Théorème de Lax et Volumes Finis

Algorithmes Linéaires et Non Linéaires pour le Transport Instationnaire

Problème Modèle = Volumes Finis pour l'Advection Linéaire

$$(1) \qquad \begin{cases} \partial_t u = Au, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), & \end{cases}$$

$$Au = -\vec{a}.\vec{\nabla} u = -\mathrm{div}(\vec{a} u),$$

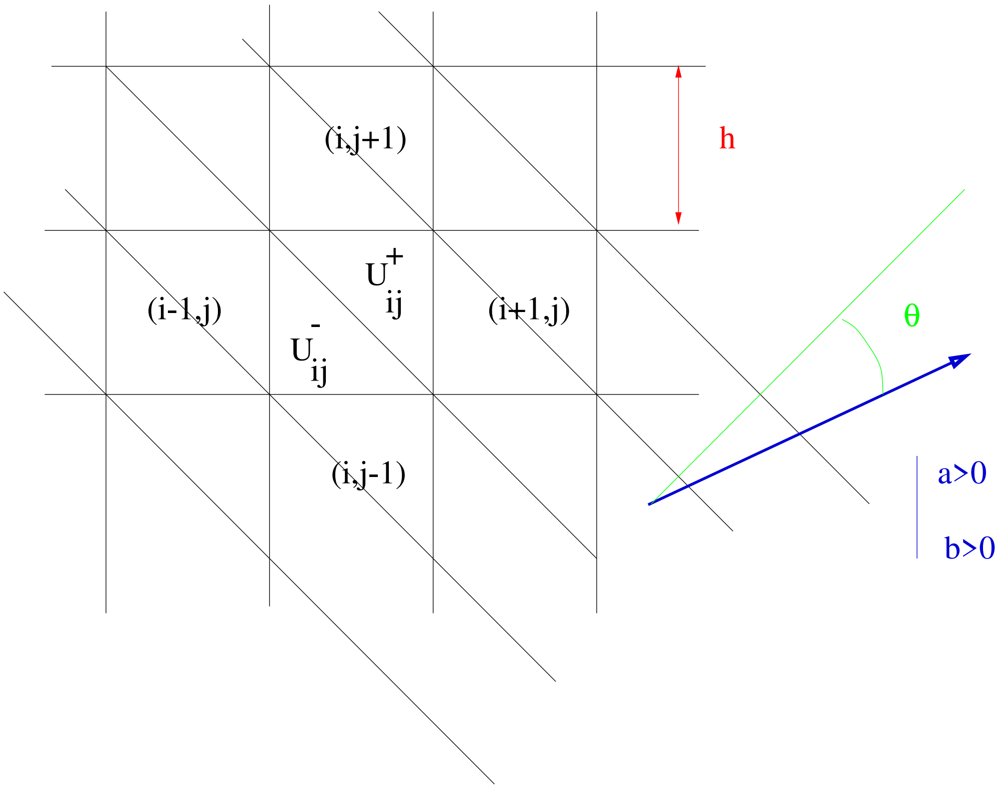

Figure 1: Maillage triangulaire

Le schéma est formellement non consistant

$$\frac{U_{ij}^{+,n+1} - U_{ij}^{+,n}}{2\Delta t} + (a+b)\frac{U_{ij}^{+,n} - U_{ij}^{-,n}}{h} = 0,$$

et

$$\frac{U_{ij}^{-,n+1} - U_{ij}^{-,n}}{2\Delta t} + a\frac{U_{ij}^{-,n} - U_{i-1,j}^{+,n}}{h}$$
$$+b\frac{U_{ij}^{-,n} - U_{i,j-1}^{-,n}}{h} = 0,$$

1 Cadre fonctionel

Où est le problème ? (Perte de consistance)

Soit V un espace de Banach $(||.||)$. On cherche $u(t) \in V$ solution du problème linéaire

$$(2) \qquad \begin{cases} \partial_t u = Au, & t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases}$$

On supose que ce problème est bien posé $u(t) = e^{At}u_0$, $||e^{At}|| \leq K, \forall t \in [0,T]$.

Soit V_h un espace de discrétisation de dimension finie $V_h \subset V$

$$(3) \qquad \begin{cases} \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} = A_h u_h^n, & n \geq 0, \\ u_h^0 = \Pi_h u_0 \in V_h. \end{cases}$$

L'opérateur approché est $A_h : V_h \to V_h$.

L'opérateur de projection sur le maillage (valeur moyenne) est $\Pi_h : V \to V_h$.

Stabilité

Bien sûr on suppose que la méthode est stable.
Il est naturel d'introduire la condition CFL.
Soit $\tau(h) : \mathbb{R}^{+,*} \to \mathbb{R}^{+,*}$: $\tau(h)$ dépend de l'équation et du maillage.

Si $\Delta t \leq \tau(h)$, alors

$$||(I + \Delta t A_h)^q|| \leq K, \quad \forall 0 \leq q\Delta t \leq T.$$

D'où

$$||u_h^n|| = ||(I + \Delta t A_h)^n \Pi_h u_0|| \leq C(T, u_0, K, ...).$$

Consistance (notion classique)

Soit

$$v_h^n = \Pi_h u(n\Delta t) \text{ et } e_h^n = v_h^n - u_h^n.$$

On a

$$(4) \qquad \begin{cases} \frac{e_h^{n+1} - e_h^n}{\Delta t} = A_h u_h^n + r_h^n, \quad n \geq 0, \\ e_h^0 = 0, \end{cases}$$

où r_h^n est l'erreur de troncature

$$r_h^n = \frac{v_h^{n+1} - v_h^n}{\Delta t} - A_h v_h^n.$$

On dit que le schéma est consistant si $||r_h^n|| = O(h^s)$, $s > 0$, uniformément en n.

Théorème de Lax

Si le schéma est stable et consistant alors il est convergent.

$$e_h^n = \Delta t \sum_{p=0}^{n-1} (I + \Delta t A_h)^{n-1-p} r_h^p,$$

$$||e_h^n|| = \Delta t \sum_{p=0}^{n-1} ||(I + \Delta t A_h)^{n-1-p}|| \times ||r_h^p||$$

$$||e_h^n|| \leq TKO(h^s).$$

Problème : on n'a pas la consistance pour les schémas de type Volumes Finis sur maillage quelconque !!!!

$$r_h^n = O(1) \text{ uniformément en } n, h.$$

[cf T. Gallouët]

Paradoxe explicite-implicite

Le schéma explicite est

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} \frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\Delta t} = A_h u_h^n, \quad n \geq 0, \\ u_h^0 = \Pi_h u_0 \in V_h. \end{cases}$$

Le schéma implicite est

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} \frac{v_h^{n+1}-v_h^n}{\Delta t} = A_h v_h^{n+1}, \quad n \geq 0, \\ v_h^0 = \Pi_h u_0 \in V_h. \end{cases}$$

La différence est $e = v - u$

$$\begin{cases} \frac{e_h^{n+1}-e_h^n}{\Delta t} = A_h e_h^n + (\Delta t A_h)\left(\frac{v_h^{n+1}-v_h^n}{\Delta t}\right), \quad n \geq 0, \\ e_h^0 = 0, \end{cases}$$

(7)

avec non consistance formelle car $\Delta t A_h = O(1)$ et $\frac{v_h^{n+1}-v_h^n}{\Delta t} = O(1)$.

