

**Quelques Applications
des Méthodes Multipôles Rapides (FMM)**

Eric DARRIGRAND

Université de Rennes 1

eric.darrigrand-lacARRIERE@univ-rennes1.fr

<http://perso.univ-rennes1.fr/eric.darrigrand-lacARRIERE>

Plan de l'exposé

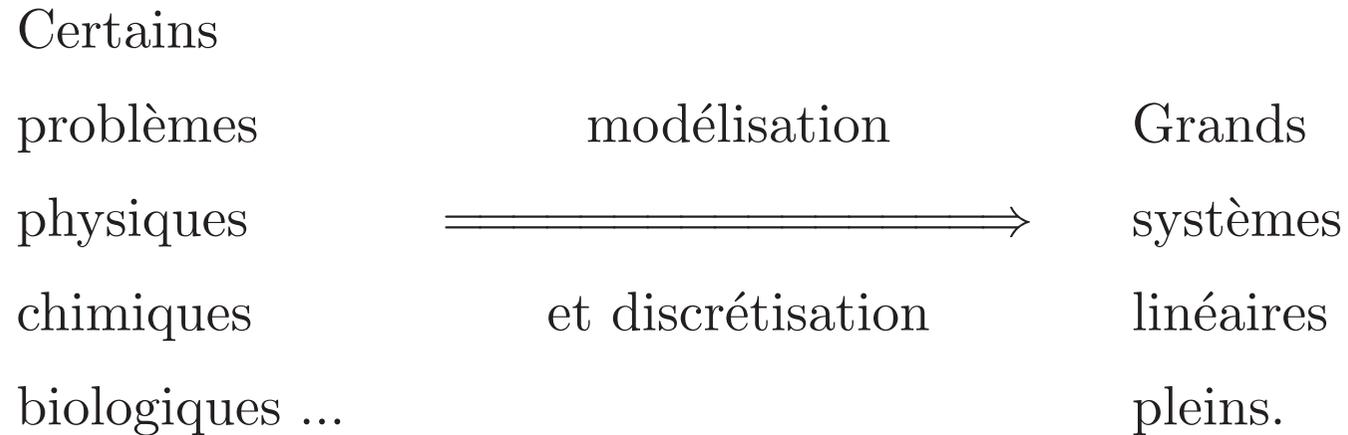
- Motivations - Historique - Principe
- Un cas simple 1D
- FMM en électromagnétisme

Equations intégrales

Eléments finis et représentation intégrale

- Equation de Laplace

MOTIVATIONS



Exemples :

- Propagation d'ondes à hautes fréquences :
Taille du système \sim nombre d'onde \times nombre d'onde.
- Interactions moléculaires.

HISTORIQUE DE LA FMM

- Initiée pour les problèmes à N corps
- Equation de Laplace par formulation intégrale
V. ROKHLIN - L. GREENGARD (1988)
- Equation de Helmholtz par formulation intégrale
V. ROKHLIN (1990) – W.C. CHEW (1994)
- Equation de Maxwell par équation intégrale
E. DARVE (1997)
- Nouveaux développements pour l'équation de Laplace
V. ROKHLIN - L. GREENGARD (1997)

PRINCIPE

- Calculer : $\forall i = 1, N \quad F_i = \sum_{j=1}^N M_{ij} Y_j \quad \longrightarrow \text{Complexité} = \mathcal{O}(N^2)$

- **Supposons** : $\exists (a_i)_i, (b_j)_j / M_{ij} = a_i b_j$

Algorithme : Etape 1 : $B = \sum_{j=1}^N b_j Y_j \quad \longrightarrow \text{Complexité} = \mathcal{O}(N)$

Etape 2 : $\forall i, F_i = a_i B$

- **Supposons** : $\exists (a_i^l)_{il}, (b_j^l)_{jl} / M_{ij} = \sum_{l=1}^L a_i^l b_j^l, \quad L \ll N$

Algorithme : Etape 1 : $\forall l, B^l = \sum_{j=1}^N b_j^l Y_j \quad \longrightarrow \text{Complexité} = \mathcal{O}(N L)$

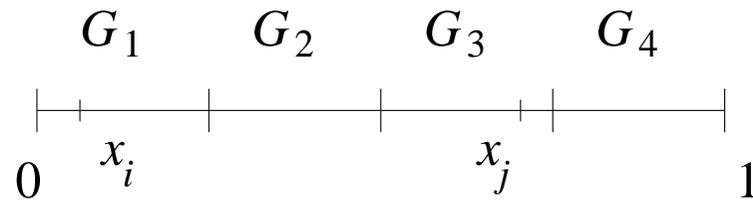
Etape 2 : $\forall i, F_i = \sum_{l=1}^L a_i^l B^l$

