Séminaire CERMICS

Problèmes asymptotiques pour les équations de type Hamilton-Jacobi-Bellman

28 janvier 2004 CERMICS

Olivier Alvarez, Université de Rouen

Travail en collaboration avec M. Bardi (Université de Padoue)

Problème

On fixe $\epsilon > 0$.

$$\begin{cases} u_t^\epsilon + H\Big(x, \frac{x}{\epsilon}, Du^\epsilon, D^2u^\epsilon\Big) = 0 \quad (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u^\epsilon(0, x) = h\Big(x, \frac{x}{\epsilon}\Big) \quad \mathbb{R}^n. \end{cases} \qquad (\mathrm{HJ}_\epsilon)$$

Hypothèses

- Problème 1-périodique en $y = \frac{x}{\epsilon}$, i.e. $f(y+k) = f(y)$, $k \in \mathbb{Z}^n$.
- Condition initiale $h \in BUC(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.
- Hamiltonien de type Hamilton-Jacobi-Bellman

$$H(x,y,p,X) = \sup_{\alpha \in A} \{L_\alpha(x,y,p,X) - f_\alpha(x,y)\}$$

$$L_\alpha(x,y,p,X) = -\,\mathrm{tr}\left(a_\alpha(x,y)X\right) - b_\alpha(x,y) \cdot p,$$

$$a_\alpha(x,y) = \sigma_\alpha(x,y)\sigma_\alpha^T(x,y)/2$$

Hypothèses

- A compact de $\mathbb{R}^m$;
- les fonctions sont continues en (α, x, y);
- $\sigma_\alpha \in W^{1,\infty}$, $b_\alpha \in W^{1,\infty}$, $f_\alpha \in BUC$ uniformément en α.

Problème

$$\begin{cases} u^\epsilon_t + H\big(x, \frac{x}{\epsilon}, Du^\epsilon, D^2u^\epsilon\big) = 0 & (0,+\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u^\epsilon(0,x) = h\big(x, \frac{x}{\epsilon}\big) & \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

En général, $u^\epsilon(t,x) \simeq u\big(t, x, \dfrac{x}{\epsilon}\big)$.

Problème

$$\begin{cases} u_t^\epsilon + H\big(x, \frac{x}{\epsilon}, Du^\epsilon, D^2u^\epsilon\big) = 0 & (0,+\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u^\epsilon(0,x) = h\big(x, \frac{x}{\epsilon}\big) & \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

En général, $u^\epsilon(t,x) \simeq u\big(t,x,\dfrac{x}{\epsilon}\big)$.

On veut $u^\epsilon(t,x) \longrightarrow u(t,x)$ fortement.

Problème

$$\begin{cases} u_t^\epsilon + H\Big(x, \frac{x}{\epsilon}, Du^\epsilon, D^2u^\epsilon\Big) = 0 & (0,+\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u^\epsilon(0,x) = h\Big(x, \frac{x}{\epsilon}\Big) & \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

En général, $u^\epsilon(t,x) \simeq u\Big(t, x, \dfrac{x}{\epsilon}\Big)$.

On veut $u^\epsilon(t,x) \longrightarrow u(t,x)$ fortement.

$$\begin{cases} u_t + \overline{H}(x, Du, D^2u) = 0 & (0,+\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = \overline{h}(x) & \mathbb{R}^n. \end{cases} \qquad (\overline{\mathrm{HJ}})$$

Quantités effectives $\overline{H}$ et $\overline{h}$ à déterminer.

Contrôle optimal

- Contrôle : $\alpha_s \in A$.
- Dynamique :

$$dx_s = b_{\alpha_s}\big(x_s, \frac{x_s}{\epsilon}\big)\, ds + \sigma_{\alpha_s}\big(x_s, \frac{x_s}{\epsilon}\big)\, dW_s,\ x_0 = x$$

- Fonction valeur :

$$u^\epsilon(t,x) = \inf\{E\big[\int_0^t f_{\alpha_s}\big(x_s, \frac{x_s}{\epsilon}\big)\, ds\big] + E\big[h\big(x_t, \frac{x_t}{\epsilon}\big)\big]\}$$

Contrôle optimal

PROP La fonction valeur u^ϵ est l'unique solution de viscosité BUC de (HJ$_\epsilon$).
De plus, on a l'estimation a priori

