Schéma d'approximation pour équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre : maillages structurés et non-structurés

Philippe Hoch, CEA, France

9 Mars 2005, Cermics

PLAN

A) . Ou trouve t-on des équations de Hamilton-Jacobi ?

$$u_t + H(x, u, \nabla u, \nabla^2 u) = 0$$

B) . Une vue hiérarchique de hamiltoniens d'ordre 1 et hamiltoniens numériques :

1) Hamiltoniens de la forme $H(x, p) = \tilde{H}(x, p^2)$ convexe ou concave en p.
2) Hamiltoniens Généraux.

3) Maillages structurés : Hamiltonien de Lax-Friedrichs Optimisé et Sweeping

4) Maillages non-structurés : Hamiltonien de Lax-Friedrichs

C) . Approximation des équations de Hamilton-Jacobi d'ordre 1 avec GO++(NS)

Quelques applications des équations de Hamilton-Jacobi

nombreux problèmes de calcul des variations

Traitement d'images (détection de contour, filtrage , reconstruction, Shape From Shading ...),

Propagation de Front (Méthode Level Set, Mouvement à courbure moyenne ...),

Ondes Hautes Fréquences (Electromagnétisme, Acoustique, Géophysique ...),

Processus de Contrôle Optimal (Chimie, Finance ...),

Génération de Maillage (Triangulaire/Rectangulaire Anisotrope ...),

Propagation de Front (Méthode Level Set, Mouvement à courbure moyenne ...).

Evolution de courbes : l’approche par ensemble de niveau

Idée classique de la *level set method* : chercher $\Phi(x,t)$ telle que :

$$c_t := \{x \in \Omega; \Phi(x,t) = 0\}, \qquad \Omega \text{ ouvert de } I\!R^d \tag{1}$$

où c_t est une famille de courbes qu’on veut déplacer avec une dynamique donnée, en connaissant la courbe initiale c_0. Dérivation de (1) par rapport à t $\Rightarrow$ équation de transport :

$$\Phi_t + \frac{dx}{dt}.\nabla\Phi = 0,$$

Donc $\frac{dx}{dt} = V(t, x, \Phi, \nabla\Phi, \nabla\nabla\Phi)$ permet de déterminer complètement l’équation précédente.

Equation eikonale

A l’équation dite “eikonale” :

$$\begin{cases} \Phi_t + |\nabla \Phi| = 0, \\ \Phi_0(x) = 0 \ \text{ sur } \ \mathrm{c}_0, \end{cases} \tag{2}$$

est associé le champ de vitesse :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(t) = n(X(t)). \\ X(0) = X_0 \ \text{ sur } \ \mathrm{c}_0. \end{cases} \tag{3}$$

On a propagation à vitesse unité dans la direction *normale* (euclidienne) à la courbe.
Dans le cas isotrope et uniforme, on engendre ainsi la famille de courbes :

$$c_t = \{x; d(x, c_0) = t\} \tag{4}$$

où $d(x, c_0)$ est la distance (euclidienne) de x à c_0.

Rappels et synthèse

H(s,y,p) le Hamiltonien décrit la physique

PROBLEMES LAGRANGIENS

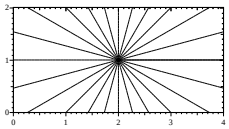
$$\begin{cases} \dot{y}(s,y^0) = H_p(s,y,p), \quad y(0,y^0) = y^0 \\ \dot{p}(s,y^0) = -H_y(s,y,p), \quad p(0,y^0) = \phi^0_{y^0}(y^0) \\ \dot{\phi}(s,y^0) = p.H_p(s,y,p) - H(s,y,p) \\ \phi(0,y^0) = \phi^0(y^0) \end{cases}$$

PROBLEMES EULERIENS

$$\text{evolution} \quad \{u_t + H(t,x,\nabla u) = 0 + CI + CL,$$

$$\text{stationnaire} \quad \{H(x,\nabla u) = 0 \quad + CL.$$

Trajectoires “Optimales” (multi-valuées)

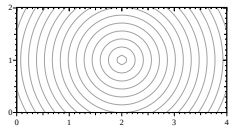


“Caractérisation”

$$u(t,x) = \min_{y^0;y(t,y^0)=x} \phi(t,y^0),$$

$$\text{si} \quad u(t,y(t,y_0)) = \phi(t,y^0)$$

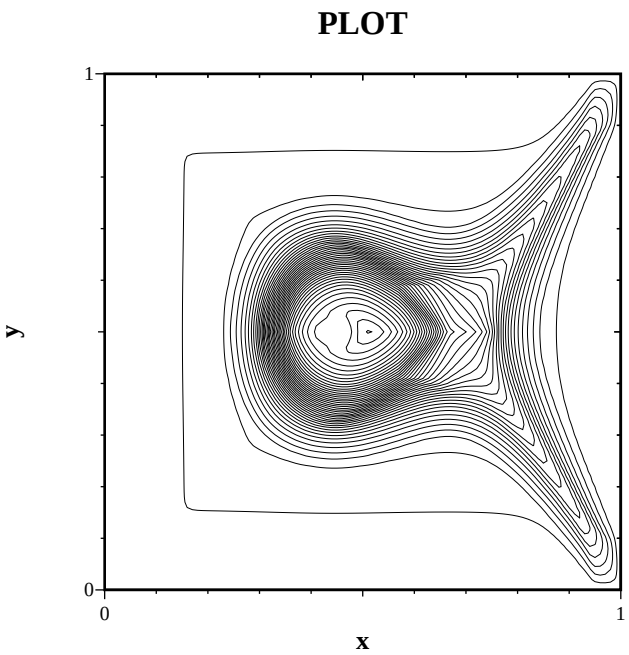
Solutions de Viscosité (univaluées)

