leq u_K^{n+1} \leq u_S$

Preuve de l'estimation L^∞

Preuve de l'estimation L^∞

$$\mathrm{div}\,\mathbf{q} = 0 \text{ et } \mathbf{q}\cdot\mathbf{n} = 0 \Rightarrow \sum_{L\in\mathcal{N}_K} ((q_{K,L}^{n+1})^+ - (q_{K,L}^{n+1})^-) = 0$$

Preuve de l'estimation L^∞

$$\mathrm{div}\mathbf{q} = 0 \text{ et } \mathbf{q}\cdot\mathbf{n} = 0 \Rightarrow \sum_{L\in\mathcal{N}_K} ((q_{K,L}^{n+1})^+ - (q_{K,L}^{n+1})^-) = 0$$

$$\begin{array}{ll}
(u_K^{n+1} - u_K^n)\, m(K) & + \\
\delta t^n \displaystyle\sum_{L\in\mathcal{N}_K} \left[(q_{K,L}^{n+1})^-(f(u_K^{n+1}) - f(u_L^{n+1}))\right] & + \\
\delta t^n \displaystyle\sum_{L\in\mathcal{N}_K} \tau_{K|L}(\varphi(u_K^{n+1}) - \varphi(u_L^{n+1})) & + \\
\delta t^n \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{ext,K}} \tau_\sigma(\varphi(u_K^{n+1}) - \varphi(\bar{u}_\sigma^{n+1})) & = \ 0
\end{array}$$

Preuve de l'estimation L^∞

$$\mathrm{div}\,\mathbf{q} = 0 \text{ et } \mathbf{q}\cdot\mathbf{n} = 0 \Rightarrow \sum_{L\in\mathcal{N}_K} ((q_{K,L}^{n+1})^+ - (q_{K,L}^{n+1})^-) = 0$$

$$\begin{array}{lll}
(u_K^{n+1} - u_K^n)\ m(K) & + & \\
\delta t^n \displaystyle\sum_{L\in\mathcal{N}_K} \left[(q_{K,L}^{n+1})^-(f(u_K^{n+1}) - f(u_L^{n+1}))\right] & + & \\
\delta t^n \displaystyle\sum_{L\in\mathcal{N}_K} \tau_{K|L}(\varphi(u_K^{n+1}) - \varphi(u_L^{n+1})) & + & \\
\delta t^n \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{ext,K}} \tau_\sigma(\varphi(u_K^{n+1}) - \varphi(\bar{u}_\sigma^{n+1})) & = & 0
\end{array}$$

K t.q. $u_K^{n+1} = \max_{L\in\mathcal{T}} u_L^{n+1}$

Preuve de l'estimation L^∞

$$\mathrm{div}\,\mathbf{q} = 0 \text{ et } \mathbf{q}\cdot\mathbf{n} = 0 \Rightarrow \sum_{L\in\mathcal{N}_K} ((q_{K,L}^{n+1})^+ - (q_{K,L}^{n+1})^-) = 0$$

$$\begin{array}{ll}
(u_K^{n+1} - u_K^n)\, m(K) & + \\
\delta t^n \displaystyle\sum_{L\in\mathcal{N}_K} \left[(q_{K,L}^{n+1})^- (f(u_K^{n+1}) - f(u_L^{n+1}))\right] & + \\
\delta t^n \displaystyle\sum_{L\in\mathcal{N}_K} \tau_{K|L}(\varphi(u_K^{n+1}) - \varphi(u_L^{n+1})) & + \\
\delta t^n \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{ext,K}} \tau_\sigma(\varphi(u_K^{n+1}) - \varphi(\bar{u}_\sigma^{n+1})) & = \;\; 0
\end{array}$$

K t.q. $u_K^{n+1} = \max_{L\in\mathcal{T}} u_L^{n+1}$

$u_K^{n+1} > u_S$ impossible si $u_K^n, \bar{u}_\sigma^{n+1} \in [u_I, u_S]$

Existence d'une solution discrète

Existence d'une solution discrète

degré topologique (voir Deimling)

$R > 0$, $\bar{B}(0, R) = \{x \in \mathbb{R}^N, |x| \leq R\}$

$\psi : \bar{B}(0, R) \times [0, 1] \to \mathbb{R}^N$ continue

$\psi(x, \lambda) = 0 \Rightarrow |x| < R$

$\psi(x, 0) = Ax + b$

Existence d'une solution discrète

degré topologique (voir Deimling)

$R > 0$, $\bar{B}(0,R) = \{x \in \mathbb{R}^N, |x| \leq R\}$

$\psi : \bar{B}(0,R) \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$ continue

$\psi(x,\lambda) = 0 \Rightarrow |x| < R$

$\psi(x,0) = Ax + b$

alors $\exists x \in B(0,R)$, $\psi(x,1) = 0$

Existence d'une solution discrète

degré topologique (voir Deimling)

$R > 0$, $\bar{B}(0,R) = \{x \in \mathbb{R}^N, |x| \leq R\}$

$\psi : \bar{B}(0,R) \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$ continue

$\psi(x,\lambda) = 0 \Rightarrow |x| < R$

$\psi(x,0) = Ax + b$

alors $\exists x \in B(0,R)$, $\psi(x,1) = 0$

$$\begin{aligned}
&\psi((u_L)_L, \lambda)_K = (u_K - u_K^n)\, m(K) &+\\
&\lambda \delta t^n \sum_{L \in \mathcal{N}_K} \left[(q_{K,L}^{n+1})^+ f(u_K) - (q_{K,L}^{n+1})^- f(u_L) \right] &-\\
&\lambda \delta t^n \sum_{L \in \mathcal{N}_K} \tau_{K|L} (\varphi(u_L) - \varphi(u_K)) &-\\
&\lambda \delta t^n \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext,K}} \tau_\sigma (\varphi(\bar{u}_\sigma^{n+1}) - \varphi(u_K))
\end{aligned}$$