Il y a là un paradoxe, car on sait bien que la différence entre le schéma implicite et le schéma explicite est petite et tend vers zéro avec h.

Une autre notion de consistance

(B.D. Math. of Comp.)

Supposons qu'il existe une suite de nombres $(\varepsilon_q) > 0$, tendant vers zéro $\varepsilon_q \to 0^+$, avec la majoration uniforme en p, h

$$||(I + \Delta t A_h)^q r_h^p|| \leq \varepsilon_q.$$

La condition $||(I + \Delta t A_h)^q r_h^p|| \leq \varepsilon_q$ impose une compatibilité de r_h^n avec l'opérateur discret A_h. On peut s'inspirer de l'exemple abstrait de non consistance

$$r_h^n = (\Delta t A_h) \left(\frac{v_h^{n+1} - v_h^n}{\Delta t} \right).$$

Lemme 1 *Supposons que*

$$\exists z_h^n \in V_h, r_h^n = (\tau(h) A_h) z_h^n$$

avec, uniformément en n, h, $||z_h^n|| = O(1)$. Supposons que $\nu = \frac{\Delta t}{\tau(h)}]0, 1[$. Alors

$$||(I + \Delta t A_h)^q r_h^p|| \leq \varepsilon_q = \frac{C(\nu)}{\sqrt{q+1}}.$$

Démonstration évidente

On pose $T_h = I + \tau(h)A_h$. La stabilité correspond à

$$||T_h^q|| \leq K, \quad 0 \leq q\Delta t \leq T.$$

La condition de compatibilité de l'erreur de troncature à

$$r_h^n = (\tau(h)A_h)z_h^n = (T_h - I)z_h^n.$$

D'où $\nu = \frac{\Delta t}{\tau(h)}$

$$(I + \Delta t A_h)^q \, r_h^n = ((1-\nu)I + \nu T_h)^q \, (T_h - I)z_h^n.$$

Un calcul précis de l'interaction destructive des coefficients des polynomes en T_h termine la preuve. Pour $\nu = \frac{1}{2}$, on a

$$\frac{1}{2^q} \sum \left| C_q^i - C_q^{i+1} \right| K \leq \frac{\text{Constante}}{\sqrt{q+1}} = \varepsilon_q.$$

Ordre de convergence

Reprenons la majoration de l'erreur

$$e_h^n = \Delta t \sum_{p=0}^{n-1} (I + \Delta t A_h)^{n-1-p} r_h^p,$$

$$||e_h^n|| \leq \Delta t \sum_{p=0}^{n-1} ||(I + \Delta t A_h)^{n-1-p} r_h^p||$$

$$||e_h^n|| \leq \Delta t \sum_{p=0}^{n-1} \frac{C}{\sqrt{q+1}} \leq C \Delta t \sqrt{\frac{T}{\Delta t}}.$$

$$||e_h^n|| \leq C(T\Delta t)^{\frac{1}{2}} = C(T\tau(h))^{\frac{1}{2}}.$$

Une première application : estimation L^2 pour l'advection VF en 2D

On considère l'advection linéaire en 2D

$$\begin{cases} \partial_t u + \vec{a}.\vec{\nabla} u = 0, \ (t,x) \in [0,T] \times \Omega_{per}, \\ u(t=0,x) = u_0(x), \ x \in \Omega = [0,1] \times [0,1]. \end{cases} \tag{8}$$

Le vecteur directeur $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{a} \neq 0$, est constant. On rajoute des conditions aux bords (8) périodiques (pour simplifier).

Sur un bord de maille on pose

$$m_{jk} = m_{kj} = l_{jk} |(\vec{a}, \vec{n}_{jk})|. \tag{9}$$

Le schéma est

$$s_j \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \sum_{k \in I^+(j)} m_{jk} u_j^n - \sum_{k^-} m_{jk} u_k^n = 0,$$

avec une initialisation à masse constante

$$u_j^0 = \frac{1}{s_j} \int_{\Omega_j} u(0,x) dx = (\Pi_h u_0)_j. \tag{10}$$

Stabilité en 2D

Soit $V = L^2(\Omega)$, et

$$V_h = \{u \in V;\ u_{|\Omega_j} = u_j\} \subset V \quad (P^0).$$

La norme est

$$||u_h|| = \left(\sum_j s_j |u_{h,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Posons

$$\begin{cases} \Pi_h : V \to V_h, \\ (\Pi_h u)_j = \frac{1}{s_j} \int_{\Omega_j} u(x)dx, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} A_h : V_h \to V_h, \\ (A_h u)_j = \frac{-\sum_{k \in I^+(j)} m_{jk} u_j + \sum_{k \in I^-(j)} m_{jk} u_k}{s_j}. \end{cases}$$

(11)

Avec ces notations le schéma upwind précédent est équivalent à la méthode d'Euler, avec la stabilité dans V sous CFL, avec $K = 1$.

Consistance en 2D

Soit $v_h^n = \Pi_h u(n\Delta t)$. On a

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{v_h^{n+1} - v_h^n}{\Delta t} = A_h v_h^n + r_h^n, \quad n \geq 0, \\ v_h^0 = \Pi_h u_0. \end{cases}$$

$$(r_h^n)_j = \frac{\tau(h)}{s_j} \left(\sum_{k \in I^+(j)} m_{jk} z_{h,jk}^n - \sum_{k \in I^-(j)} m_{jk} z_{h,jk}^n \right),$$

où

$$(13) \qquad z_{h,jk}^n = \frac{(v_h^n)_j - u_{h,jk}^n}{\tau(h)},$$

avec

$$u_{h,jk}^n = \frac{1}{l_{jk} \Delta t} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} \int_{x \in \partial\Omega_j \cap \partial\Omega_k} u(s,x) ds d\sigma.$$

Ici $|z_{h,jk}^n| = O(1)$ grâce à la consistance des flux. En dimension 2 d'espace $z_h^n \notin V_h$. On ne peut donc pas appliquer directement l'argument abstrait. Cependant

$$|| (I + \Delta t A_h)^q \, r_h^p || \leq \varepsilon_q = \frac{C}{(q+1)^{\frac{1}{4}}}.$$