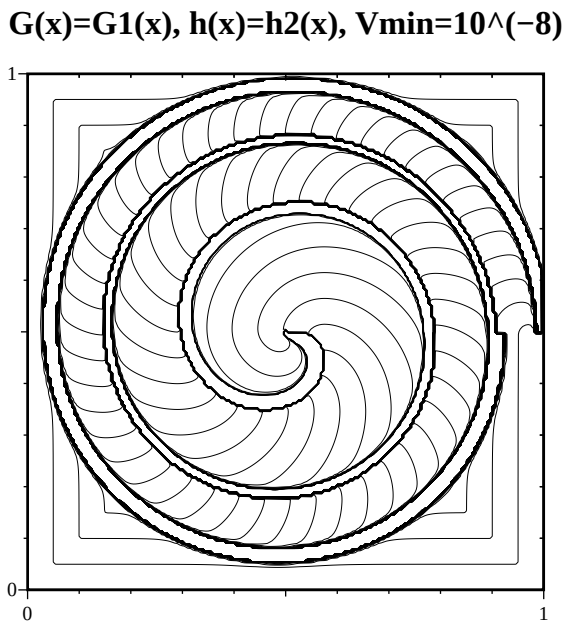


Illustrations

Thu Dec 2 09:18:00 1999

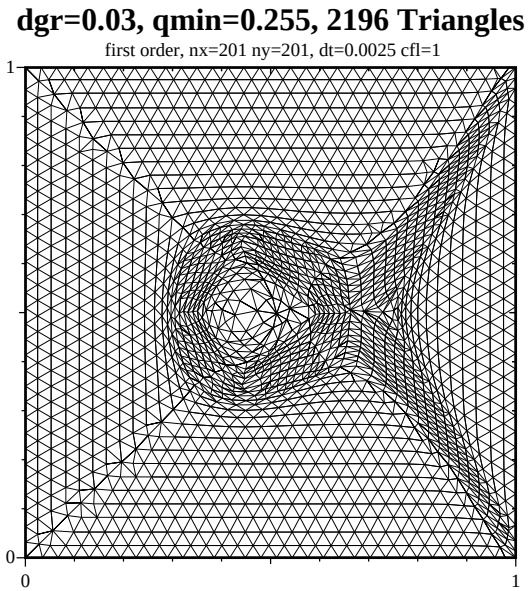
“level sets” de $u_t + |G^{-1/2}(x)\nabla u| = 0$

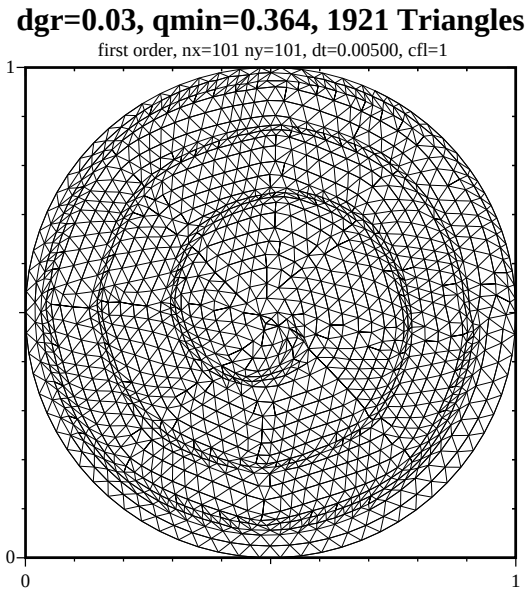




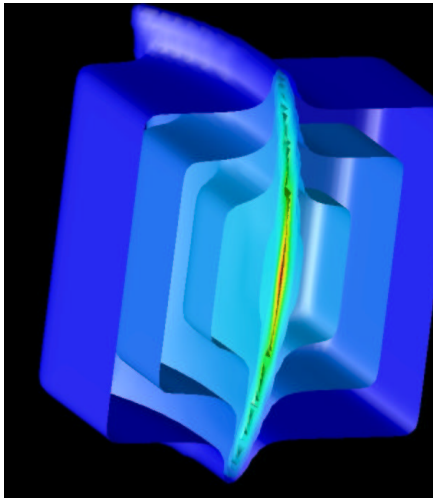
Illustrations : suite

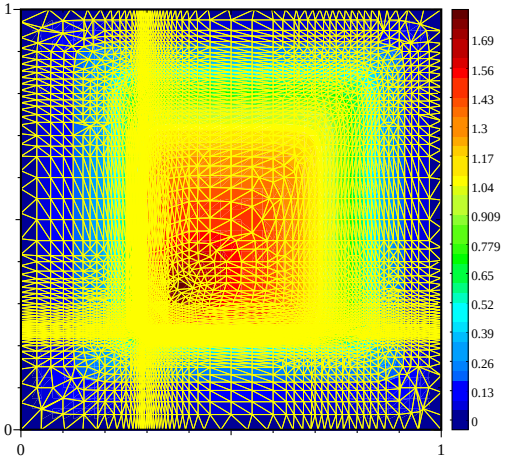
Génération de maillages anisotropes 2D par “level sets” $u_t + |G^{-1/2}(x)\nabla u| = 0$