Existence d'une solution discrète

degré topologique (voir Deimling)
$R > 0$, $\bar{B}(0,R) = \{x \in \mathbb{R}^N, |x| \leq R\}$
$\psi : \bar{B}(0,R) \times [0,1] \to \mathbb{R}^N$ continue
$\psi(x,\lambda) = 0 \Rightarrow |x| < R$
$\psi(x,0) = Ax + b$

alors $\exists x \in B(0,R)$, $\psi(x,1) = 0$

$$\begin{aligned}
&\psi((u_L)_L,\lambda)_K = (u_K - u_K^n)\, m(K) && + \\
&\lambda \delta t^n \sum_{L \in \mathcal{N}_K} \left[(q_{K,L}^{n+1})^+ f(u_K) - (q_{K,L}^{n+1})^- f(u_L)\right] && - \\
&\lambda \delta t^n \sum_{L \in \mathcal{N}_K} \tau_{K|L}(\varphi(u_L) - \varphi(u_K)) && - \\
&\lambda \delta t^n \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext,K}} \tau_\sigma(\varphi(\bar{u}_\sigma^{n+1}) - \varphi(u_K))
\end{aligned}$$

$\psi((u_L)_L,\lambda) = 0 \Rightarrow u_I \leq u_K \leq u_S$
$\Rightarrow$ existence d'une solution discrète

Compacité ainsi obtenue

Compacité ainsi obtenue

convergence non linéaire faible (n.l.f.) $\star$

Compacité ainsi obtenue

convergence non linéaire faible (n.l.f.) $\star$

$Q \subset \mathbb{R}^k$, $C > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\|u_n\|_{L^\infty(Q)} < C$

Compacité ainsi obtenue

convergence non linéaire faible (n.l.f.) $\star$

$Q \subset \mathbb{R}^k$, $C > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\|u_n\|_{L^\infty(Q)} < C$

$\Rightarrow \exists \hat{u} \in L^\infty(Q \times (0,1))$ t.q.

$u_n \rightharpoonup \hat{u}$ “dans le sens n.l.f.$\star$” (ss-suite près)

Compacité ainsi obtenue

convergence non linéaire faible (n.l.f.) $\star$

$Q \subset \mathbb{R}^k$, $C > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\|u_n\|_{L^\infty(Q)} < C$

$\Rightarrow \exists \widehat{u} \in L^\infty(Q \times (0,1))$ t.q.

$u_n \rightharpoonup \widehat{u}$ "dans le sens n.l.f.$\star$" (ss-suite près)

$\forall g \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $g(u_n) \rightharpoonup \int_0^1 g(\widehat{u}(\cdot,\alpha))d\alpha$ ($L^\infty(Q)$ f. $\star$):

pour tout $v \in L^1(Q)$

$$\int_Q g(u_n(x))v(x)dx \to \int_Q \int_0^1 g(\widehat{u}(x,\alpha))d\alpha \; v(x)dx$$

Compacité ainsi obtenue

convergence non linéaire faible (n.l.f.) $\star$
$Q \subset \mathbb{R}^k$, $C > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\|u_n\|_{L^\infty(Q)} < C$

$\Rightarrow \exists \widehat{u} \in L^\infty(Q \times (0,1))$ t.q.
$u_n \rightharpoonup \widehat{u}$ "dans le sens n.l.f.$\star$" (ss-suite près)

$\forall g \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $g(u_n) \rightharpoonup \int_0^1 g(\widehat{u}(\cdot,\alpha))d\alpha$ ($L^\infty(Q)$ f. $\star$):
pour tout $v \in L^1(Q)$

$$\int_Q g(u_n(x))v(x)dx \to \int_Q \int_0^1 g(\widehat{u}(x,\alpha))d\alpha\ v(x)dx$$

$\widehat{u}$ definit une mesure d'Young par dm_x : $g \mapsto \int_0^1 g(\widehat{u}(x,\alpha))d\alpha$
pour dm, non unicité de $\widehat{u}$

Compacité ainsi obtenue

convergence non linéaire faible (n.l.f.) $\star$

$Q \subset \mathbb{R}^k$, $C > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\|u_n\|_{L^\infty(Q)} < C$

$\Rightarrow \exists \widehat{u} \in L^\infty(Q \times (0,1))$ t.q.

$u_n \rightharpoonup \widehat{u}$ "dans le sens n.l.f.$\star$" (ss-suite près)

$\forall g \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $g(u_n) \rightharpoonup \int_0^1 g(\widehat{u}(\cdot,\alpha))d\alpha$ ($L^\infty(Q)$ f. $\star$):

pour tout $v \in L^1(Q)$

$$\int_Q g(u_n(x))v(x)dx \to \int_Q \int_0^1 g(\widehat{u}(x,\alpha))d\alpha \; v(x)dx$$

$\widehat{u}$ definit une mesure d'Young par $dm_x : g \mapsto \int_0^1 g(\widehat{u}(x,\alpha))d\alpha$

pour dm, non unicité de $\widehat{u}$

$u_{\mathcal{D}} \rightharpoonup \widehat{u}$ dans le sens n.l.f.$\star$

Estimation $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ discrète

Estimation $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ discrète

schéma multiplié par $u_K^{n+1} - \bar{u}_K^{n+1}$, somme sur K et n

Estimation $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ discrète

schéma multiplié par $u_K^{n+1} - \bar{u}_K^{n+1}$, somme sur K et n

$$\sum_{n=0}^{N} \delta t^n \sum_{K|L\in\mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L}(\zeta(u_K^{n+1}) - \zeta(u_L^{n+1}))^2 \quad +$$

$$\sum_{n=0}^{N} \delta t^n \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{ext}} \tau_{\sigma}(\zeta(\bar{u}_\sigma^{n+1}) - \zeta(u_{K_\sigma}^{n+1}))^2 \qquad \leq \quad C$$