Preuve par une technique de dualité

$$
\begin{aligned}
&||\,(I+\Delta t A_h)^q\, r_h^p||\\
&= \max_{w_h\in V_h,\ ||w_h||=1} \langle w_h, (I+\Delta t A_h)^q\, r_h^p\rangle\\
&= \max_{w_h\in V_h,\ ||w_h||} \langle (I+\Delta A_h^*)^q\, w_h, r_h^p\rangle\\
&= \max_{w_h\in V_h,\ ||w_h||=1} \langle w_h^q, r_h^p\rangle\,,
\end{aligned}
$$

avec

$$
w_h^q = (I+\Delta t A_h^*)^q\, w_h \quad \forall w_h \in V_h.
$$

Or

$$(r_h^n)_j = \frac{\tau(h)}{s_j}\left(\sum_{k\in I^+(j)} m_{jk} z_{h,jk}^n - \sum_{k\in I^-(j)} m_{jk} z_{h,jk}^n\right),$$

Donc

$$< w_h^q, r_h >_{L^2} = \tau(h)\sum_{jk} m_{jk} z_{jk}^h (w_j^q - w_k^q)$$

Si on contrôle

$$\tau(h)\sum_{jk} m_{jk}(w_j^q - w_k^q)^2,$$

on aura gagné (lien manifeste avec les WBV cf Lefloch-Coquel-Cockburn ... et Eymard–Herbin-Gallouet ...).

Estimations *a priori*

a) Première estimation *a priori*. La stabilité implique

$$|| \, (I + \Delta A_h^*)^q \, || \leq 1, \forall q, \ \forall h.$$

D'où

(14) $$||w_h^q|| \leq ||w_h|| = 1.$$

b) Seconde estimation *a priori*. On utilise le lemme appliqué à

$$\tau(h) A_h^* w_h^q = (I + \Delta t A_h^*)^q (\tau(h) A_h^*) w_h.$$

Comme $||w_h|| = 1$, cela prouve que

(15) $$\|\tau(h) A_h^* w_h^q\| \leq \frac{C}{(q+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Il reste a combiner ces deux estimations grâce à intégration par parties discrète

$$\frac{1}{2}\tau(h) \sum_{j,k} m_{jk} (w_j^q - w_k^q)^2 = < \tau(h) A_h^* w^q, w^q >$$

$$\leq \frac{C}{(q+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

L'erreur de consistance du schéma VF pour le transport linéaire est en $O(1)$. Cependant l'erreur de consistance après q itérations contribue au plus en

$$|| \, (I + \Delta t A_h)^q \, r_h^p || \leq \frac{C(\alpha)}{(q+1)^{\frac{1}{4}}}.$$

Théorème 1 *Supposons le maillage triangulaire uniformément regulier. Soit $u \in H^1_{per}(\Omega)$, i.e. $u_0 \in H^1_{per}(\Omega)$. Alors $\exists C > 0$*

$$||u_h^n - \Pi_h u(n\Delta t)||_{L^2} \leq (C||\nabla u_0||_{L^2}) \, T^{\frac{3}{4}} h^{\frac{1}{4}}.$$

D'un certain point de vue cette technique réconcilie deux points de vue

Théorème de Lax consitance+stabilité implique convergence,

Volumes Finis consistance des flux,

pour les équations linéaires.

Mais ..... cette estimation n'est pas optimale. Par analogie avec le cas monodimensionnel, on peut penser que le taux optimal est en $h^{\frac{1}{2}}$ pour une donnée initiale dans H^1_{per}.

Lemme 2 *Sous l'hypothèse que $u_0 \in H^1_{per}(\Omega)$, alors la différence entre le schéma discret en temps (de pas Δt) et le schéma continu en temps est en $O(\Delta t^{\frac{1}{2}}) \leq O(h^{\frac{1}{2}})$.*

On étudie directement le schéma continu en temps. La solution numérique (discrète en espace et continue en temps) est $w_h(t)$, la solution exacte est $u(t)$. On pose

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega (u(t) - w_h(t))^2.$$

Lemme 3 *On suppose le maillage régulier. On a l'estimation one-sided*

$$E'(t) \leq C||\nabla u_0||^2_{L^2} h.$$

D'où l'estimation optimale $n\Delta t \leq T$

$$||u^n_h - \Pi_h u(n\Delta t)||_{L^2} \leq (C||\nabla u_0||_{L^2})(Th)^{\frac{1}{2}}.$$

Voir communication Canum.

2 Schémas non linéaires

Qu'en est-il de l'étude de convergence pour des schémas non linéaires de résolution d'équations linéaires ?

Soit le problème modèle du transport linéaire. Un schéma non linéaire et non consistant au sens des différences finies

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n}{h} = 0, \quad a > 0,$$

avec un flux non linéaire. La théorie des schémas TVD (Total Variation Diminishing Roe, Osher, Van Leer, Sweby, Harten ... Leroux, ...) nous propose
$u_{j+\frac{1}{2}} = u_j + \lambda_j(u_{j+1} - u_j)$.

Le terme $\lambda_j(u_{j+1} - u_j)$ est la correction non linéaire au schéma upwind.

Schémas TVD

Soit $r_{j+\frac{1}{2}} = \frac{u_j - u_{j-1}}{u_{j+1} - u_j}$ le rapport des pentes et $\nu = a\frac{\Delta t}{h}$, le nombre de Courant.

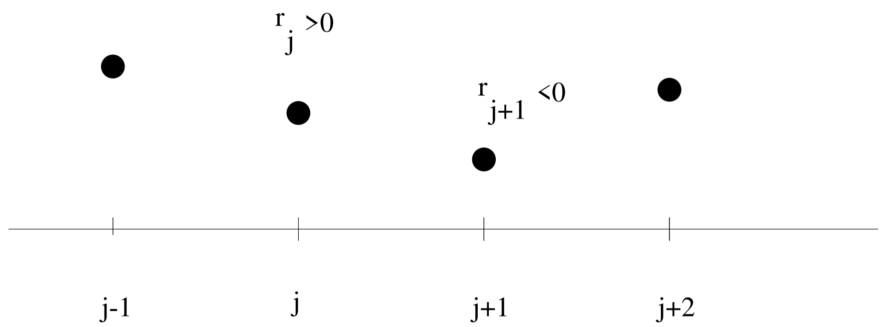

Figure 2: rapport des pentes

Upwind $\lambda_j = 0$.

Limiteurs usuels

La fonction minmod est

$$\begin{cases} \text{if } ab \leq 0, & \text{minmod}(a,b) = 0, \\ \text{if } ab > 0 \text{ and } a > 0, & \text{minmod}(a,b) = \min(a,b), \\ \text{if } ab > 0 \text{ and } a < 0, & \text{minmod}(a,b) = \max(a,b). \end{cases}$$

Schéma minmod
$\lambda_j = \frac{1}{2}(1-\nu)\text{minmod}(1, r_{j+\frac{1}{2}})$.