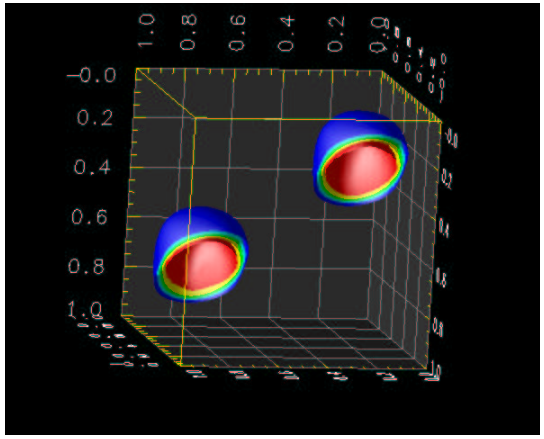




Génération de maillages anisotropes 2D et examples 3D utilisant l'équation HJ stationnaire $|G^{-1/2}(x)\nabla u| - 1 = 0$







Amélioration d’images

Equations de Hamilton-Jacobi d'ordre 1

$u_t + H(x, u, \nabla u) = 0$ solutions faibles sont dans $W^{1,\infty}$, la solution de viscosité est la bonne solution (physique) parmi les solutions faibles.
Par ex. pour le problème d'évolution

$$u_t + H(x, \nabla u) = 0, \qquad dans I\!R^d \tag{5}$$

Definition 1. *u $\in C(\Omega)$ est une solution de viscosité de (5), si u est à la fois sous solution et sur solution : pour toute fonction test v $\in C^1$, en tout point (x_0, t_0) de $\Omega \times (0, t)$ où (u-v) a un maximum local (resp. minimum), alors*

$$v_t(x_0, t_0) + H(x_0, \nabla v(x_0, t_0)) \leq 0 \quad (resp. \geq 0). \tag{6}$$

Remarques générales sur la nature de la discrétisation

1. EDP Fortement non-linéaire (pas $div_{t,x} f(u) = 0$) $\Rightarrow$ pas de cadre <u>direct</u> volumes finis.
2. Définition de solution de viscosité : savoir *évaluer ponctuellement* le couple (u,H).

$\Rightarrow$ discrétisation de type *différences finies* (degrés de liberté aux sommets) : $u^h(S_i)$, $i = 1, .., nS$, solveur aux noeuds.

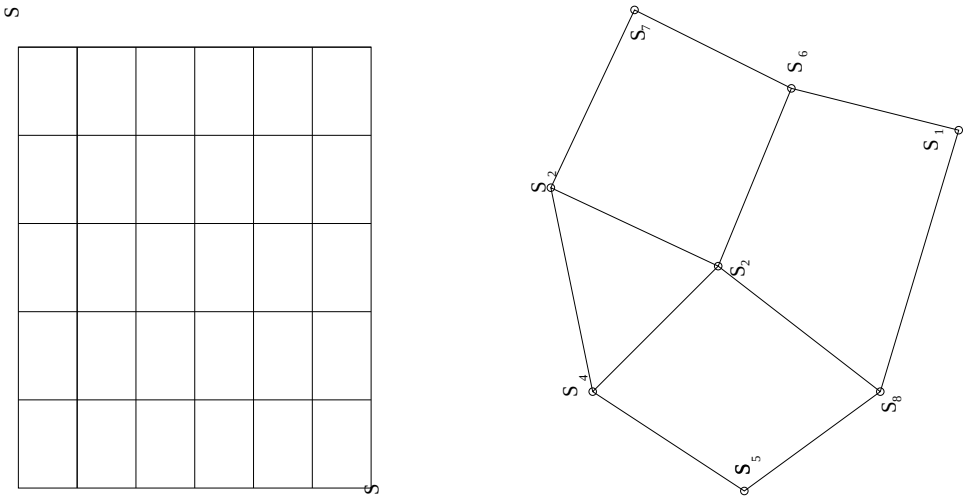
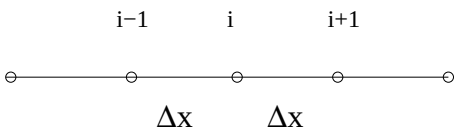
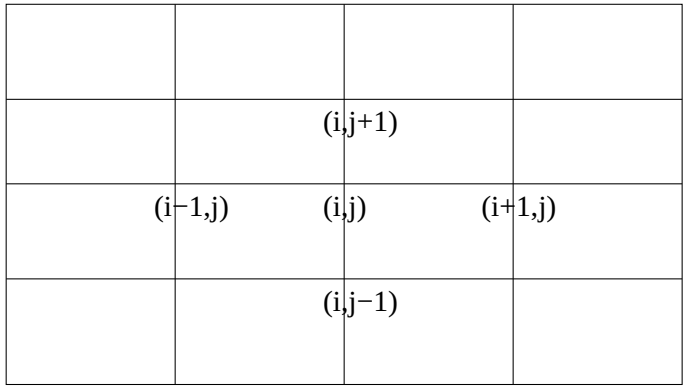
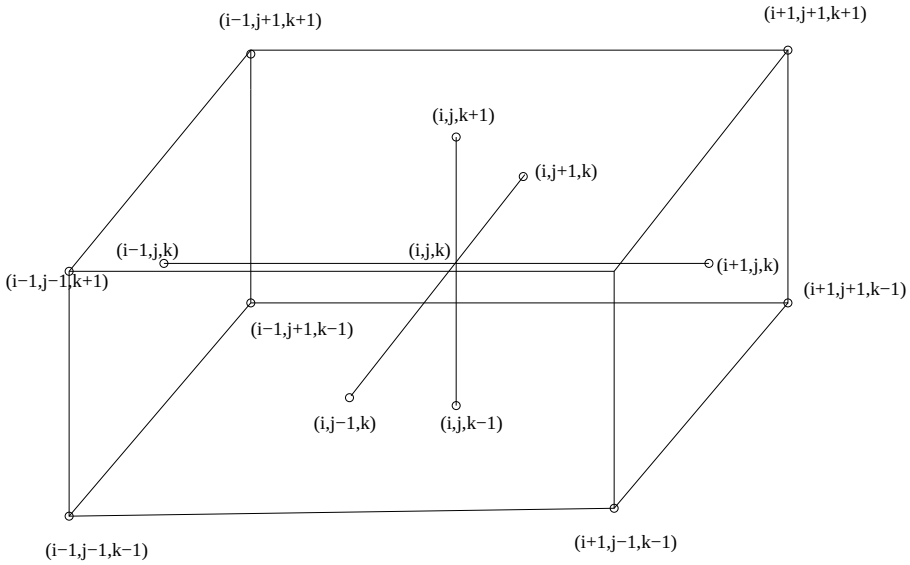