Estimation $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ discrète

schéma multiplié par $u_K^{n+1} - \bar{u}_K^{n+1}$, somme sur K et n

$$\sum_{n=0}^{N} \delta t^n \sum_{K|L\in\mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L}(\zeta(u_K^{n+1}) - \zeta(u_L^{n+1}))^2 \;+$$

$$\sum_{n=0}^{N} \delta t^n \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{ext}} \tau_\sigma(\zeta(\bar{u}_\sigma^{n+1}) - \zeta(u_{K_\sigma}^{n+1}))^2 \qquad \leq \; C$$

inégalité BV faible

$$\sum_{n=0}^{N} \delta t^n \sum_{K|L\in\mathcal{E}_{int}} \begin{pmatrix} ((q_{K,L}^{n+1})^- + (q_{K,L}^{n+1})^+)\times \\ (f(u_K^{n+1}) - f(u_L^{n+1}))^2 \end{pmatrix} \leq \; C$$

Origine continue de l'inégalité BV faible

Cermics, novembre 2003

Origine continue de l'inégalité BV faible

$u_t + \mathbf{q} \cdot \nabla f(u) - \varepsilon \Delta u = 0$
avec $\mathrm{div}\mathbf{q} = 0$ et $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega \times (0, T)$

Origine continue de l'inégalité BV faible

$u_t + \mathbf{q} \cdot \nabla f(u) - \varepsilon \Delta u = 0$

avec $\mathrm{div}\mathbf{q} = 0$ et $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega \times (0, T)$

multiplier par u, intégrer en espace, faire $F'(u) = uf(u)$

Origine continue de l'inégalité BV faible

$u_t + \mathbf{q} \cdot \nabla f(u) - \varepsilon \Delta u = 0$

avec $\mathrm{div}\mathbf{q} = 0$ et $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega \times (0, T)$

multiplier par u, intégrer en espace, faire $F'(u) = u f(u)$

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{2}(u^2)_t + \mathbf{q} \cdot \nabla F(u) + \varepsilon(\nabla u)^2\right] dx = 0$$

Origine continue de l'inégalité BV faible

$u_t + \mathbf{q} \cdot \nabla f(u) - \varepsilon \Delta u = 0$

avec $\mathrm{div}\mathbf{q} = 0$ et $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega \times (0, T)$

multiplier par u, intégrer en espace, faire $F'(u) = uf(u)$

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{2}(u^2)_t + \mathbf{q} \cdot \nabla F(u) + \varepsilon(\nabla u)^2\right] dx = 0$$

$$\int_\Omega [\mathbf{q} \cdot \nabla F(u)]\, dx = \int_{\partial\Omega} F(u)\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dx = 0$$

integration en temps donne

Origine continue de l'inégalité BV faible

$u_t + \mathbf{q} \cdot \nabla f(u) - \varepsilon \Delta u = 0$

avec $\mathrm{div}\mathbf{q} = 0$ et $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega \times (0, T)$

multiplier par u, intégrer en espace, faire $F'(u) = uf(u)$

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{2}(u^2)_t + \mathbf{q} \cdot \nabla F(u) + \varepsilon(\nabla u)^2\right] dx = 0$$

$$\int_\Omega [\mathbf{q} \cdot \nabla F(u)]\, dx = \int_{\partial\Omega} F(u)\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dx = 0$$

integration en temps donne

$$\varepsilon \int_{\Omega\times(0,T)} (\nabla u)^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_\Omega u_0^2 dx$$

Origine continue de l'inégalité BV faible

$u_t + \mathbf{q} \cdot \nabla f(u) - \varepsilon \Delta u = 0$

avec $\mathrm{div}\mathbf{q} = 0$ et $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega \times (0, T)$

multiplier par u, intégrer en espace, faire $F'(u) = uf(u)$

$$\int_\Omega \left[\frac{1}{2}(u^2)_t + \mathbf{q} \cdot \nabla F(u) + \varepsilon(\nabla u)^2\right] dx = 0$$

$$\int_\Omega [\mathbf{q} \cdot \nabla F(u)]\, dx = \int_{\partial\Omega} F(u)\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dx = 0$$

integration en temps donne

$$\varepsilon \int_{\Omega\times(0,T)} (\nabla u)^2 dx \leq \frac{1}{2}\int_\Omega u_0^2 dx$$

présence ε: pas une estimation mais seult une inégalité

Conséquence de l'inégalité $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ discrète

Conséquence de l'inégalité $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ discrète

$z = \zeta(u) - \zeta(\bar{u})$

$$\sum_{n=0}^{N} \delta t^n \Big(\sum_{K|L \in \mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L} (z_K^{n+1} - z_L^{n+1})^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \tau_\sigma (z_{K_\sigma}^{n+1})^2 \Big)$$

$\leq C'$

Conséquence de l'inégalité $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ discrète

$z = \zeta(u) - \zeta(\bar{u})$

$$\sum_{n=0}^{N} \delta t^n \Big(\sum_{K|L\in\mathcal{E}_{int}} \tau_{K|L} (z_K^{n+1} - z_L^{n+1})^2 + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{ext}} \tau_\sigma (z_{K_\sigma}^{n+1})^2 \Big)$$