Schéma SuperBee $\lambda_j =$
$\frac{1}{2}(1-\nu)\max\Big(0, \min(1, 2r_{j+\frac{1}{2}}), \min(2, r_{j+\frac{1}{2}})\Big)$.

Schéma UltraBee
$\lambda_j = (1-\nu)\text{minmod}(\frac{1}{1-\nu}, \frac{r_{j+\frac{1}{2}}}{\nu})$.

Dans tous les cas, on a $0 \leq \lambda_j \leq 1$

$$\min(u_j, u_{j+1}) \leq u_{j+\frac{1}{2}} \leq \max(u_j, u_{j+1}).$$

On a ($u_0 \in BV$)

$$\sum_j |u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}| \leq \sum_j |u_j^n - u_{j-1}^n|$$

$$\leq ... \leq \sum_j |u_j^0 - u_{j-1}^0| = O(h).$$

Donc

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -a\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} + (-\tau(h)a)\frac{z_j^n - z_{j-1}^n}{h},$$

avec $z_j^n = \frac{u_{j+\frac{1}{2}} - u_h}{\tau(h)}$. Donc $z^n \in L^1$. Le formalisme général est vérifié : la correction non linéaire s'interprète comme une erreur de consistance en $O(1)$ (consistance des flux), dont la contribution décroît en

$$\varepsilon_q = \frac{C}{(q+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

On obtient directement la convergence en $h^{\frac{1}{2}}$ pour une donnée initiale dans $L^1 \cap BV$, par une technique uniquement linéaire.

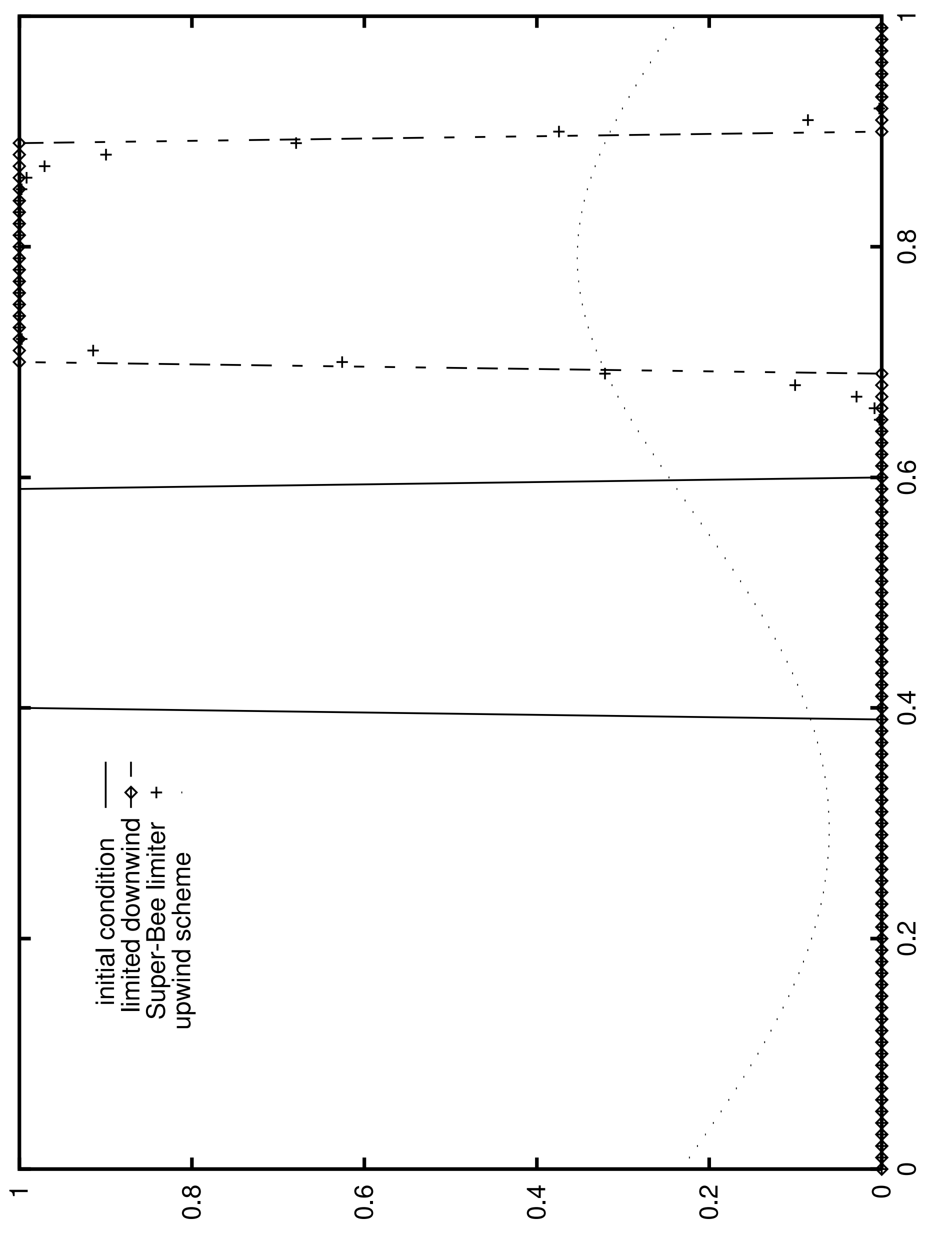

Figure 3: Revenons sur UltraBee (Lagoutière, BD, JSC 2001). Initial condition and results (limited downwind=UltraBee, Super-Bee, upwind) for $t = 5.3$ (after 5.3 periods).