Figure 1: Maillages possibles : Structuré cartésien et non-structurés

Discrétisation cartésienne régulière : Schéma à 2d+1 points







Un lien avec l’hyperbolique

$$\Phi_t + H(t, x, \nabla\Phi) = 0, \qquad (HJ) \tag{7}$$

dériver (7) en x_i i=1..d) : équivalence formelle

entre (7) et $\frac{\partial}{\partial t}W + div(F(t, x, W)) = 0$ si $F(t, x, W)_{ij} = H(t, x, W)\delta_{ij}$.

Schéma à 2d+1 points : H^{num} un hamiltonien numérique

$$\begin{cases} (d=1) \;\; \Phi_i^{n+1} = \Phi_i^n - \Delta t H^{Num}(t^n, x_i, \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{\Delta x}, \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{\Delta x}) \\ \\ (d=2) \;\; \Phi_{ij}^{n+1} = \Phi_{ij}^n - \Delta t H^{Num}(t^n, x_{ij}, \frac{\Phi_{ij} - \Phi_{i-1j}}{\Delta x}, \frac{\Phi_{i+1j} - \Phi_{ij}}{\Delta x}, \frac{\Phi_{ij} - \Phi_{ij-1}}{\Delta y}, \frac{\Phi_{ij+1} - \Phi_{ij}}{\Delta y}) \end{cases}$$

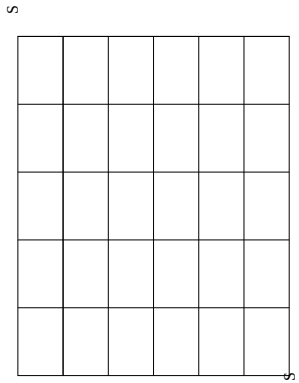
Problème de Riemann : si d=1 , 2 données constantes Wg et Wd deviennent 2 états linéaires pour (7). Si d>1 : Problème de Riemann vraiment multi-D...

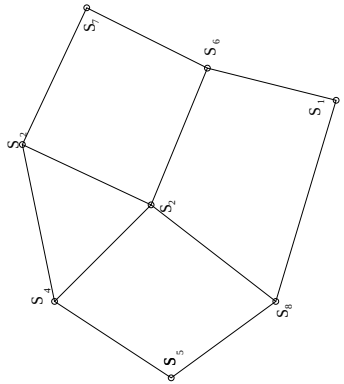
Théorème de convergence de schéma : Lions, Barles, Souganidis

1. Consistance $H^{num}(t, x, P, P) = H(t, x, P)$
2. Monotonie
3. $|u_i^n - u(M_i, n\Delta t)| \leq c\sqrt{\Delta t}$

Schéma de type Hyperbolique pour équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre

Solveurs aux noeuds : Solveur de Riemann approché vraiment multi-dimensionnel. Maillages structurés et non-structurés.





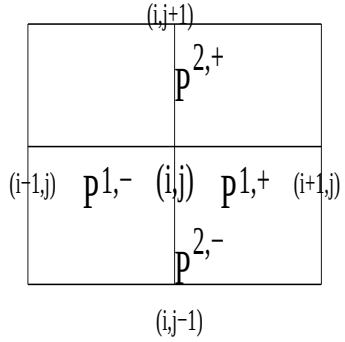
Solveur de Godunov : Pour TOUT Hamiltonien (Osher-Bardi)

Notation : $P^{1-} = \frac{(\Phi_{ij} - \Phi_{i-1j})}{\Delta x}, P^{1+} = \frac{(\Phi_{i+1j} - \Phi_{ij})}{\Delta x}$, $P^{2-} = \frac{(\Phi_{ij} - \Phi_{ij-1})}{\Delta y}, P^{2+} = \frac{(\Phi_{ij+1} - \Phi_{ij})}{\Delta y}$

$$H^{num}_{Godunov}(x, P^{1-}, P^{1+}, P^{2-}, P^{2+}) = ext_{P^1 \in I_1(P^{1-}, P^{1+})} ext_{P^2 \in I_2(P^{2-}, P^{2+})} H(x, (P^1, P^2)). \quad (8)$$

$I_k(P^{k-}, P^{k+}) = [min(P^{k-}, P^{k+}), max(P^{k-}, P^{k+})]$, and

$$ext_{P^k \in I_k(P^{k-}, P^{k+})} = \begin{cases} \min_{u \in I_k(P^{k-}, P^{k+})} & P^{k-} \leq P^{k+} \\ \max_{u \in I_k(P^{k-}, P^{k+})} & P^{k-} > P^{k+} \end{cases}$$



