Options américaines et problème de frontière libre

Rapuch Grégory
EHESS et CREST
rapuch@ensae.fr

1 options américaines

1.0.0.1 Les options Un put américain donne la possibilité à tout moment jusqu'à la **maturité** T de vendre un actif à un prix determiné K (strike).

Profit réalisé si exercé à t **Payoff** : $\psi(S_t) = (K - S_t)_+$

Prix d'une telle option

exercer au meilleur moment

1.0.0.2 Le modèle

Options portant sur plusieurs actifs sous jacents $S_t^1, .., S_t^n$

Le Payoff dépend uniquement du prix des actifs à la date d'exercice.

Exemple : Option d'échange $\psi(S_t^1, S_t^2) = (S_t^1 - S_t^2)_+$

$X_t = (ln(s_t^1), .., ln(s_t^n))$
vérifiant une EDS

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

Exemple : Black-Scholes

$$dX_t^i = (r - \delta_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}^2)dt + \sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}dW_t^j$$

Notation : ψ fonction payoff

$u(t,x)$ la valeur de l'option et $\mathcal{L}^t$ l'opérateur de diffusion (dépendant du temps t)

$$\mathcal{L}^t f = \frac{1}{2}\sum a_{ij}\partial^2_{ij} f + \sum b_i \partial_i f - rf$$

avec $(a_{ij}) = \dfrac{\sigma\sigma^*}{2}$ et r taux d'interêt instantané

$\Theta_{t,T}$ est l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans $[t,T]$

2 Différents points de vue

2.0.0.3 Contrôle Stochastique, arrêt optimal

Bensoussan [1984]

Karatzas[1988]

$$u(t,x) := \sup_{\theta \in \Theta_{t,T}} E(e^{-\int_t^\theta r(s)ds} \psi(X_\theta^{t,x}))$$

$X_s^{t,x}$ est la solution de l'EDS avec condition initiale à $s = t$
$X_t^{t,x} = x$.

De plus il existe un temps d'arrêt optimal

$$\tau^* = \inf\{s \in [t,T] \mid \; u(s, X_s^{t,x}) = \psi(X_s^{t,x})\}$$

$\rightarrow$ **Région d'exercice**

$$\mathcal{E} = \{(t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}^n / \quad u(t,x) = \psi(x)\}$$

$\rightarrow$ **région de continuation**

$$\mathcal{C} = \{(t,x) \in [0,T[\times \mathbb{R}^n / \quad u(t,x) > \psi(x)\}$$

$\rightarrow$ **Frontière libre**

$$\partial \mathcal{E}$$

2.0.0.4 **Problème de frontière libre** Mac Kean [1965] ; Van Moerbecke [1974]

u est "solution" du système parabolique non linéaire suivant

$$\begin{cases} u(T,.) = \psi(.); \\ \partial_t u + Lu = 0 \ sur \ \mathcal{C} \\ u(t,x) > \psi(x) \ sur \ \mathcal{C} \\ u(t,x) = \psi(x) \ sur \ \mathcal{E} \\ \nabla u(t,x) = \nabla \psi(t,x) \ sur \ \partial\mathcal{E} \end{cases}$$

La dernière condition est la condition de "smooth-fit"

2.0.0.5 Inéquations variationnelles
Bensoussan-Lions [1982] Jaillet-Lamberton-Lapeyre [1990]

2.0.0.6 Problème de l'obsatcle, solutions de viscosité
Lions P.L [1983]

$$(S)\begin{cases} u(T,.) = \psi(.); \\ Max(\partial_t u + Lu = 0, \psi - u) = 0 \end{cases}$$

Definition 1. *On dit que u est une sous-solution au sens de viscosité de (S)*

si u est semi-continue supérieurement (scs) et que

$$\begin{cases} u(T,.) \leq \psi(.) \ in \ U \\ Max(\partial_t \phi(t_0,x_0) + L\phi(t_0,x_0), \psi(t_0,x_0) - \phi(t_0,x_0)) \geq 0 \\ in (0,T) \times U \end{cases}$$

dès que $\phi \in C^{1,2}$, $u(t_0,x_0) = \phi(t_0,x_0)$, *et* $u \leq \phi$ *dans un voisinage de* (t_0,x_0) *i.e si* $u - \phi$ *présente un minimum local en* (t_0,x_0) *u sursolution de viscosité : u semi continue inférieurement et signes contraires.*

Une solution de viscosité est à la fois une sursolution et une sous-solution.

3 Problématiques

3.0.0.7 Lien entre les différents points de vue

3.0.0.8 Localisation de la région d'exercice Determiner la région d'exercice

$$\mathcal{E} = \{(t, x) | u(t, x) = \psi(x)\}$$

Réponse partielle dans le cas d'une diffusion homogène (Villeneuve [1999])

(1) $\mathcal{E}$ est vide ssi $\mathcal{L}\psi$ est une mesure positive

(2) Si $\mathcal{L}\psi$ est une mesure positive sur un domain $U \subset R^n$ si $\psi \in C^2(V)$ $V \subset U$ et $L\psi(x) > 0 \forall x \in V$ alors : $\mathcal{E} \bigcap([0, T] \times U) = \emptyset$

Remarque 1. *Premier résultat dans le cadre d'une diffusion homogène et deuxième dans le cas de coefficients constants.*

Si ψ est convexe $u(t,.)$ est il convexe ?

3.0.0.9 Régularité de la frontière libre de la région d'exercice

Kampen [2003]

Blanchet-Monneau

3.0.0.10 Influence des paramètres sur le prix de l'option

Par exemple la volatilité ou le paramètre de corrélation s'il s'agit d'une option portant sur deux actifs.

(Touzi 1999) : Le put américain croit avec la volatilité dans un modèle à volatilité stochastique.