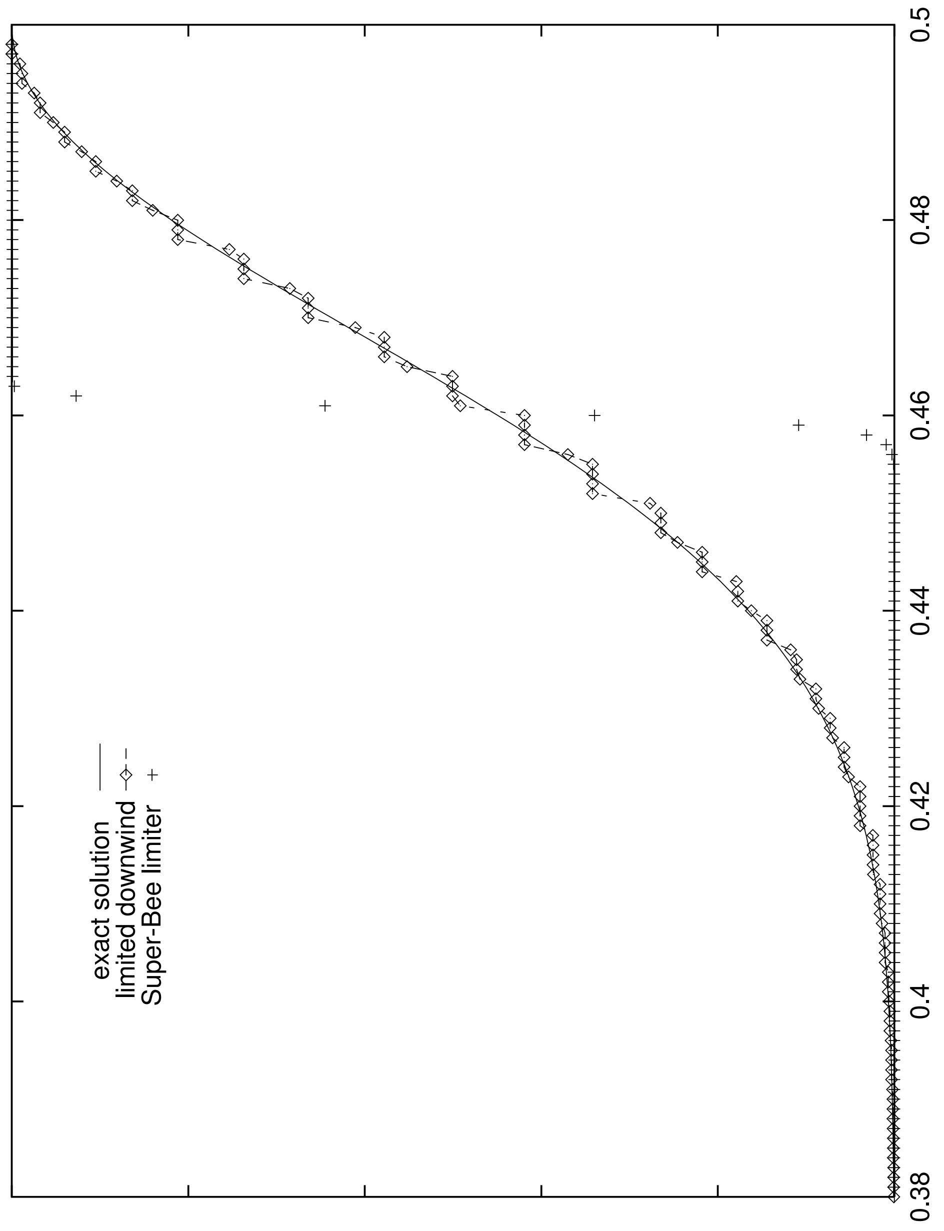

Figure 4: Initial condition and results (limited downwind=UltraBee, SuperBee) for $t = 1000$ (after 1000 periods).

Schémas non linéaires en dimension ≥ 2

Slic Noh et Woodward, A Simple Line Interface Algo., 1976)

Vof Zalesak, Fully multiD flux-corrected Trnasport Algo. for fluids, JCP, 1979). On parle d'algorithmes de type VoF (Volume of fluid)

Youngs Youngs, An interface tracking method for a 3D Eulerian Hydrocode (1987), et avant 1982 ....

Cependant il est peu étudié en analyse numérique. Un théorème d'obstruction existe pour la generalisation en 2D de la théorie TVD (Goodman-Leveque, 1984).

(voir cependant Leveque, Towers, Lagoutière+D. (2001), Perthame-Stoufflet (1996), ..., Perthame, ...)

A titre d'exercice construisons l'algorithme Casper (CAnum SPEcial AlgoRithm) qui incorpore les idées Vof, Slic ... dans le cadre fonctionnel.

Casper

On considère une donnée initiale $0 \leq u_0 \leq 1$, de type concentration pour un problème fluide à plusieurs constituants ou multiphasiques.

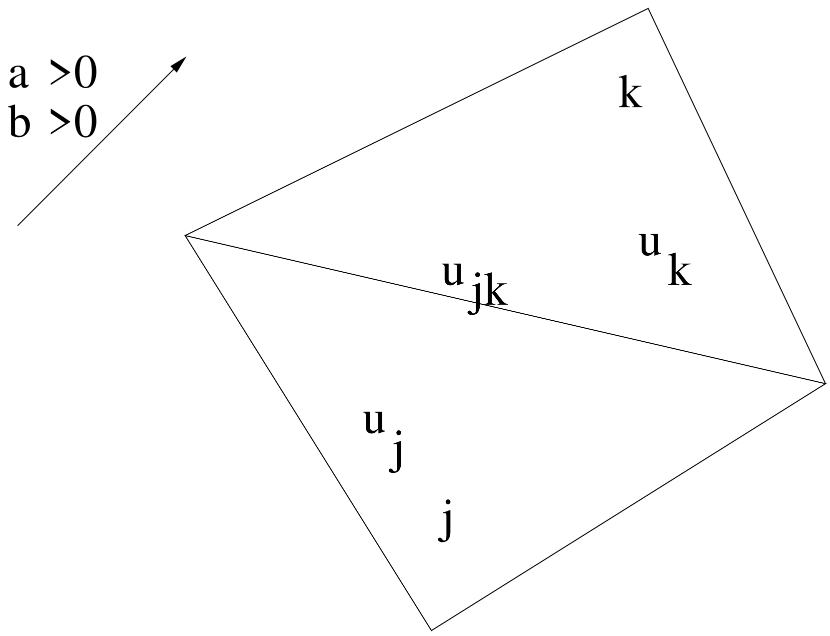

Figure 5: Flux de Casper

$$u_{jk} = u_j^n + \lambda_{jk}(u_k^n - u_j^n)$$

avec $0 \leq \lambda \leq 1$ le plus proche possible de 1 pour assurer l'anti-diffusion.

Mais aussi la positivité du schéma, pour rester avec des solutions numériques physiques

$$0 \leq u_j^{n+1} \leq 1.$$

Cela impose une limitation supplémentaire sur les λ, qui n'est pas difficile à prendre en compte si l'on calcule les termes correctifs les uns après les autres.

Le point original de Casper est d'imposer en plus

$$\frac{\lambda_{jk}|u_k^n - u_j^n|}{h} \leq C,$$

où h est une longueur caractéristique du maillage et C est une constante ad-hoc (qui s'interprète comme une longueur de gradient). $C = 1$ dans la suite.

Posons $e = u_{upwind} - u_{casper}$ l'erreur entre le schéma upwind et le schéma Casper avec termes correctifs. On a $e^0 = 0$ et

$$\frac{e^{n+1} - e^n}{\Delta t} = A_h e^n + r^n, \quad r^n = O(1),$$

Mais

$$(r_h^n)_j = \frac{h}{s_j}\left(\sum_{k\in I^+(j)} m_{jk} z_{h,jk}^n - \sum_{k\in I^-(j)} m_{jk} z_{h,jk}^n\right),$$

avec $z_{h,jk}^n = \frac{\lambda_{jk}|u_k^n - u_j^n|}{h}$. Donc z est contrôlé dans L^2.