UN CAS SIMPLE 1D

Accélération des produits matrice-vecteur $\mathcal{M}Y$ avec Y donné et

$$\mathcal{M}_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{x_i - x_j} & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

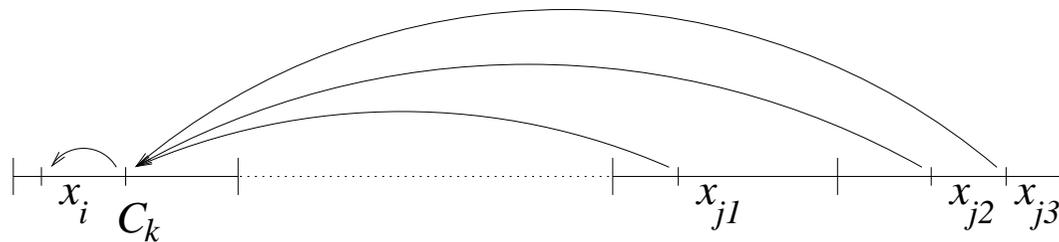
Supposons la configuration



Pour $x_j \in C_3 \cup C_4$

$$\frac{1}{x_i - x_j} = \frac{1}{C_1 - x_j - (C_1 - x_i)} = \frac{1}{C_1 - x_j} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{C_1 - x_i}{C_1 - x_j} \right)^l .$$

Ainsi
$$\sum_{j/x_j \in G_3 \cup G_4} \mathcal{M}_{ij} \cdot Y_j = \sum_{l=0}^{L_\epsilon} (C_1 - x_i)^l \sum_{j/x_j \in G_3 \cup G_4} \frac{Y_j}{(C_1 - x_j)^{n+1}} .$$



Complexité d'un produit matrice-vecteur : $\mathcal{O}(MN \ln N + N^2/K)$

avec M = nombre de boîtes et N = nombre de points x_j)

Complexité optimale : $\mathcal{O}(N^{3/2} \ln N)$ obtenu pour $M \sim N^{1/2}$.

CAS DE L'ELECTROMAGNETISME OU DE L'ACOUSTIQUE

Problème : Propagation d'onde autour d'un obstacle Ω de frontière Γ

Résolution par équation intégrale \implies Opérateurs de la forme

$$(SJ, J') = \iint_{\Gamma \times \Gamma} G(k, |x - y|) J(y) \cdot \overline{J'(x)} d\gamma(y) d\gamma(x)$$

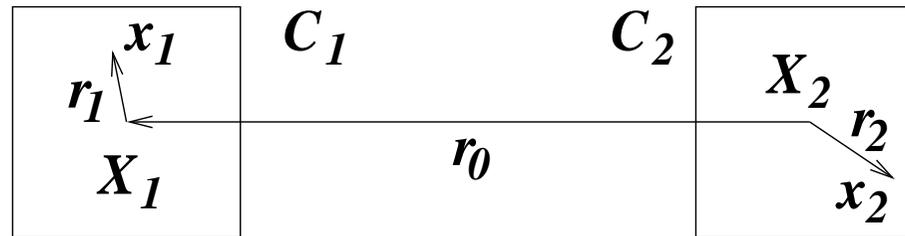
Après discrétisation, matrices de la forme

$$M_{ij} = \alpha_i \beta_j G(k, |x_i - x_j|)$$

avec

$$G(k, r) = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$$

But de la FMM : découpler i et j dans l'expression $G(k, |x_i - x_j|)$.



$$r_0 = X_1 - X_2, r_i = x_i - X_i, r = r_1 - r_2, |r| < |r_0|$$

- **Série de Gegenbauer :**

$$G(k, |x_1 - x_2|) = \frac{e^{ik|x_1 - x_2|}}{4\pi|x_1 - x_2|} = \frac{ik}{4\pi} h_0^{(1)}(k|r_0 + r|)$$

$$G(k, |x_1 - x_2|) = \frac{ik}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) h_l^{(1)}(k|r_0|) j_l(k|r|) P_l(\cos(r, r_0))$$

- **Découplage r_1 et r_2 : Formule de Funck-Hecke**

$$j_l(k|r|) P_l(\cos(r, r_0)) = \frac{i^l}{4\pi} \int_{S^2} P_l(\cos(s, r_0)) e^{iks \cdot r} ds$$

- Fonctions de transfert :