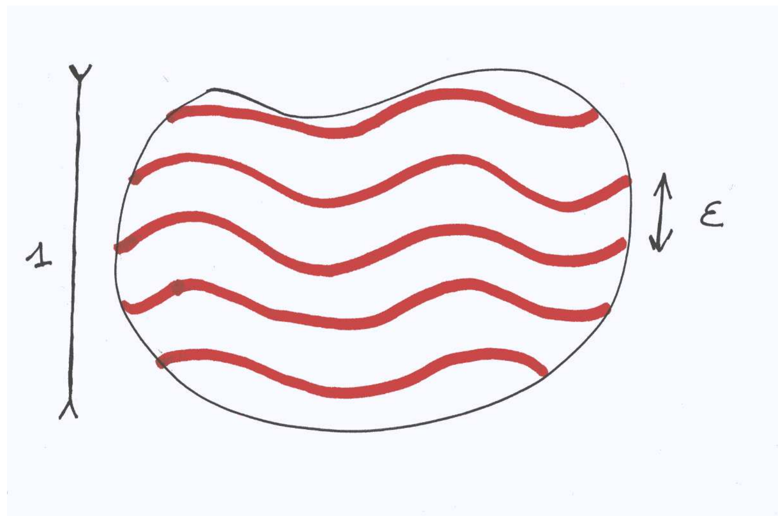
$$\|u^\epsilon(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leq C(1+t)$$

Solutions de viscosité

- Introduit par M. Crandall, P.-L. Lions (1981).
- Solution continue d'équation parabolique dégénérée.
- Unicité = principe de comparaison.
  Si $u_t + H[u] \leq 0$, $v_t + H[v] \geq 0$, $u(0, \cdot) \leq v(0, \cdot)$, alors $u(t, \cdot) \leq v(t, \cdot)$ pour tout $t \geq 0$.
- Stable (convergence uniforme sur les compacts).
- Existence.
- Solution physique en calcul des variations.

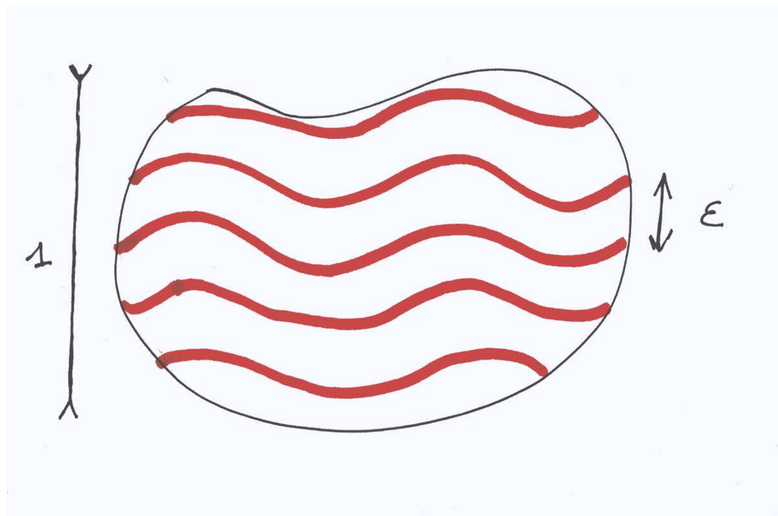
Homogénéisation

- Problème à deux échelles: $x \in \mathbb{R}^n$ et $y = \frac{x}{\epsilon} \in \mathbb{T}^n$.
- Matériau composite.



Homogénéisation

- Problème à deux échelles: $x \in \mathbb{R}^n$ et $y = \frac{x}{\epsilon} \in \mathbb{T}^n$.
- Matériau composite.



- $u^\epsilon(t,x) \to u(t,x)$ fortement.
- Les quantités effectives $\overline{H}$ et $\overline{h}$ décrivent les propriétés macroscopiques du matériau

Perturbations singulières

Dynamique à deux échelles.

- Variable lente

$$dx_s = b_{\alpha_s}(x_s, y_s)\, ds + \sigma_{\alpha_s}(x_s, y_s)\, dW_s$$

- Variable rapide ($\gamma > 0$)

$$dy_s = \epsilon^{-1}\, b'_{\alpha_s}(x_s, y_s)\, ds + \epsilon^{-\gamma}\, \sigma'_{\alpha_s}(x_s, y_s)\, dW_s$$

Perturbations singulières

Dynamique à deux échelles.