$\Rightarrow$ trés précis, le moins diffusif de tous les hamiltoniens numériques monotones, entropique, convergent

$\Rightarrow$ pas facile à calculer et trés couteux

schéma multi-dim totalement décentré (Osher-Sethian)

Pour discrétiser le hamiltonien H :

$$\Phi_t + H(x, \nabla\Phi) = 0, \qquad \text{H convexe et “square”} \quad H(x,p) = F(x,p^2)$$

$$\forall i = 1, ..d, \qquad p_i H_{p_i}(x,p) > 0$$

Osher-Sethian (1988) propose le hamiltonien numérique suivant :

$$\mathbf{H^{OSX}(x, \bar{P}^{1-}, \bar{P}^{1+}, ..., \bar{P}^{d-}, \bar{P}^{d+}) = F(x, \max(\bar{P}^{1-}, 0)^2 + \min(\bar{P}^{1+}, 0)^2, ..., \max(\bar{P}^{d-}, 0)^2 + \min(\bar{P}^{d+}, 0)^2)} \tag{9}$$

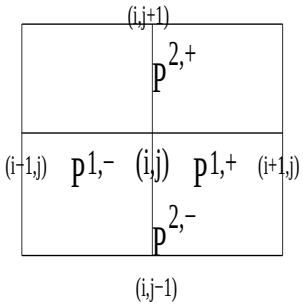


schéma multi-dim totalement décentré (Rouy-Tourin)

Pour discrétiser le hamiltonien H de l'équation :

$$\Phi_t + H(x, \nabla\Phi) = 0, \qquad \text{H convexe et “square”}$$

$$\forall i = 1, ..d, \qquad p_i H_{p_i}(x, p) > 0$$

Rouy-Tourin (1991) propose le hamiltonien numérique suivant :

$$\mathbf{H^{RTX}(x, \bar{P}^{1-}, \bar{P}^{1+}, ..., \bar{P}^{d-}, \bar{P}^{d+}) = H(x, \max(\max(\bar{P}^{1-}, 0), \max(-\bar{P}^{1+}, 0)), ..., \max(\max(\bar{P}^{d-}, 0), \max(-\bar{P}^{d+}, 0)))} \tag{10}$$

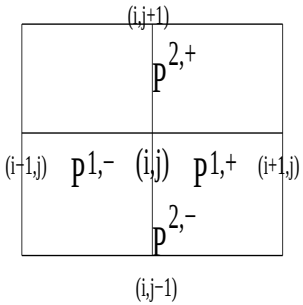


Schéma multi-dim de Lax-Friedrichs (optimisé)

Pour discrétiser le hamiltonien H de :

$$\Phi_t + H(x, \nabla\Phi) = 0, \qquad \text{H général}$$

Soit le hamiltonien numérique de type “Lax-Friedrichs ” :

$$\mathbf{H^{LFX}(x, \bar{P}^{1-}, \bar{P}^{1+}, \ldots, \bar{P}^{d-}, \bar{P}^{d+}) = H(x, \frac{\bar{P}^{1-}+\bar{P}^{1+}}{2}, \ldots, \frac{\bar{P}^{d-}+\bar{P}^{d+}}{2}) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \alpha^{i}(x)(\bar{P}^{i+} - \bar{P}^{i-})} \quad (1$$

$\alpha^i(x)$: coefficients locaux de diffusion numérique.
dépendance en x est TRES importante dans les régions à faible vitesse (ex. $H(x,p) = V(x)|p|$, $|H_p| = V(x) \simeq 0$), en particulier dans les zones où la vitesse s'annulle : à cause de cette diffusion Φ décroit strictement ! !
Plus généralement, adapté pour les problèmes raides en x : $(\frac{\max_x supp|H_p(x,p)|}{\min_x supp|H_p(x,p)|} >> 1)$

Proposition 1. *Let j = (j1,...,jd), et* $x_j = (x^1_{j1}, .., x^d_{jd})$, *if :*

(i) La grille cartésienne est constante dans chaque d direction, et donnée par : Δx^1,...,Δx^d,

(ii) Dérivées d'ordre 1 : $\bar{P}^{i-}_j$ *(resp.* $\bar{P}^{i+}_j$*) :*

$$\bar{P}^{i-}_{(j1,..,ji,..,jd)} = \frac{\Phi^n_{j1,.,ji,..jd} - \Phi^n_{j1,.,ji-1,..jd}}{\Delta x^i}, \quad \bar{P}^{i+}_{(j1,..,ji,..,jd)} = \frac{\Phi^n_{j1,.,ji+1,..jd} - \Phi^n_{j1,.,ji,..jd}}{\Delta x^i}.$$

Alors, le schéma :

$$\Phi^{n+1}_j = \Phi^n_j - \Delta t H^{LFX}(x_j, \bar{P}^{1-}, \bar{P}^{1+}, ..., \bar{P}^{d-}, \bar{P}^{d+}), \tag{12}$$

est **monotone** *si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. $\alpha^i(x_j) \geq |\partial_{P^i} H(x_j, P^1, .., P^d)| \qquad \forall P \in I\!R^d$, *for* $i = 1, ..., d$.
2. $\Delta t \leq \left(\sum_{i=1}^d \frac{\alpha^i(x_j)}{\Delta x^i} \right)^{-1}$.