4 Hypothèses

4.0.0.11 Cadre thèse Villeneuve La diffusion est homogène

(H1) : ellipticité $c_0 I \leq \sigma\sigma^* \leq C_0 I$

(H2) : b est C^1 à dérivées bornées, σ est une fonction de classe C^1 à dérivées bornées et admettant des dérivées secondes bornées.

(H3) : ψ est localement Lipschitz positive et

$$\exists M > 0; \psi(x) + \sum_i |\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x)| \leq M e^{M||x||}$$

4.0.0.12 Cadre de l'exposé

Diffusion quelconque

(H2') : b et σ bornés et localement Lipschitz

(H3') : ψ est continue positive et

$$\exists M > 0; \psi(x) \leq M e^{M||x||}$$

5 Méthodes : principes de comparaison

Point de vue des solutions de viscosité.

Il s'agit de comparer une sous solution et une sur solution.

Difficultés : Manque de régularité
Non linéarité des solutions de visosité
un principe du maximum n'implique pas un principe de comparaison

5.1 Comparaison sur un domaine borné

Proposition 1.

$$(S_0)\begin{cases} Max(\psi - u, \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}^t u) = 0 \quad sur\ [0,T[\times\Omega \\ \forall x \in \Omega, \quad u(T,x) = \theta(T,x) \\ \forall x \in \partial\Omega,\ t \in [0,T[, \quad u(t,x) = \theta(t,x) \end{cases}$$

Si Ω est un domaine borné, u (resp. v) une sous solution de viscosité (resp. une sursolution) de S_0

Alors, si $v \geq u$ sur la frontière parabolique $\partial\Omega_p$ de Ω

$v \geq u$ sur $\Omega \times [0,T]$

5.2 Comparaison sur $\mathbb{R}^n$

Theoreme 1. *Soit u (resp.v) a sous-solution (resp. a sursolution) de*

$$S\begin{cases} Max(\psi - w, \frac{\partial w}{\partial t} + \mathcal{L}^t w) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}^n, w(T,x) = \psi(x) \end{cases}$$

tq $\forall x \in \mathbb{R}^n \; u(T,x) \leq v(T,x)$.

Hypothèse de ***Croissance exponentiel****.*

$$\begin{cases} |u(t,x)| \leq Ce^{\lambda|x|} \\ |v(t,x)| \leq Ce^{\lambda|x|} \\ |\psi(x)| \leq Ce^{\lambda|x|} \end{cases}$$

Alors, $\forall (t,x) \; u(t,x) \leq v(t,x)$

Première consequence

Proposition 2. $u(t,x) := \sup_{\theta \in \Theta_{t,T}} E(e^{-\int_t^\theta r(s)ds}\psi(X_\theta^{t,x}))$ *est l'unique solution du problème de l'obstacle*

5.3 Comparaison stricte

Theoreme 2. *Soit U un domaine $\mathbb{R}^n$.*

Soit u(resp.v) une sous-solution au sens de viscosité (resp. une sursolution)

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + \mathcal{L}^t w = 0 \\ \forall x \in U; w(T,x) = \psi(T,x) \end{cases}$$

telles que

$u(t,x) \leq v(t,x)\ \forall t \in [0,T], x \in U$. *Si il existe* $(t_0,x_0) \in]0,T[\times U$ *tel que* $u(t_0,x_0) = v(t_0,x_0)$, *alors* $\forall (t,x) \in [t_0,T[\times U\ u(t,x) = v(t,x)$.

6 Généralisation des résultats de Villeneuve

Theoreme 3. *On suppose* $\forall t \in [0, T[\ \mathcal{L}^t\psi$ *est positive au sens de viscosité sur un domaine* U *(i.e.* ψ *sous-solution de* $\mathcal{L}^t w = 0$ *mais n'est pas une solution), then*

$$\forall (t, x) \in [0, T[\times U \ \ u(t, x) > \psi(x).$$

i.e

$$\mathcal{E} \cap ([0, T[\times U) = \emptyset.$$

Remarque 2. *En particulier, avec* $U = \mathbb{R}^n$

$\forall t \in [0, T[;\ \mathcal{L}^t\psi > 0$ *au sens de viscosité alors* $\mathcal{E} = \emptyset$

L'option est alors européenne

Réciproque

Proposition 3. *si* $\mathcal{E} = \emptyset$ *alors pour* $t = T$ $\mathcal{L}^T \psi \geq 0$ *au sens des distributions sur* $\mathbb{R}^n$*.*

Autres propriétés :

Proposition 4. *(1)* ψ *bornée* $\Rightarrow \mathcal{E} \neq \emptyset$
(2) $\mathcal{E} \subset \{(t, x) : \psi(x) > 0 \}$*.*

7 Influence des paramètres et convexité

Ici on ne travaille plus sur le log du prix mais sur le prix lui même qui doit vérifié

$$ds_t = s_t\mu(t)dt + s_t\sigma(t, s_t)dW_t$$

(Abus de notations)

Proposition 5. *Supposons ψ convexe, alors $\forall t \in [0, T[$ $u(t, .)$ est convexe*

Idée : Approximation par un problème pénalisé que l'on dérive 2 fois.

Proposition 6. *Le prix dune option américaine ayant un payoff convexe augmente lorsque la volatilité augmente.*

Encore un principe de comparaison.

8 exemples

1) Généralisation d'un résultat de Merton : Le call américain sur un actif sans dividendes est confondu avec le call européen

2) Le call sur le minimum de deux actifs
$\psi(x_1, x_2) = (min(e^{x_1}, e^{x_2}) - K)_+)$ $\mathcal{E} \subset \{x_1 = x_2\} \times]0, T[$.