Comme auparavant

$$||\,(I+\Delta t A_h)^q\, r_h^p|| \leq \varepsilon_q = \frac{C(\alpha)}{(q+1)^{\frac{1}{4}}}.$$

Théorème 2 *Sous les hypothèses habituelles de régularité du maillage,* $\exists \tilde{C} > 0$

$$||u_{upwind}^n - u_{casper}^n||_{L^2} \leq \left(\tilde{C}\right) T^{\frac{3}{4}} h^{\frac{1}{4}},$$

sachant que

$$||u_{exact}(n\Delta t) - u_{upwind}^n||_{L^2} \leq \left(\tilde{C}||\nabla u_0||_{L^2}\right) T^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}}.$$

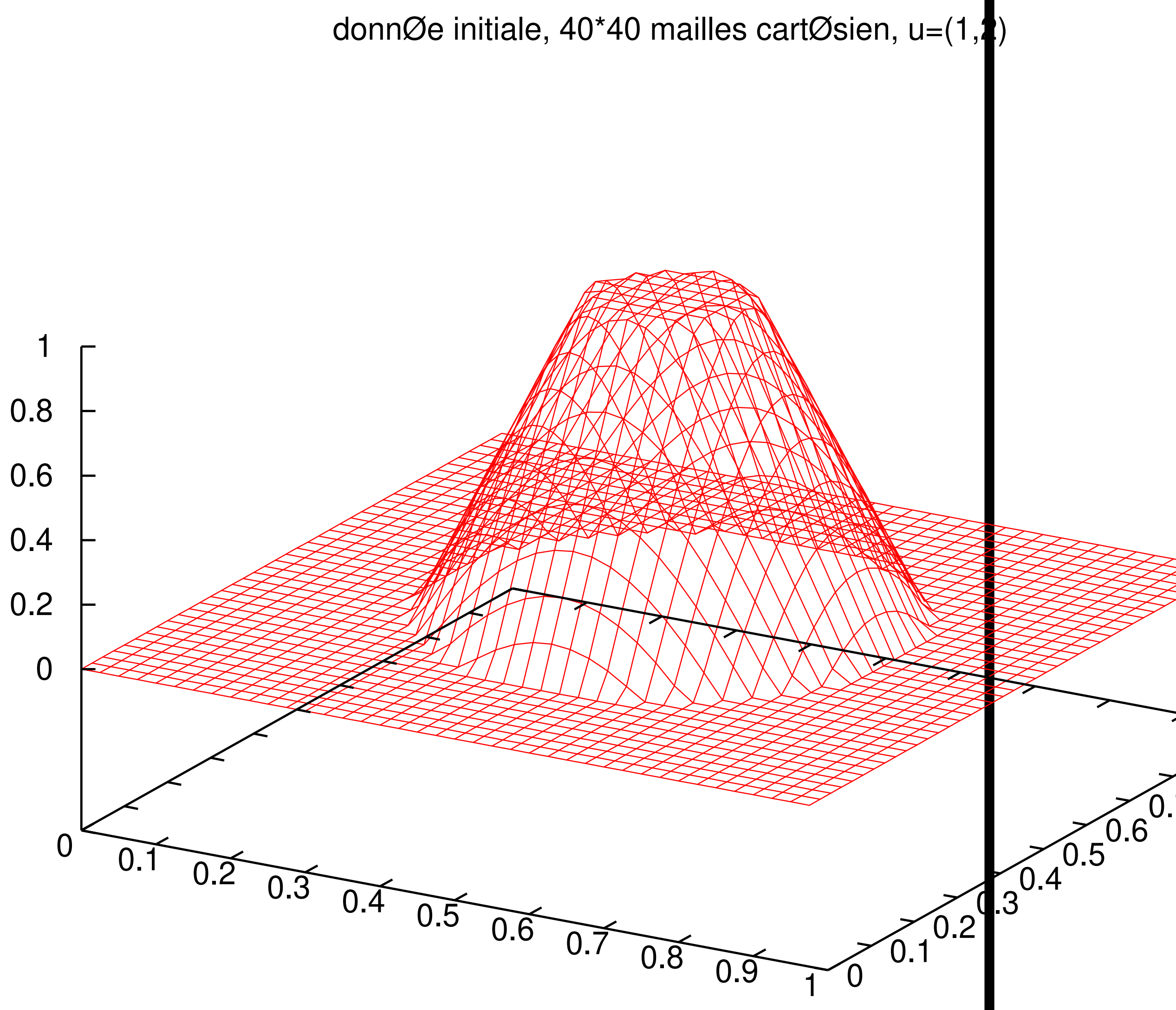

Figure 6: Donnée initiale

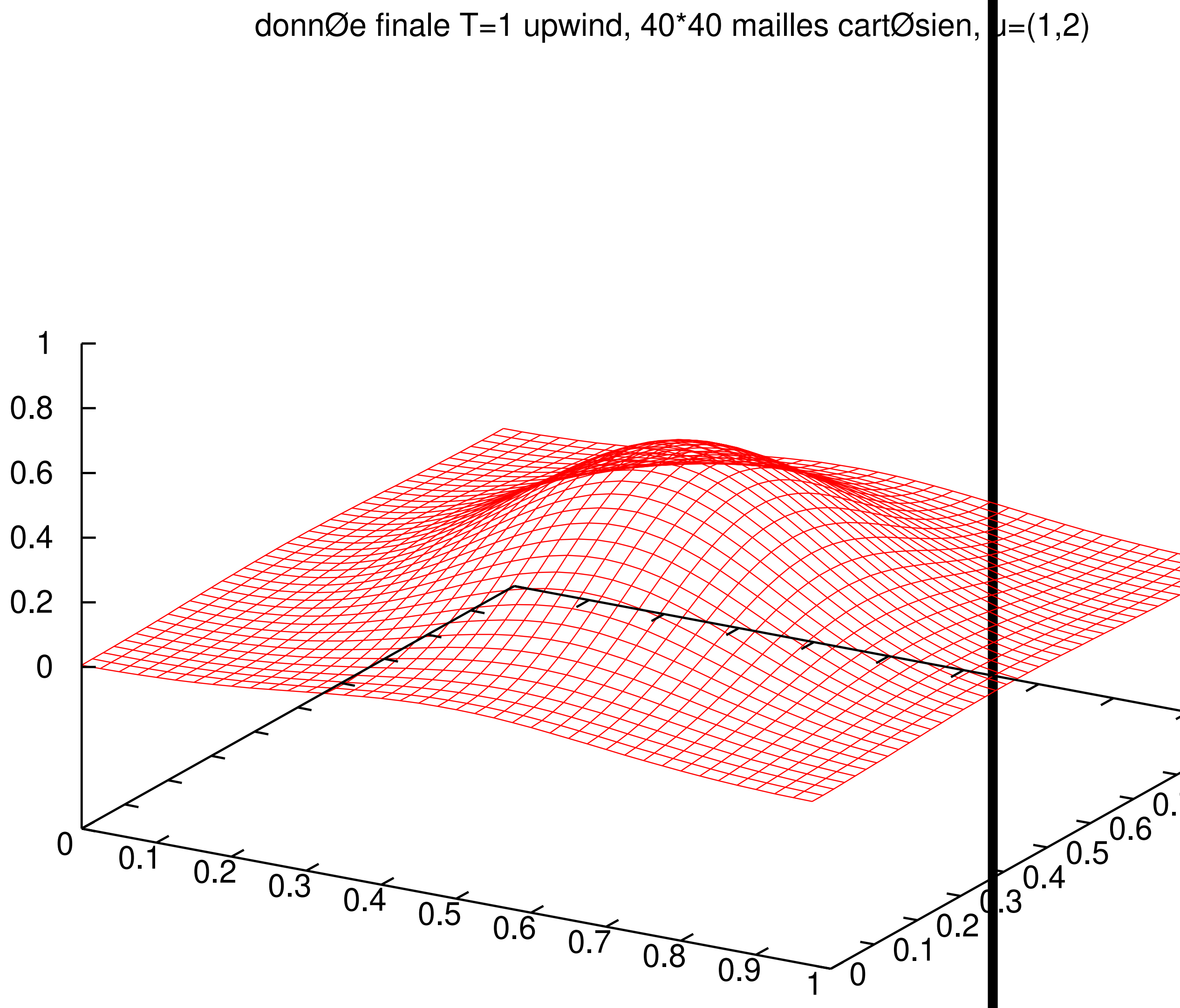

Figure 7: Upwind. Les bords $u = 1$ ou $u = 0$ ne sont pas respectés.

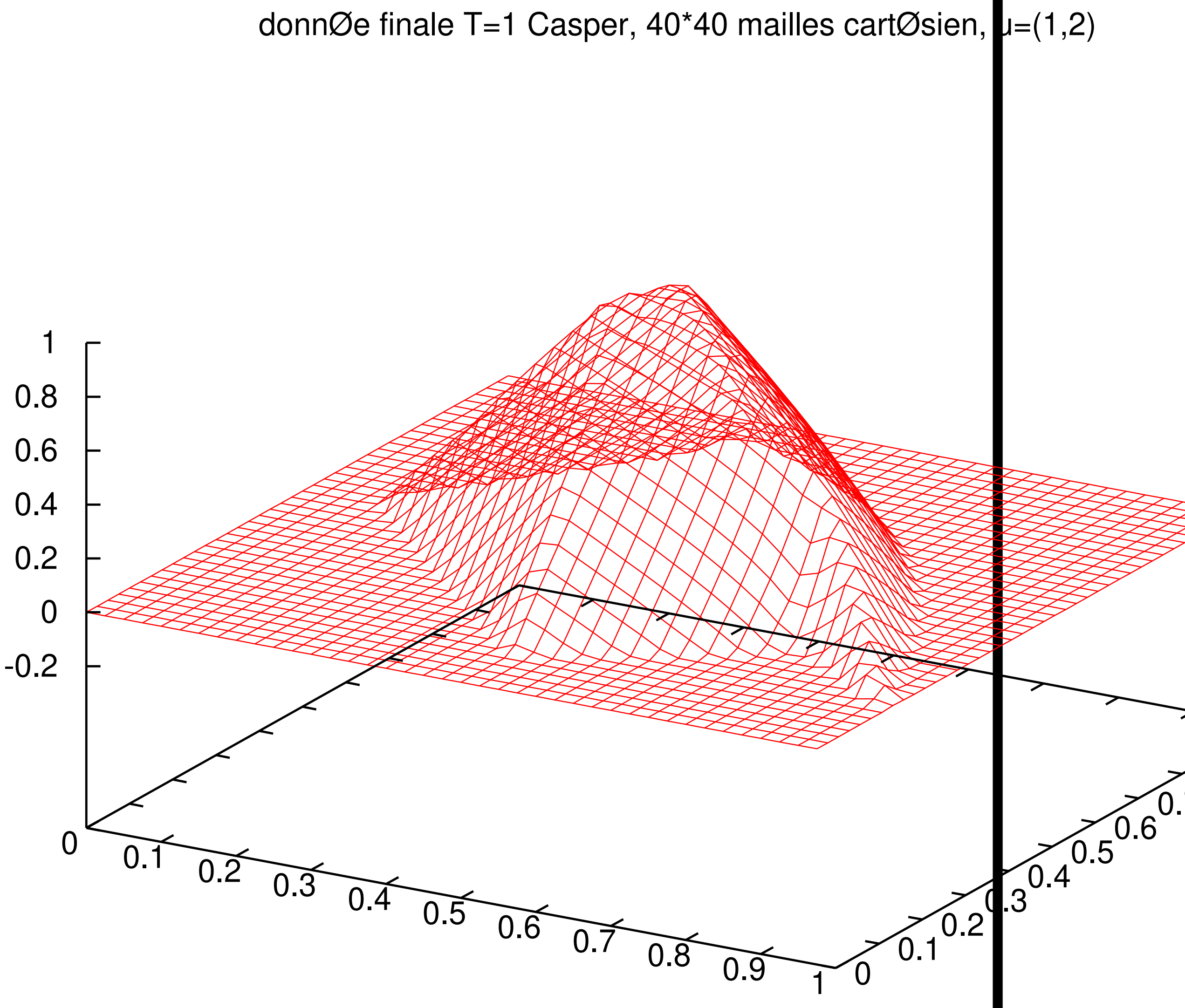

Figure 8: Casper. Les bords sont respectés.