Definition 2.

$$\text{schéma optimisé} \Leftrightarrow \alpha^{\mathbf{i}}(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{P} \in I\!R^{\mathbf{d}}} |\partial_{\mathbf{Pi}} \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{P^1}, .., \mathbf{P^d})| \tag{13}$$

Ce problème d'optimisation (6) est effectué AVANT LA PHASE ITERATIVE et peut se résoudre :

1. Hamiltonien Convexe : par un algorithme de type CG non-linéaire.
2. Hamiltonien Général : Plus difficile.

Parfois le calcul est analytique :

Lemma 1. *Pour* $H(x, \nabla\Phi) = \sqrt{{}^t\nabla\Phi A(x)\nabla\Phi}$, *avec A(x) symétrique définie positive, le schéma est optimisé pour le choix :*

$$\alpha^i(x) = \sqrt{A_{ii}(x)}. \tag{14}$$

Algorithme pour problèmes statiques généraux

$$(PDE) \qquad H(x, \nabla\Psi) = 0 \qquad \text{in } \Omega \subset I\!R^d, \tag{15}$$

$$(BC) \qquad \Psi(x) = g(x) := 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega. \tag{16}$$

Rappel :

1. $H(x, \nabla\Psi) = |\nabla\Psi| - n(x)$, (équation eikonal isotrope) [Rouy-Tourin 1991], schéma basé sur une approche controle optimal, **généralisable aux hamiltoniens "square" et convexe**.

2. $H(x, \nabla\Psi) = |G^{-1/2}(x)\nabla\Psi| - n(x)$, (équation eikonal anisotrope) [Hoch 2000], schéma basé sur une approche Lax-Friedrichs optimisé, **généralisable à TOUS les Hamiltoniens .....**

Soit U une approximation numérique de Ψ et (en dimension d=2) :

$$a := \frac{U_{ij} - U_{i-1j}}{\Delta x}, \qquad b := \frac{U_{i+1j} - U_{ij}}{\Delta x},$$
$$c := \frac{U_{ij+1} - U_{ij}}{\Delta y}, \qquad d := \frac{U_{ij} - U_{ij-1}}{\Delta y}.$$

Soit :

$$\begin{aligned} L(U)_{ij} &= H^{LFX}(M_{ij}, a, b, c, d) := \ldots \\ \ldots &= H(M_{ij}, \tfrac{a+b}{2}, \tfrac{c+d}{2}) - \tfrac{1}{2}\left(\alpha(M_{ij})(b-a) + \beta(M_{ij})(d-c)\right). \end{aligned} \tag{17}$$

U doit satisfaire :

$$\begin{cases} L(U)_{ij} = 0 & \forall M_{ij} \in \Omega, \\ U_{ij} = g_{ij} & \forall M_{ij} \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{18}$$

On note que (17) se réecrit :

$$L(U)_{ij} = \left(\frac{\alpha(M_{ij})}{\Delta x} + \frac{\beta(M_{ij})}{\Delta y}\right) U_{ij} + K(M_{ij}, U_{i-1j}, U_{i+1j}, U_{ij-1}, U_{ij+1}). \tag{19}$$

$$K(M_{ij}, U_{i-1j}, U_{i+1j}, U_{ij-1}, U_{ij+1}) = H(M_{ij}, \frac{U_{i+1j}-U_{i-1j}}{2\Delta x}, \frac{U_{ij+1}-U_{ij-1}}{2\Delta y}) - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha(M_{ij})}{\Delta x}(U_{i-1j} + U_{i+1j}) + \frac{\beta(M_{ij})}{\Delta y}(U_{ij-1} + U_{ij+1})\right.$$

L’approche itérative Rouy-Tourin (en posant U_{ij}^{n+1} et U_{kl}^{n} $(k,l) \neq (i,j)$) peut s’utiliser SANS résoudre *aucun point fixe* pour TOUT Hamiltonien(en dimension d’espace quelconque).

Le schéma itératif pour TOUT Hamiltonien

$U^n \longrightarrow U$ solution discrète de $L(U)_{ij} = 0$.

(1) n=0, U^0 t.q. $U^0_{ij} = g_{ij}$ sur $\partial\Omega$ et $U^0_{ij} = f_{ij}$ dans Ω .

(2) Au pas n+1, $\forall\ M_{ij}$ in Ω, on résoud $L(U)_{ij} = 0$ avec U_{kl} fixé :

$$\Leftrightarrow U^{n+1}_{ij} = -\left(\frac{\alpha(M_{ij})}{\Delta x} + \frac{\beta(M_{ij})}{\Delta y}\right)^{-1} K(M_{ij}, U^n_{i-1j}, U^n_{i+1j}, U^n_{ij-1}, U^n_{ij+1}) \tag{20}$$

Interprétation : Itération de Jacobi

Quelques équations de HJ et tests

Optimisé/Non Optimisé : exemples

$$H(x,p,q) = I(x)\sqrt{1+p^2+q^2} - 1 \qquad \text{in}(-1,1)\times(-1,1)$$

$I(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(1-|x_1|)^2+(1-|x_2|)^2}}$ $\qquad u^{ex}(x) = (1-|x_1|)(1-|x_2|),$ comparaisons

$$H(x,p,q) = \sqrt{p^2 + \frac{1}{\sqrt{1+100sin^2(4\pi x_1)}}q^2} - 1 \qquad \text{in}(-1,1)\times(-1,1)$$

Comportement oscillant $\frac{\max_x \sup_p |H_p(x,p)|}{\min_x \sup_p |H_p(x,p)|} = 101$

$$H(x,p,q) = c(x)\sqrt{p^2+q^2} - 1 \qquad \text{dans}(-1,1)\times(-1,1)$$

$c(x) = \min(sin^2(\frac{\pi x_1}{2}), \varepsilon),$ $\qquad$ tester la diffusion