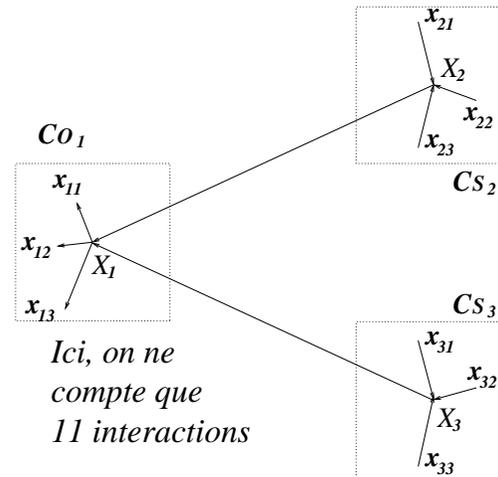
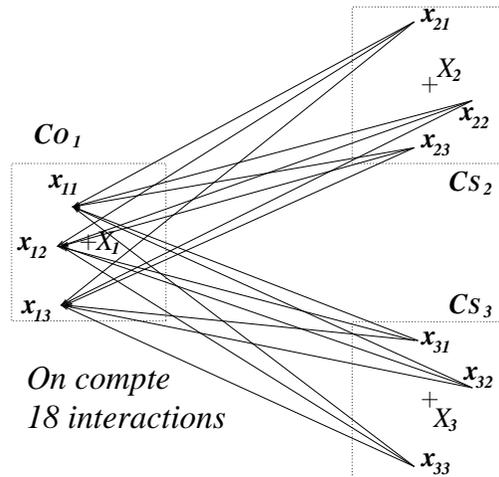
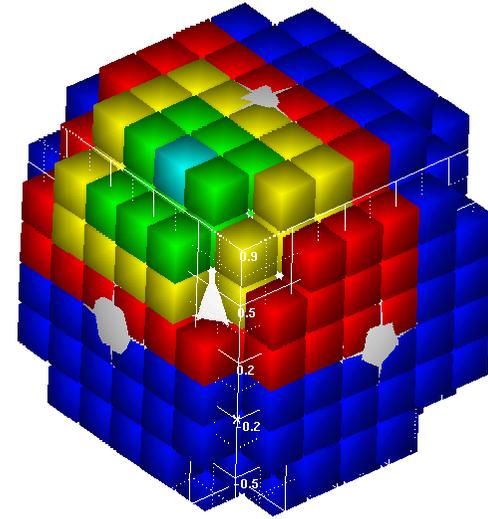
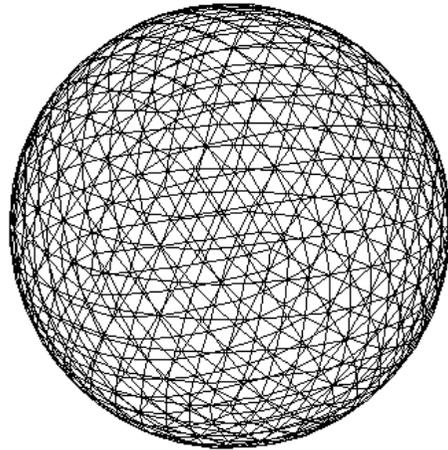
$$\mathcal{T}_{L,r_0}(s) = ik \sum_{l=0}^L \frac{(2l+1)i^l}{4\pi} h_l^{(1)}(k|r_0|) P_l(\cos(s, r_0))$$

- Développement de la fonction de Green ($|r| < |r_0|$) :

$$G(k, |x_1 - x_2|) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_{p=1}^S \omega_p e^{ik s_p \cdot r_1} \mathcal{T}_{L,r_0}(s_p) e^{-ik s_p \cdot r_2}$$

- Troncature et discrétisation de la sphère unité :

$$L \sim kd, \quad S \sim L^2 \quad \text{avec } d = \text{diamètre des boîtes}$$



Mise en œuvre dans le cadre d'une résolution d'équations intégrales par discrétisation microlocale (avec A. Bachelot et K. Nkonga)

Discrétisation microlocale : Approximation de la phase de l'inconnue.