- Variable lente

$$dx_s = b_{\alpha_s}\big(x_s, y_s\big)\, ds + \sigma_{\alpha_s}\big(x_s, y_s\big)\, dW_s$$

- Variable rapide ($\gamma > 0$)

$$dy_s = \epsilon^{-1}\, b'_{\alpha_s}\big(x_s, y_s\big)\, ds + \epsilon^{-\gamma}\, \sigma'_{\alpha_s}\big(x_s, y_s\big)\, dW_s$$

- $u^\epsilon(t, x, y) \to u(t, x)$ fortement.

Résultat principal

- (H1) Uniforme ellipticité. Pour tout α, x, y, $a_\alpha(x,y) \geq \nu I$, avec $\nu > 0$.
- (H2) Non résonance. Pour tout α, $a_\alpha(x,y) = \alpha_a$ et, pour tout $k \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}$, il existe $\alpha \in A$ tel que $a_\alpha k \neq 0$.

Résultat principal

- (H1) Uniforme ellipticité. Pour tout α, x, y, $a_\alpha(x,y) \geq \nu I$, avec $\nu > 0$.
- (H2) Non résonance. Pour tout α, $a_\alpha(x,y) = \alpha_a$ et, pour tout $k \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}$, il existe $\alpha \in A$ tel que $a_\alpha k \neq 0$.

THÉORÈME Sous (H1) ou (H2), $u^\epsilon \to u$ uniformément sur les compacts de $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$.

u est l'unique solution de viscosité de ($\overline{\text{HJ}}$) pour des données effectives bien déterminées $\overline{H}$ et $\overline{h}$.

Remarques

Quelques remarques.

- Couche limite initiale.
- L'hypothèse (H2) est une condition nécessaire et suffisante.
- Problèmes déterministes.

Références

- Homogénéisation linéaire : Bensoussan, J.-L. Lions, Papanicolaou (1978)
- Homogénéisation HJB : P.-L. Lions, Papanicolaou, Varadhan (1986), Evans (1992)
- Problèmes ergodiques : Arisawa, Lions (1998)
- Perturbations singulières HJB : OA, MB (2001), (2003)
- Homogénéisation stochastique : Souganidis (1999), Lions, Souganidis (2003)

Etapes de la démonstration

- *Etape 1* Définition de $\overline{H}$
  Problème ergodique en y.

Etapes de la démonstration

- *Etape 1* Définition de $\overline{H}$
  Problème ergodique en y.
- *Etape 2* Définition de $\overline{h}$
  Stabilisation en y.

Etapes de la démonstration

- *Etape 1*   Définition de $\overline{H}$
  Problème ergodique en y.
- *Etape 2*   Définition de $\overline{h}$
  Stabilisation en y.
- *Etape 3*   Résolution de ($\overline{\text{HJ}}$)
  Régularité de $\overline{H}$.

Etapes de la démonstration

- *Etape 1*   Définition de $\overline{H}$
  Problème ergodique en y.
- *Etape 2*   Définition de $\overline{h}$
  Stabilisation en y.
- *Etape 3*   Résolution de ($\overline{\text{HJ}}$)
  Régularité de $\overline{H}$.
- *Etape 4*   Preuve de la convergence
  Méthode du développement asymptotique.

Etape 1. Problème ergodique

On fixe les variables lentes $\overline{x}$, $\overline{p}$, $\overline{X}$.

$$\begin{cases} w_t + H(\overline{x}, y, \overline{p}, \overline{X} + D^2 w) = 0 \quad (0, +\infty) \times \mathbb{T}^n, \\ \\ w(0, y) = 0 \quad \mathbb{T}^n. \end{cases} \qquad \text{(HJ)}$$

Etape 1. Problème ergodique

On fixe les variables lentes $\overline{x}$, $\overline{p}$, $\overline{X}$.

$$\begin{cases} w_t + H(\overline{x}, y, \overline{p}, \overline{X} + D^2 w) = 0 \quad (0, +\infty) \times \mathbb{T}^n, \\ w(0, y) = 0 \quad \mathbb{T}^n. \end{cases} \tag{HJ}$$

ERGODICITÉ (Arisawa, Lions)
Sous (H1) ou (H2), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\frac{w(t,y)}{t} \to -\lambda \quad \text{uniformément en } y\text{, quand } t \to \infty.$$

On pose $\overline{H}(\overline{x}, \overline{p}, \overline{X}) = \lambda$.