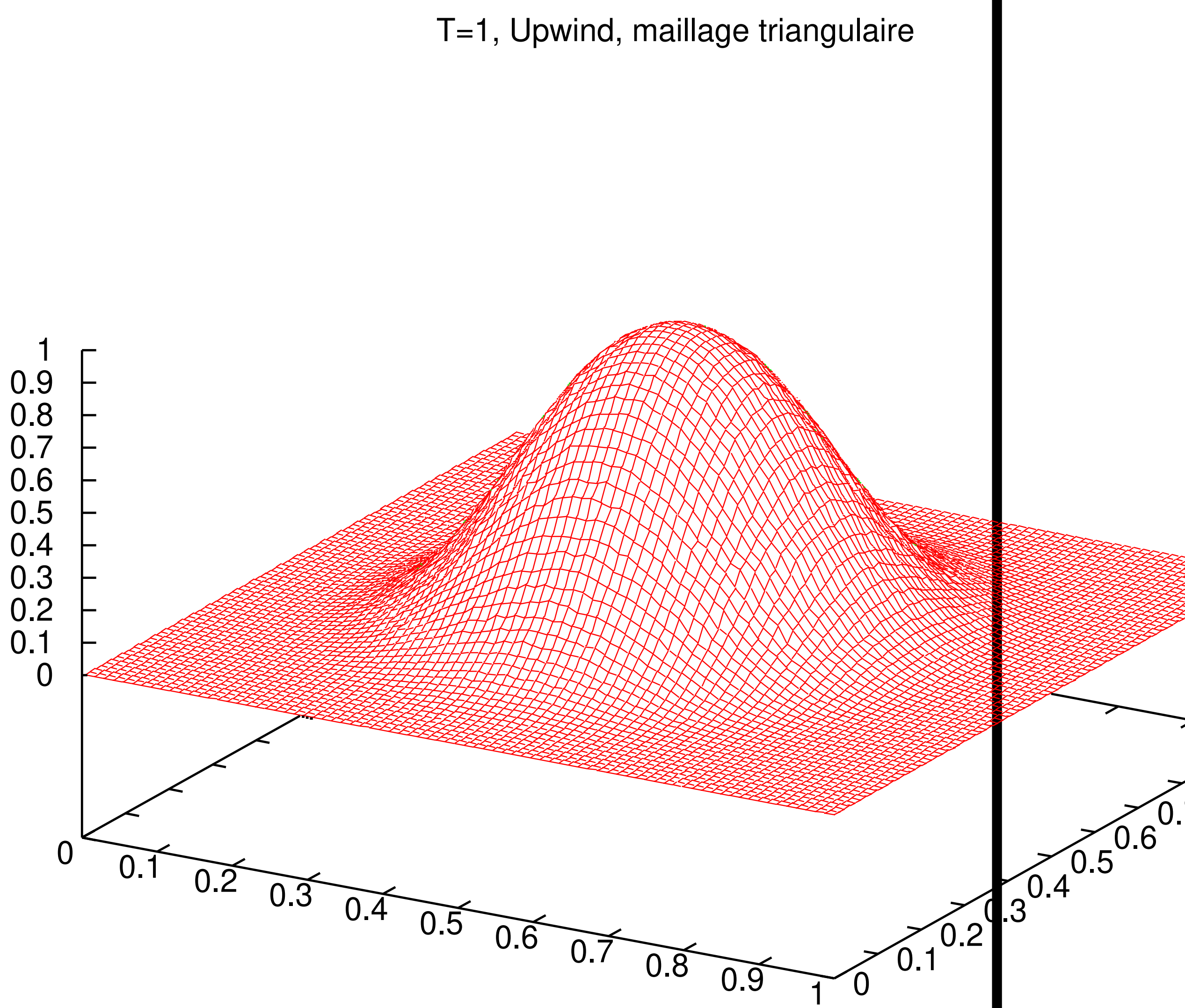

Figure 9: Upwind. Calcul sur maillage en triangle. Projection gnuplot sur maillage cartésien 80*80. Max=≈ 0.9.

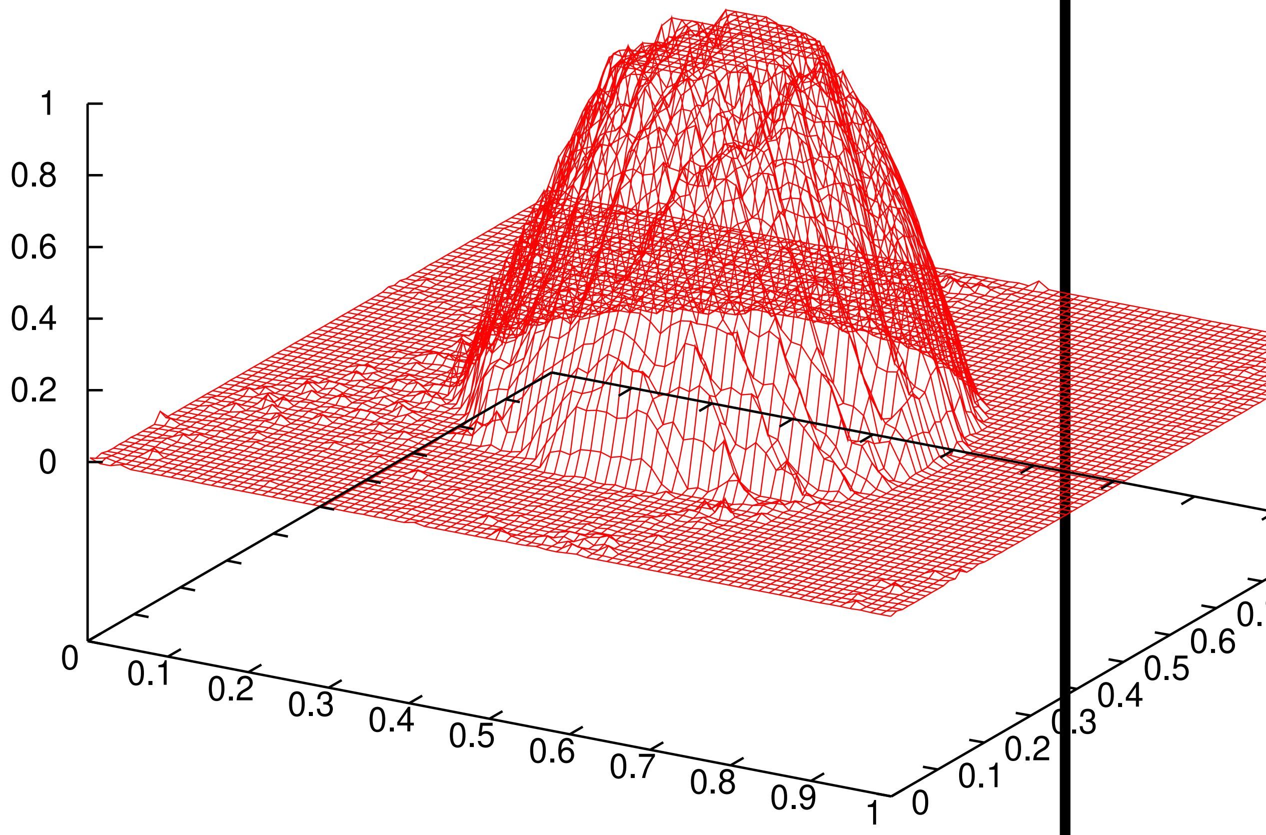

Figure 10: Casper. Calcul sur maillage en triangle. Projection gnuplot sur maillage cartésien 80*80.

La compréhension de l'optimalité de ces algorithmes est une question ouverte.

Roe et Sidilkover, Genuinely (non linear) multidimensional algorithms are only just beginning to be understood, 1992.