- Discrétisation grossière de l'inconnue ($N_g \sim k^{2/3}$ ddl)
- Discrétisation fine de la géométrie ($N_f \sim k^2$ éléments)

\implies

- Système de taille réduite ($N_g^2 \sim N_f^{2/3}$)
- Calcul des matrices au coût élevé ($\sim N_f^2$)

Utilisation de la FMM : Accélérer le calcul des matrices

Complexité

	Précalcul	Résolution	Mémoire
Discrétisation Microlocale (DM)	N_f^2	$N_{iter} N_f^{2/3}$	N_f
1L FMM $N_{fmm} \sim N_f^{1/2}$	$N_f^{5/4}$	$N_{iter} N_f^{3/2}$	$N_f^{3/2}$
DM + 1L FMM	$N_f^{3/2}$	$N_{iter} N_f^{2/3}$	N_f
MLFMM $N_{fmm} \sim N_f$	$N_f \ln^2(N_f)$	$N_{iter} N_f \ln^2(N_f)$	$N_f \ln(N_f)$
DM + MLFMM	$N_f^{4/3} +$ $C N_f \ln^2(N_f)$	$N_{iter} N_f^{2/3}$	N_f

Autre mise en œuvre :

Couplage d'une **formulation variationnelle ultra-faible (UWVF)** avec une **représentation intégrale (EI)** (avec P. Monk)

Complexité

$p = \#$ de directions pour les fonctions de base ; $k =$ nombre d'onde.

Méthode	Nombre d'éléments	Coût de résolution
UWVF	k^3	$k^3 p^2$
UWVF+EI	k^2	$k^2 p^2 + k^4 p^2$
UWVF+EI+1LFMM	k^2	$k^2 p^2 + k^3 p$
UWVF+EI+MLFMM	k^2	$k^2 p^2 + k^2 \ln(k) p$

CAS DE L'EQUATION DE LAPLACE

Equation intégrale - discrétisation, obtention d'un système linéaire avec des matrices de la forme

$$M_{i j} = \alpha_i \beta_j \frac{1}{|x_i - x_j|}$$

But de la FMM : découpler i et j dans l'expression $\frac{1}{|x_i - x_j|}$ par utilisation de développements en harmoniques sphériques.

Regroupement au niveau des groupes sources : (Q_i, q_i) des points d'un même groupe de centre Q et P un point lointain.

$$\Phi(P) = \sum_i \frac{q_i}{|P - Q_i|} = \sum_i \frac{q_i}{|(P - Q) - (Q - Q_i)|}$$

Soient $(P - Q) \leftrightarrow (r', \theta', \phi')$ et $(Q_i - Q) \leftrightarrow (\rho_i, \alpha_i, \beta_i)$. Alors

$$\Phi(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{M_n^m}{r'^{n+1}} Y_n^m(\theta', \phi')$$

$$M_n^m = \sum_i q_i \rho_i^n Y_n^{-m}(\alpha_i, \beta_i)$$

Choix de la troncature, avec $a =$ rayon du groupe :

$$\left| \Phi(P) - \sum_{n=0}^p \sum_{m=-n}^n \frac{M_n^m}{r'^{n+1}} Y_n^m(\theta', \phi') \right| \leq \frac{\sum_i |q_i|}{r' - a} \left(\frac{a}{r'} \right)^{p+1}$$

Regroupement au niveau des groupes observateurs : P dans un groupe de centre P_0 . Soient $(P - P_0) \leftrightarrow (r, \theta, \phi)$ et $(Q - P_0) \leftrightarrow (\rho, \alpha, \beta)$ avec $\rho > (c + 1)a$, $c > 1$ et $r \leq a$.

$$\text{Alors} \quad \Phi(P) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j L_j^k r^j Y_j^k(\theta, \phi)$$

$$L_j^k = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{M_n^m \varrho^{|k-m|-|k|-|m|} A_n^m A_j^k Y_{j+n}^{m-k}(\alpha, \beta)}{(-1)^n A_{j+n}^{m-k} \rho^{j+n+1}}$$

avec

$$A_n^m = \frac{(-1)^n}{\sqrt{(n-m)!(n+m)!}}$$

Choix de la troncature :

$$\left| \Phi(P) - \sum_{j=0}^p \sum_{k=-j}^j \frac{L_j^k}{r^{j+1}} Y_j^k(\theta, \phi) \right| \leq \frac{\sum_i |q_i|}{ca - a} \left(\frac{1}{c} \right)^{p+1}$$

Complexité :

Soient

N = nombre de degrés de liberté.

M = nombre de groupes.

T = nombre de transferts entre groupes.

- Transferts entre groupes en $T \times p^4$.
- Transferts locaux intérieurs aux groupes en $N \times p^2$.
- Interactions proches N^2/M .
- *Cas FMM un niveau* : algorithme en $N^2/M + M^2 p^4 + N p^2$.
- *Cas FMM multiniveaux* : algorithme en $N^2/M + M p^4 + N p^2$.
→ Choix optimal : $M \sim N$; complexité en $N p^4$.

CONCLUSION

- Robuste, efficace et précise
 - De plus en plus utilisée
- pour les problèmes de propagation d'ondes.

PERSPECTIVES

- Transfert radiatif
- Interactions moléculaires