Etape 1. Problème ergodique : remarques

- Lien avec la théorie ergodique classique pour une diffusion.
- Condition nécessaire pour l'ergodicité. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\chi \in C(\mathbb{T}^n)$ tel que

$$H(\overline{x}, y, \overline{p}, \overline{X} + D^2\chi) = \lambda, \quad \mathbb{T}^n \tag{PC}$$

Etape 1. Problème ergodique : preuve

- Problème stationnaire pour $\delta > 0$ petit.

$$\delta w_\delta + H(\overline{x}, y, \overline{p}, \overline{X} + D^2 w_\delta) = 0 \quad \mathbb{T}^n.$$

On veut $\delta w_\delta \to$ const uniformément quand $\delta \to 0$.

Etape 1. Problème ergodique : preuve

- Problème stationnaire pour $\delta > 0$ petit.

$$\delta w_\delta + \sup_\alpha \{ - \mathrm{tr}\left(a_\alpha(\overline{x}, y) D^2 w_\delta \right) - F_a(y) \} = 0 \quad \mathbb{T}^n.$$

  On veut $\delta w_\delta \to$ const uniformément quand $\delta \to 0$.

- Estimations a priori pour δw_δ. D'où $\delta w_\delta \to z$.

Etape 1. Problème ergodique : preuve

- Problème stationnaire pour $\delta > 0$ petit.

$$\delta w_\delta + \sup_\alpha \{ -\operatorname{tr}\left(a_\alpha(\overline{x}, y) D^2 w_\delta \right) - F_a(y) \} = 0 \quad \mathbb{T}^n.$$

  On veut $\delta w_\delta \to$ const uniformément quand $\delta \to 0$.

- Estimations a priori pour δw_δ. D'où $\delta w_\delta \to z$.
- Princ. du max. fort pour l'équation stationnaire $\sup_\alpha \{ -\operatorname{tr}\left(a_\alpha(x, y) D^2 z \right) \} = 0$, $\mathbb{T}^n$.

Etape 1. Problème ergodique : preuve

- Problème stationnaire pour $\delta > 0$ petit.

$$\delta w_\delta + \sup_\alpha \{- \text{tr}\left(a_\alpha(\overline{x}, y) D^2 w_\delta\right) - F_a(y)\} = 0 \quad \mathbb{T}^n.$$

  On veut $\delta w_\delta \to$ const uniformément quand $\delta \to 0$.
- Estimations a priori pour δw_δ. D'où $\delta w_\delta \to z$.
- Princ. du max. fort pour l'équation stationnaire $\sup_\alpha \{- \text{tr}\left(a_\alpha(x, y) D^2 z\right)\} = 0$, $\mathbb{T}^n$.
- Unicité de la limite constante z.

Etape 2. Stabilisation

$$\begin{cases} w'_t + \sup_\alpha \{ - \mathrm{tr} \left(a_\alpha(x,y) D^2 w' \right) \} = 0 & (0,+\infty) \times \mathbb{T}^n, \\ w'(0,y) = h(\overline{x}, y) & \mathbb{T}^n. \end{cases} \quad \text{(HJ)}$$

Etape 2. Stabilisation

$$\begin{cases} w'_t + \sup_\alpha \{ -\mathrm{tr}\left(a_\alpha(x,y) D^2 w' \right) \} = 0 & (0,+\infty) \times \mathbb{T}^n, \\ w'(0,y) = h(\overline{x}, y) & \mathbb{T}^n. \end{cases} \qquad \text{(HJ)}$$

STABILISATION (AL) (AB)
Sous (H1) ou (H2), il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$w'(t,y) \to \mu \quad \text{uniformément en } y \text{, quand } t \to \infty.$$

On pose $\overline{h}(\overline{x}) = \mu$.