Comparaisons avec une solution exacte $\sum_{ij} |U^{n+1} - U^n| < 1e-8$, nx=ny=100

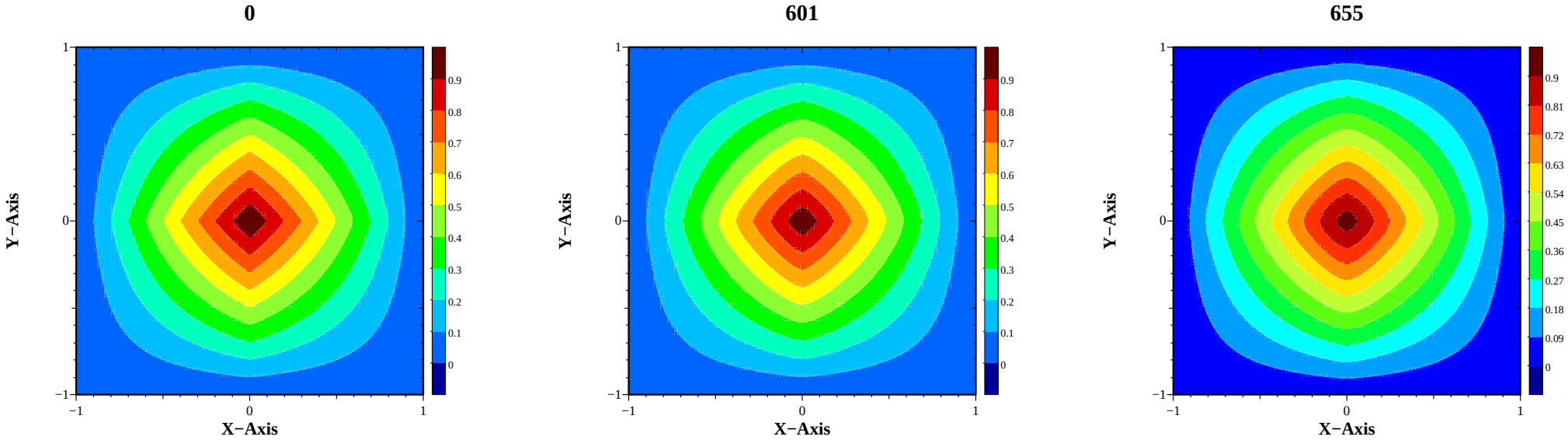


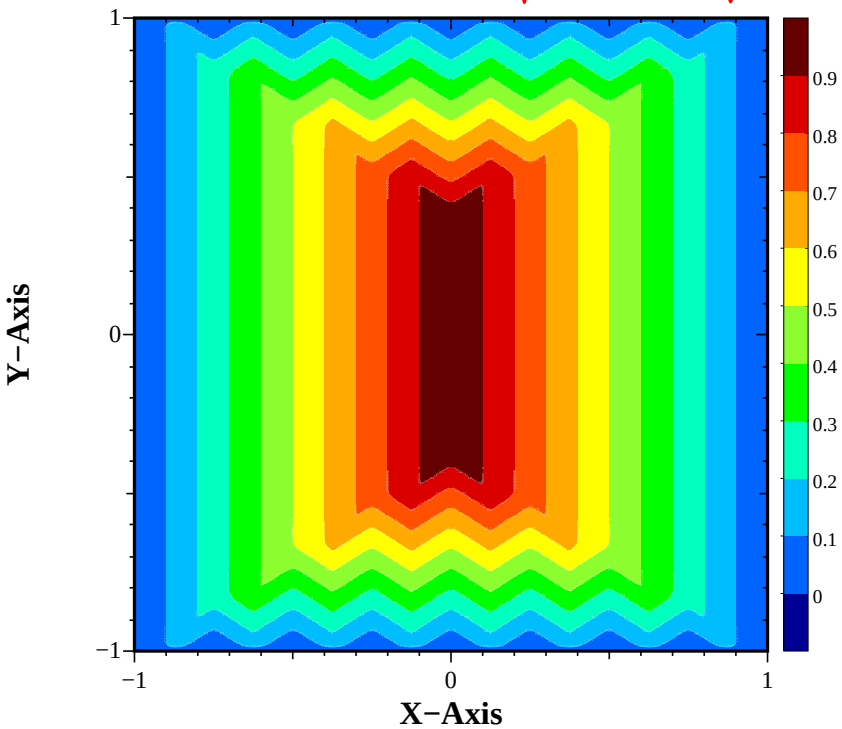
Figure 2: Exact Optimisé Non Optimisé

Erreur et nombre d’itérations

	OPTIMISE		NON-OPTIMISE	
nx	L^∞	$nbIter$	L^∞	$nbIter$
50	0.0476985	310	0.0970668	376
100	0.0231971	601	0.0518346	655
200	0.0112717	1146	0.0263123	1242

Convergence : ordre 1.

$$H(x,p) = \sqrt{p^2 + \frac{1}{\sqrt{1+100sin^2(4\pi x_1)}}q^2} - 1$$ **,nx=ny=200**