$\leq C'$

$\Rightarrow$

estimation sur les translations en espace des solutions discrètes

$$\int_{\Omega\times(0,T)} (z_{\mathcal{D}}(x+\xi,t) - z_{\mathcal{D}}(x,t))^2 dxdt \leq$$

$C|\xi|(|\xi| + 2\mathrm{pas}(\mathcal{D}))$

Translations en temps des solutions discrètes

Cermics, novembre 2003

Translations en temps des solutions discrètes

à partir des est. $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ disc. et du schéma

Translations en temps des solutions discrètes

à partir des est. $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ disc. et du schéma
$\Rightarrow \int_{\Omega\times(0,T)} (z_{\mathcal{D}}(x,t+\tau) - z_{\mathcal{D}}(x,t))^2 dxdt \leq C|\tau|$

Translations en temps des solutions discrètes

à partir des est. $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ disc. et du schéma

$$\Rightarrow \int_{\Omega\times(0,T)} (z_{\mathcal{D}}(x,t+\tau) - z_{\mathcal{D}}(x,t))^2 dxdt \leq C|\tau|$$

preuve continue : $z_t - \Delta z = 0$, $z = 0$ sur $\partial\Omega$

Translations en temps des solutions discrètes

à partir des est. $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ disc. et du schéma
$\Rightarrow \int_{\Omega\times(0,T)} (z_{\mathcal{D}}(x,t+\tau) - z_{\mathcal{D}}(x,t))^2 dxdt \leq C|\tau|$

preuve continue : $z_t - \Delta z = 0$, $z = 0$ sur $\partial\Omega$

$$\int_0^T \int_\Omega (\nabla z(x,t))^2 dxdt \leq \frac{1}{2}\int_\Omega z_0(x)^2 dx$$

Translations en temps des solutions discrètes

à partir des est. $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ disc. et du schéma

$$\Rightarrow \int_{\Omega\times(0,T)} (z_{\mathcal{D}}(x,t+\tau) - z_{\mathcal{D}}(x,t))^2 dxdt \leq C|\tau|$$

preuve continue : $z_t - \Delta z = 0$, $z = 0$ sur $\partial\Omega$

$$\int_0^T \int_\Omega (\nabla z(x,t))^2 dxdt \leq \frac{1}{2}\int_\Omega z_0(x)^2 dx$$

$$\int_0^{T-\tau} \int_\Omega (z(x,t+\tau) - z(x,t))^2 dxdt =$$

$$\int_0^{T-\tau} \int_\Omega (z(x,t+\tau) - z(x,t)) \int_0^\tau z_t(x,t+s) ds dxdt =$$

Translations en temps des solutions discrètes

à partir des est. $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ disc. et du schéma
$\Rightarrow \int_{\Omega\times(0,T)} (z_{\mathcal{D}}(x,t+\tau) - z_{\mathcal{D}}(x,t))^2 dxdt \le C|\tau|$

preuve continue : $z_t - \Delta z = 0$, $z = 0$ sur $\partial\Omega$

$$\int_0^T \int_\Omega (\nabla z(x,t))^2 dxdt \le \frac{1}{2}\int_\Omega z_0(x)^2 dx$$

$$\int_0^{T-\tau} \int_\Omega (z(x,t+\tau) - z(x,t))^2 dxdt =$$

$$\int_0^{T-\tau} \int_\Omega (z(x,t+\tau) - z(x,t)) \int_0^\tau z_t(x,t+s) dsdxdt =$$

$$\int_0^{T-\tau} \int_\Omega (z(x,t+\tau) - z(x,t)) \int_0^\tau \Delta z(x,t+s) dsdxdt =$$

Translations en temps des solutions discrètes

à partir des est. $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ disc. et du schéma
$\Rightarrow \int_{\Omega\times(0,T)}(z_{\mathcal{D}}(x,t+\tau)-z_{\mathcal{D}}(x,t))^2dxdt \leq C|\tau|$

preuve continue : $z_t-\Delta z=0$, $z=0$ sur $\partial\Omega$

$$\int_0^T\int_\Omega(\nabla z(x,t))^2dxdt \leq \frac{1}{2}\int_\Omega z_0(x)^2dx$$

$$\int_0^{T-\tau}\int_\Omega(z(x,t+\tau)-z(x,t))^2dxdt =$$

$$\int_0^{T-\tau}\int_\Omega(z(x,t+\tau)-z(x,t))\int_0^\tau z_t(x,t+s)dsdxdt =$$

$$\int_0^{T-\tau}\int_\Omega(z(x,t+\tau)-z(x,t))\int_0^\tau \Delta z(x,t+s)dsdxdt =$$

$$\int_0^\tau\int_0^{T-\tau}\int_\Omega(\nabla z(x,t)-\nabla z(x,t+\tau))\cdot\nabla z(x,t+s)dxdtds$$