Etape 3. Résolution de ($\overline{\text{HJ}}$)

PROP Sous (H1) ou (H2), il existe une unique solution u de

$$\begin{cases} u_t + \overline{H}(x, Du, D^2u) = 0 & (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) = \overline{h}(x) & \mathbb{R}^n. \end{cases} \qquad (\overline{\text{HJ}})$$

Etape 4. Développement asymptotique

THÉORÈME On a $u^\epsilon \to u$ uniformément sur les compacts de $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$.

- Méthode du développement asymptotique.
- Condition initiale ($t = 0$) $\quad u^\epsilon(t,x) \simeq w'(\frac{t}{\epsilon^2}, \frac{x}{\epsilon})$.
- Equation ($t > 0$) $\quad u^\epsilon(t,x) \simeq u(t,x) + \epsilon^2 w(\frac{x}{\epsilon})$.

Etape 4. Hypothèses simplificatrices

$$\begin{cases} u_t^\epsilon + H\left(\frac{x}{\epsilon}, D^2 u^\epsilon\right) = 0 & (0,+\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u^\epsilon(0,x) = h\left(\frac{x}{\epsilon}\right) & \mathbb{R}^n \end{cases} \qquad (\mathrm{HJ}_\epsilon)$$

avec

$$H(y,X) = \sup_\alpha\{-\operatorname{tr}\left(a_\alpha(y)X\right) - f_\alpha(y)\}.$$

On suppose toutes les fonctions régulières.

Etape 4. Condition initiale

$$w'_t + \sup_\alpha\{-\text{tr}\left(a_\alpha(y)D^2w'\right)\} = 0 \ (t>0), \ \ w'(0,y) = h(y)$$

On pose $v^\epsilon(t,x) = w'(\frac{t}{\epsilon^2}, \frac{x}{\epsilon})$.

On a

$$v^\epsilon(0,x) = h(\frac{x}{\epsilon}).$$

$$\begin{aligned} v^\epsilon_t + H\left(\frac{x}{\epsilon}, D^2v^\epsilon\right) &= \epsilon^{-2}w'_t + H\left(\frac{x}{\epsilon}, \epsilon^{-2}D^2w'\right) \\ &= \epsilon^{-2}w'_t + \epsilon^{-2}\sup_\alpha\{-\text{tr}\left(a_\alpha(\frac{x}{\epsilon})D^2w'\right)\} + O(1) \\ &= O(1) \end{aligned}$$

Etape 4. Condition initiale

D'où

$$
\begin{aligned}
u^\epsilon(t,x) &= v^\epsilon(t,x) + tO(1) \\
&= w'(\frac{t}{\epsilon^2}, \frac{x}{\epsilon}) + tO(1) \\
&\to \overline{h} + tO(1) \quad \text{quand } \epsilon \to 0 \ (t > 0) \\
&\to \overline{h} \quad \text{quand } t \to 0+
\end{aligned}
$$

Etape 4. Equation

On suppose $h = h(x)$. On note u la solution de ($\overline{\text{HJ}}$).
Pour (t, x) fixé, $X = D^2u(t, x)$,

$$H(y, X + D^2w) = \overline{H}(X), \quad \mathbb{T}^n$$

On pose

$$v^\epsilon(t, x) = u(t, x) + \epsilon^2 w\big(t, x, \frac{x}{\epsilon}\big)$$

Etape 4. Equation

$$v^\epsilon(0,x) = h(x) + O(\epsilon^2)$$

$$\begin{aligned}
v^\epsilon_t + H\Big(\frac{x}{\epsilon}, D^2 v^\epsilon\Big) \\
&= u_t + O(\epsilon^2) + H\Big(\frac{x}{\epsilon}, D^2u + D^2w + O(\epsilon)\Big) \\
&= u_t + H\Big(\frac{x}{\epsilon}, D^2u + D^2w\Big) + O(\epsilon) \\
&= u_t + \overline{H}(D^2u) + O(\epsilon) \\
&= O(\epsilon)
\end{aligned}$$

Etape 4. Equation

D'où

$$
\begin{aligned}
u^\epsilon(t,x) &= v^\epsilon(t,x) + tO(\epsilon) \\
&= u(t,x) + \epsilon^2 w\Big(t,x,\frac{x}{\epsilon}\Big) + tO(\epsilon) \\
&\to u(t,x) \quad \text{quand } \epsilon \to 0
\end{aligned}
$$