Translations en temps des solutions discrètes

à partir des est. $L^2(0,T;H^1(\Omega))$ disc. et du schéma
$\Rightarrow \int_{\Omega\times(0,T)} (z_{\mathcal{D}}(x,t+\tau) - z_{\mathcal{D}}(x,t))^2 dxdt \leq C|\tau|$

preuve continue : $z_t - \Delta z = 0$, $z = 0$ sur $\partial\Omega$

$$\int_0^T \int_\Omega (\nabla z(x,t))^2 dxdt \leq \frac{1}{2}\int_\Omega z_0(x)^2 dx$$

$$\int_0^{T-\tau} \int_\Omega (z(x,t+\tau) - z(x,t))^2 dxdt =$$

$$\int_0^{T-\tau} \int_\Omega (z(x,t+\tau) - z(x,t)) \int_0^\tau z_t(x,t+s) dsdxdt =$$

$$\int_0^{T-\tau} \int_\Omega (z(x,t+\tau) - z(x,t)) \int_0^\tau \Delta z(x,t+s) dsdxdt =$$

$$\int_0^\tau \int_0^{T-\tau} \int_\Omega (\nabla z(x,t) - \nabla z(x,t+\tau)) \cdot \nabla z(x,t+s) dxdtds$$

$$\leq 2\int_0^\tau \left(\int_0^T \int_\Omega \nabla z(x,t))^2 dxdt\right) ds = C\tau$$

Compacité ainsi obtenue

Compacité ainsi obtenue

Corollaire du th. de Riesz-Fréchet-Kolmogorov

Compacité ainsi obtenue

Corollaire du th. de Riesz-Fréchet-Kolmogorov

$Q \subset \mathbb{R}^k$, $Q_\delta = \{x \in Q, [x, x+\delta] \subset Q\}$

$C > 0$, $z_n \in L^\infty(Q)$ t.q. $\|z_n\|_{L^\infty(Q)} < C$

z_n prolongée par 0 sur $\mathbb{R}^k \setminus Q$

$$\lim_{|\delta|\to 0} [\sup_{n\in\mathbb{N}} \|z_n(\cdot+\delta) - z_n(\cdot)\|_{L^2(Q_\delta)}] = 0$$

Compacité ainsi obtenue

Corollaire du th. de Riesz-Fréchet-Kolmogorov

$Q \subset \mathbb{R}^k$, $Q_\delta = \{x \in Q, [x, x+\delta] \subset Q\}$

$C > 0$, $z_n \in L^\infty(Q)$ t.q. $\|z_n\|_{L^\infty(Q)} < C$

z_n prolongée par 0 sur $\mathbb{R}^k \setminus Q$

$$\lim_{|\delta| \to 0} [\sup_{n \in \mathbb{N}} \|z_n(\cdot + \delta) - z_n(\cdot)\|_{L^2(Q_\delta)}] = 0$$

$\Rightarrow \exists z \in L^\infty(Q)$ t.q.

$z_n \to z$ ds $L^2(Q)$ (ss-suite près)

Compacité ainsi obtenue

Corollaire du th. de Riesz-Fréchet-Kolmogorov

$Q \subset \mathbb{R}^k$, $Q_\delta = \{x \in Q, [x, x+\delta] \subset Q\}$

$C > 0$, $z_n \in L^\infty(Q)$ t.q. $\|z_n\|_{L^\infty(Q)} < C$

z_n prolongée par 0 sur $\mathbb{R}^k \setminus Q$

$\lim_{|\delta| \to 0} [\sup_{n \in \mathbb{N}} \|z_n(\cdot + \delta) - z_n(\cdot)\|_{L^2(Q_\delta)}] = 0$

$\Rightarrow \exists z \in L^\infty(Q)$ t.q.

$z_n \to z$ ds $L^2(Q)$ (ss-suite près)

$z_{\mathcal{D}} \to \bar{z}$ ds $L^\infty(\Omega \times (0,T))$

$\zeta(u_{\mathcal{D}}) \to \bar{\zeta} = \bar{z} + \zeta(\bar{u})$ ds $L^2(\Omega \times (0,T))$

Relation entre $\bar{\zeta}$ et $\widehat{u}$

Relation entre $\bar{\zeta}$ et $\widehat{u}$

$u_n \rightharpoonup \widehat{u}$ n.l.f. $\star$

Relation entre $\bar{\zeta}$ et $\hat{u}$

$u_n \rightharpoonup \hat{u}$ n.l.f. $\star$

$\zeta(u_n) \to \bar{\zeta}$ dans $L^2(Q)$

Relation entre $\bar{\zeta}$ et $\widehat{u}$

$u_n \rightharpoonup \widehat{u}$ n.l.f. $\star$
$\zeta(u_n) \to \bar{\zeta}$ dans $L^2(Q)$
$\Rightarrow \zeta(\widehat{u}(x,\alpha)) = \bar{\zeta}(x)$ p.p. x et α

Relation entre $\bar{\zeta}$ et $\widehat{u}$

$u_n \rightharpoonup \widehat{u}$ n.l.f. $\star$
$\zeta(u_n) \to \bar{\zeta}$ dans $L^2(Q)$
$\Rightarrow \zeta(\widehat{u}(x,\alpha)) = \bar{\zeta}(x)$ p.p. x et α

Preuve : $0 = \int_Q (\zeta(u_n) - \zeta(u_n))^2 dx$

$$0 = \int_Q \zeta^2(u_n)dx - 2\int_Q \zeta(u_n)\zeta(u_n)dx + \int_Q \zeta(u_n)^2 dx$$

Relation entre $\bar{\zeta}$ et $\widehat{u}$

$u_n \rightharpoonup \widehat{u}$ n.l.f. $\star$
$\zeta(u_n) \to \bar{\zeta}$ dans $L^2(Q)$
$\Rightarrow \zeta(\widehat{u}(x,\alpha)) = \bar{\zeta}(x)$ p.p. x et α

Preuve : $0 = \int_Q (\zeta(u_n) - \zeta(u_n))^2 dx$

$$0 = \int_Q \zeta^2(u_n)dx - 2\int_Q \zeta(u_n)\zeta(u_n)dx + \int_Q \zeta(u_n)^2 dx$$

$$\int_Q \zeta^2(u_n)dx \to \int_Q \int_0^1 \zeta^2(\widehat{u}(x,\alpha))d\alpha dx$$

$$\int_Q \zeta(u_n)\zeta(u_n)dx \to \int_Q \int_0^1 \zeta(\widehat{u}(x,\alpha))d\alpha\bar{\zeta}(x)dx \text{ (faible/fort)}$$

$$\int_Q \zeta(u_n)^2 dx \to \int_Q \bar{\zeta}(x)^2 dx \text{ (fort)}$$

Relation entre $\bar{\zeta}$ et $\widehat{u}$

$u_n \rightharpoonup \widehat{u}$ n.l.f. $\star$
$\zeta(u_n) \to \bar{\zeta}$ dans $L^2(Q)$
$\Rightarrow \zeta(\widehat{u}(x,\alpha)) = \bar{\zeta}(x)$ p.p. x et α

Preuve : $0 = \int_Q (\zeta(u_n) - \zeta(u_n))^2 dx$

$$0 = \int_Q \zeta^2(u_n)dx - 2\int_Q \zeta(u_n)\zeta(u_n)dx + \int_Q \zeta(u_n)^2 dx$$

$$\int_Q \zeta^2(u_n)dx \to \int_Q \int_0^1 \zeta^2(\widehat{u}(x,\alpha))d\alpha dx$$

$$\int_Q \zeta(u_n)\zeta(u_n)dx \to \int_Q \int_0^1 \zeta(\widehat{u}(x,\alpha))d\alpha\bar{\zeta}(x)dx \text{ (faible/fort)}$$

$$\int_Q \zeta(u_n)^2 dx \to \int_Q \bar{\zeta}(x)^2 dx \text{ (fort)}$$

$$\Rightarrow \int_Q \int_0^1 (\zeta(\widehat{u}(x,\alpha)) - \bar{\zeta}(x))^2 d\alpha dx = 0$$

Emploi des entropies de Krushkov

Cermics, novembre 2003

Emploi des entropies de Krushkov

pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$, le schéma donne

Emploi des entropies de Krushkov

pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$, le schéma donne

$$
\begin{array}{ll}
\left(|u_K^{n+1} - \kappa| - |u_K^n - \kappa|\right) m(K) & + \\
\delta t^n \displaystyle\sum_{L \in \mathcal{N}_K} \left[\begin{array}{c} (q_{K,L}^{n+1})^+ |f(u_K^{n+1}) - f(\kappa)| \\ -(q_{K,L}^{n+1})^- |f(u_L^{n+1}) - f(\kappa)| \end{array} \right] & - \\
\delta t^n \displaystyle\sum_{L \in \mathcal{N}_K} \tau_{K|L} \left(|\varphi(u_L^{n+1}) - \varphi(\kappa)| - |\varphi(u_K^{n+1}) - \varphi(\kappa)|\right) & - \\
\delta t^n \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext,K}} \tau_\sigma \left(|\varphi(\bar{u}_\sigma^{n+1}) - \varphi(\kappa)| - |\varphi(u_K^{n+1}) - \varphi(\kappa)|\right) & \leq 0
\end{array}
$$

Emploi des entropies de Krushkov

pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$, le schéma donne

$$
\begin{aligned}
&(|u_K^{n+1} - \kappa| - |u_K^n - \kappa|)\, m(K) && + \\
&\delta t^n \sum_{L \in \mathcal{N}_K} \left[\begin{array}{c} (q_{K,L}^{n+1})^+ |f(u_K^{n+1}) - f(\kappa)| \\ -(q_{K,L}^{n+1})^- |f(u_L^{n+1}) - f(\kappa)| \end{array} \right] && - \\
&\delta t^n \sum_{L \in \mathcal{N}_K} \tau_{K|L} (|\varphi(u_L^{n+1}) - \varphi(\kappa)| - |\varphi(u_K^{n+1}) - \varphi(\kappa)|) && - \\
&\delta t^n \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext,K}} \tau_\sigma (|\varphi(\bar{u}_\sigma^{n+1}) - \varphi(\kappa)| - |\varphi(u_K^{n+1}) - \varphi(\kappa)|) && \leq 0
\end{aligned}
$$

Preuve : $u_K^{n+1} = H_K(u_K^n, (u_L^{n+1})_{L \in \mathcal{N}_K})$ monotone

Monotonie du schéma $\Rightarrow$ unicité de u_K^{n+1}

Emploi des entropies $\eta(\varphi(u))$

Emploi des entropies $\eta(\varphi(u))$

$\eta \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, avec $\eta'' \geq 0$
μ et ν dans $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ avec $\mu' = \eta'(\varphi)$ et $\nu' = \eta'(\varphi) f'$
schéma donne

Emploi des entropies $\eta(\varphi(u))$

$\eta \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, avec $\eta'' \geq 0$
μ et ν dans $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec $\mu' = \eta'(\varphi)$ et $\nu' = \eta'(\varphi) f'$
schéma donne
$\exists (u_{K,L}^{n+1})_{L\in\mathcal{N}_K}$ avec $u_{K,L}^{n+1} \in (u_K^{n+1} \perp u_L^{n+1}, u_K^{n+1} \top u_L^{n+1})$

$$\begin{array}{ll}
(\mu(u_K^{n+1}) - \mu(u_K^n))\, m(K) & + \\
\delta t^n \displaystyle\sum_{L\in\mathcal{N}_K} [(q_{K,L}^{n+1})^+ \nu(u_K^{n+1}) - (q_{L,K}^{n+1})^- \nu(u_L^{n+1})] & - \\
\delta t^n \displaystyle\sum_{L\in\mathcal{N}_K} \tau_{K|L}(\eta(\varphi(u_L^{n+1})) - \eta(\varphi(u_K^{n+1}))) & - \\
\delta t^n \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{ext,K}} \tau_\sigma(\eta(\varphi(\bar{u}_\sigma^{n+1})) - \eta(\varphi(u_K^{n+1}))) & + \\
\dfrac{\delta t^n}{2} \displaystyle\sum_{L\in\mathcal{N}_K} \tau_{K|L}\eta''(\varphi(u_{K,L}^{n+1}))(\varphi(u_L^{n+1}) - \varphi(u_K^{n+1}))^2 & + \\
\dfrac{\delta t^n}{2} \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{ext,K}} \tau_\sigma\eta''(\varphi(u_{K,\sigma}^{n+1}))(\varphi(\bar{u}_\sigma^{n+1}) - \varphi(u_K^{n+1}))^2 & \leq \quad 0
\end{array}$$

Limite du schéma

emploi des inégalités ci-dessus
multiplier par fonction $\psi(X_K, t^n) \geq 0$
utiliser $u \rightharpoonup \widehat{u}$ n.l.f.$\star$ et $\zeta(u) \rightarrow \zeta(\widehat{u})$

donne ...

Inégalités continues, limites du schéma

Inégalités continues, limites du schéma

$\widehat{u} \in L^{\infty}(\Omega \times (0,T) \times (0,1))$

Inégalités continues, limites du schéma

$\widehat{u} \in L^\infty(\Omega \times (0,T) \times (0,1))$
$\varphi(\widehat{u}) - \varphi(\bar{u}) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ (indépendante de $\alpha \in [0,1]$)

Inégalités continues, limites du schéma

$\widehat{u} \in L^\infty(\Omega \times (0,T) \times (0,1))$

$\varphi(\widehat{u}) - \varphi(\bar{u}) \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ (indépendante de $\alpha \in [0,1]$)

$$\int_{\Omega\times(0,T)} \left[\begin{array}{l} \int_0^1 \mu(\widehat{u}(x,t,\alpha))d\alpha\ \psi_t(x,t) + \\ \int_0^1 \nu(\widehat{u}(x,t,\alpha))d\alpha\ \mathbf{q}(x,t)\cdot\nabla\psi(x,t) \\ -\nabla\eta(\varphi(\widehat{u})(x,t))\cdot\nabla\psi(x,t) \\ -\eta''(\varphi(\widehat{u})(x,t))(\nabla\varphi(\widehat{u})(x,t))^2\psi(x,t) \end{array} \right] dxdt$$

$$+ \int_\Omega \mu(u_0(x))\psi(x,0)dx \geq 0,$$

$\forall\ \psi \in \mathcal{D}^+(\Omega \times [0,T)),\ \forall \eta \in C^2(\mathbb{R}),$

$\eta'' \geq 0,\ \mu' = \eta'(\varphi(\cdot)),\ \nu' = \eta'(\varphi(\cdot))f'(\cdot).$

Inégalités continues, limites du schéma

$\widehat{u} \in L^\infty(\Omega \times (0,T) \times (0,1))$

$\varphi(\widehat{u}) - \varphi(\bar{u}) \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$ (indépendante de $\alpha \in [0,1]$)

$$\int_{\Omega\times(0,T)} \left[\begin{array}{l} \int_0^1 \mu(\widehat{u}(x,t,\alpha))d\alpha\ \psi_t(x,t) + \\ \int_0^1 \nu(\widehat{u}(x,t,\alpha))d\alpha\ \mathbf{q}(x,t)\cdot\nabla\psi(x,t) \\ -\nabla\eta(\varphi(\widehat{u})(x,t))\cdot\nabla\psi(x,t) \\ -\eta''(\varphi(\widehat{u})(x,t))(\nabla\varphi(\widehat{u})(x,t))^2\psi(x,t) \end{array} \right] dxdt$$

$$+ \int_\Omega \mu(u_0(x))\psi(x,0)dx \geq 0,$$

$\forall\ \psi \in \mathcal{D}^+(\Omega \times [0,T))$, $\forall \eta \in C^2(\mathbb{R})$,

$\eta'' \geq 0$, $\mu' = \eta'(\varphi(\cdot))$, $\nu' = \eta'(\varphi(\cdot))f'(\cdot)$.

et...

Inégalités continues, limites du schéma

Cermics, novembre 2003

Inégalités continues, limites du schéma

$$\int_{\Omega\times(0,T)} \left[\begin{array}{l} \int_0^1 |\widehat{u}(x,t,\alpha)-\kappa| d\alpha\ \psi_t(x,t) + \\ \int_0^1 (f(\widehat{u}(x,t,\alpha)\top\kappa) - f(\widehat{u}(x,t,\alpha)\bot\kappa))d\alpha \\ \times\mathbf{q}(x,t)\cdot\nabla\psi(x,t) \\ -\nabla|\varphi(\widehat{u})(x,t)-\varphi(\kappa)|\cdot\nabla\psi(x,t) \end{array} \right] dxdt$$

$$+\int_\Omega |u_0(x)-\kappa|\psi(x,0)dx \geq 0,$$

$$\forall\ \psi\in\mathcal{D}^+(\Omega\times[0,T)),\ \forall\kappa\in\mathbb{R}.$$

Plan

1. Motivations

2. Schéma de volumes finis

3. Résultats de convergence et compacité

4. Résultat d'unicité

Le résultat d'unicité

Le résultat d'unicité

$\widehat{u}$ et $\widehat{v}$ deux fonctions vérifiant les 2 inégalités

Le résultat d'unicité

$\widehat{u}$ et $\widehat{v}$ deux fonctions vérifiant les 2 inégalités
alors $\widehat{u}(x,t,\alpha) = \widehat{v}(x,t,\beta)$ p.p. x,t,α,β
$\Rightarrow$ $\widehat{u}$ ne dépend pas de α

Le résultat d'unicité

$\widehat{u}$ et $\widehat{v}$ deux fonctions vérifiant les 2 inégalités
alors $\widehat{u}(x,t,\alpha) = \widehat{v}(x,t,\beta)$ p.p. x,t,α,β
$\Rightarrow$ $\widehat{u}$ ne dépend pas de α

Preuve.
technique du dédoublement de variables (Krushkov)

Le résultat d'unicité

$\widehat{u}$ et $\widehat{v}$ deux fonctions vérifiant les 2 inégalités
alors $\widehat{u}(x, t, \alpha) = \widehat{v}(x, t, \beta)$ p.p. x, t, α, β
$\Rightarrow$ $\widehat{u}$ ne dépend pas de α

Preuve.
technique du dédoublement de variables (Krushkov)
traitt des termes parab. non linéaires (Carrillo)

Le résultat d'unicité

$\widehat{u}$ et $\widehat{v}$ deux fonctions vérifiant les 2 inégalités
alors $\widehat{u}(x,t,\alpha) = \widehat{v}(x,t,\beta)$ p.p. x,t,α,β
$\Rightarrow$ $\widehat{u}$ ne dépend pas de α

Preuve.
technique du dédoublement de variables (Krushkov)
traitt des termes parab. non linéaires (Carrillo)
et du travail...

Conséquences du résultat d'unicité

Conséquences du résultat d'unicité

$Q \subset \mathbb{R}^k$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(Q)$ avec
$u_n \rightharpoonup \widehat{u} \in L^\infty(Q \times (0,1))$ n.l.f.$\star$

Conséquences du résultat d'unicité

$Q \subset \mathbb{R}^k$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(Q)$ avec
$u_n \rightharpoonup \widehat{u} \in L^\infty(Q \times (0,1))$ n.l.f.$\star$
$\widehat{u}$ ne dépend pas de α

Conséquences du résultat d'unicité

$Q \subset \mathbb{R}^k$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^\infty(Q)$ avec
$u_n \rightharpoonup \widehat{u} \in L^\infty(Q \times (0,1))$ n.l.f.$\star$
$\widehat{u}$ ne dépend pas de α

$\Rightarrow u_n \to \widehat{u}$ ds $L^p(Q)$ pour tout $p \geq 1$.

Conséquences du résultat d'unicité

$Q \subset \mathbb{R}^k$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(Q)$ avec
$u_n \rightharpoonup \widehat{u} \in L^\infty(Q \times (0,1))$ n.l.f.$\star$
$\widehat{u}$ ne dépend pas de α

$\Rightarrow u_n \to \widehat{u}$ ds $L^p(Q)$ pour tout $p \geq 1$.

Preuve : $\int_Q (u_n - \widehat{u})^2 dx = \int_Q u_n^2 dx - 2 \int_Q u_n \widehat{u} dx + \int_Q \widehat{u}^2 dx$
n.l.f.$\star$: $\int_Q u_n^2 dx \to \int_Q \int_0^1 \widehat{u}(x,\alpha)^2 d\alpha dx = \int_Q \widehat{u}^2 dx$

Conséquences du résultat d'unicité

$Q \subset \mathbb{R}^k$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(Q)$ avec
$u_n \rightharpoonup \widehat{u} \in L^\infty(Q \times (0,1))$ n.l.f.$\star$
$\widehat{u}$ ne dépend pas de α

$\Rightarrow u_n \to \widehat{u}$ ds $L^p(Q)$ pour tout $p \geq 1$.

Preuve : $\int_Q (u_n - \widehat{u})^2 dx = \int_Q u_n^2 dx - 2\int_Q u_n \widehat{u} dx + \int_Q \widehat{u}^2 dx$
n.l.f.$\star$: $\int_Q u_n^2 dx \to \int_Q \int_0^1 \widehat{u}(x,\alpha)^2 d\alpha dx = \int_Q \widehat{u}^2 dx$
$u_n \to \widehat{u}$ ds $L^2(Q)$
u_n bornées et Q borné $\Rightarrow u_n \to \widehat{u}$ ds $L^p(Q)$

Conséquences du résultat d'unicité

$Q \subset \mathbb{R}^k$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(Q)$ avec
$u_n \rightharpoonup \hat{u} \in L^\infty(Q \times (0,1))$ n.l.f.$\star$
$\hat{u}$ ne dépend pas de α

$\Rightarrow u_n \to \hat{u}$ ds $L^p(Q)$ pour tout $p \geq 1$.

Preuve : $\int_Q (u_n - \hat{u})^2 dx = \int_Q u_n^2 dx - 2\int_Q u_n \hat{u} dx + \int_Q \hat{u}^2 dx$
n.l.f.$\star$: $\int_Q u_n^2 dx \to \int_Q \int_0^1 \hat{u}(x,\alpha)^2 d\alpha dx = \int_Q \hat{u}^2 dx$
$u_n \to \hat{u}$ ds $L^2(Q)$
u_n bornées et Q borné $\Rightarrow u_n \to \hat{u}$ ds $L^p(Q)$

unicité de la limite $\Rightarrow$ tte la suite converge.

Conclusions

Cermics, novembre 2003

Conclusions

schéma de volumes finis simple à écrire

Conclusions

schéma de volumes finis simple à écrire
outils de compacité complexes

Conclusions

schéma de volumes finis simple à écrire
outils de compacité complexes
outils d'analyse complexes