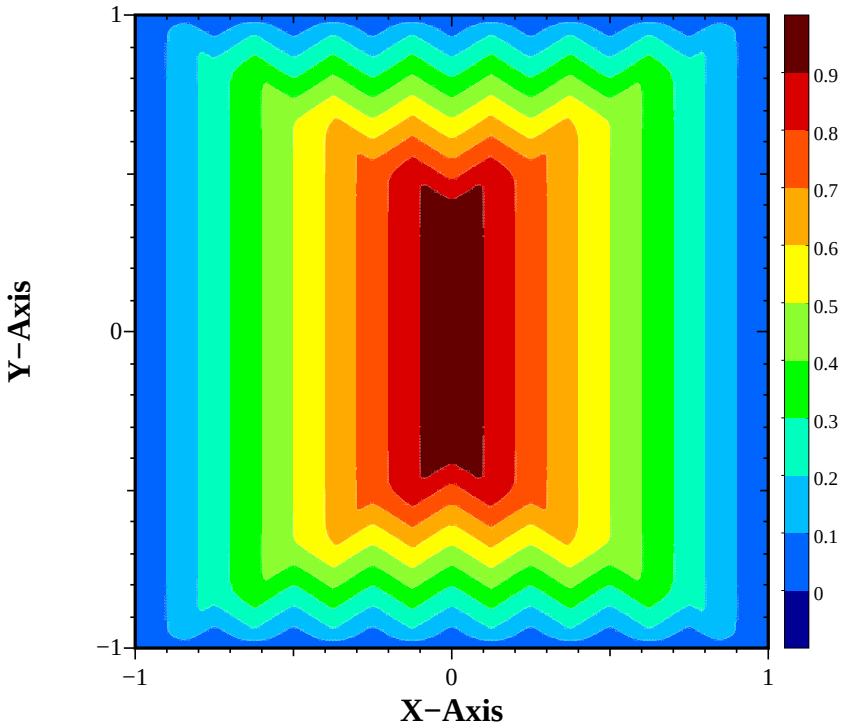


Figure 3: Optimisé Non-Optimisé

nx=ny=100

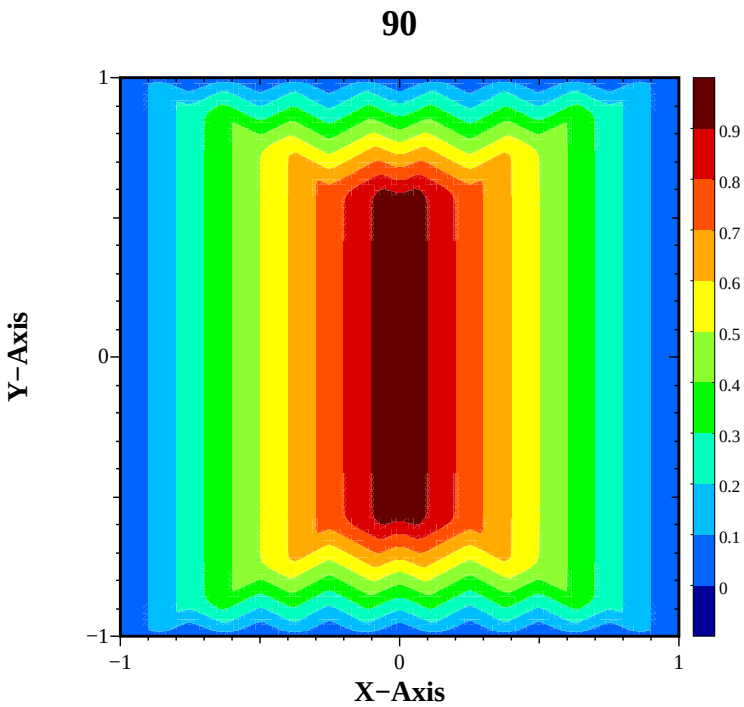
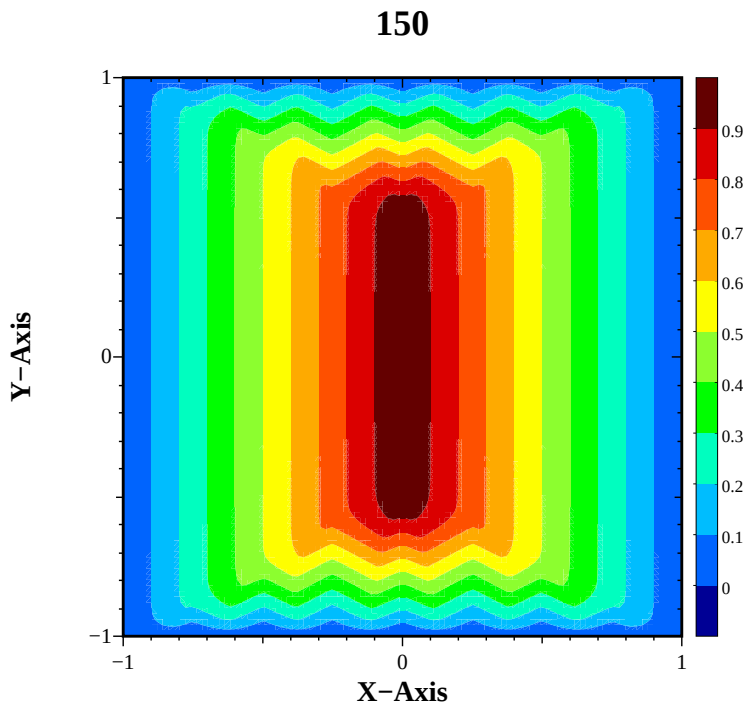


Figure 4: Optimisé,$\alpha(x) \equiv 1, \beta(x) = I(x)$



Non-Optimisé $\alpha(x) \equiv \beta(x) \equiv 1$

$$H(x,p) = \min(sin^2(\frac{\pi x_1}{2}), \varepsilon)\sqrt{p^2+q^2} - 1, \ \varepsilon = .01$$

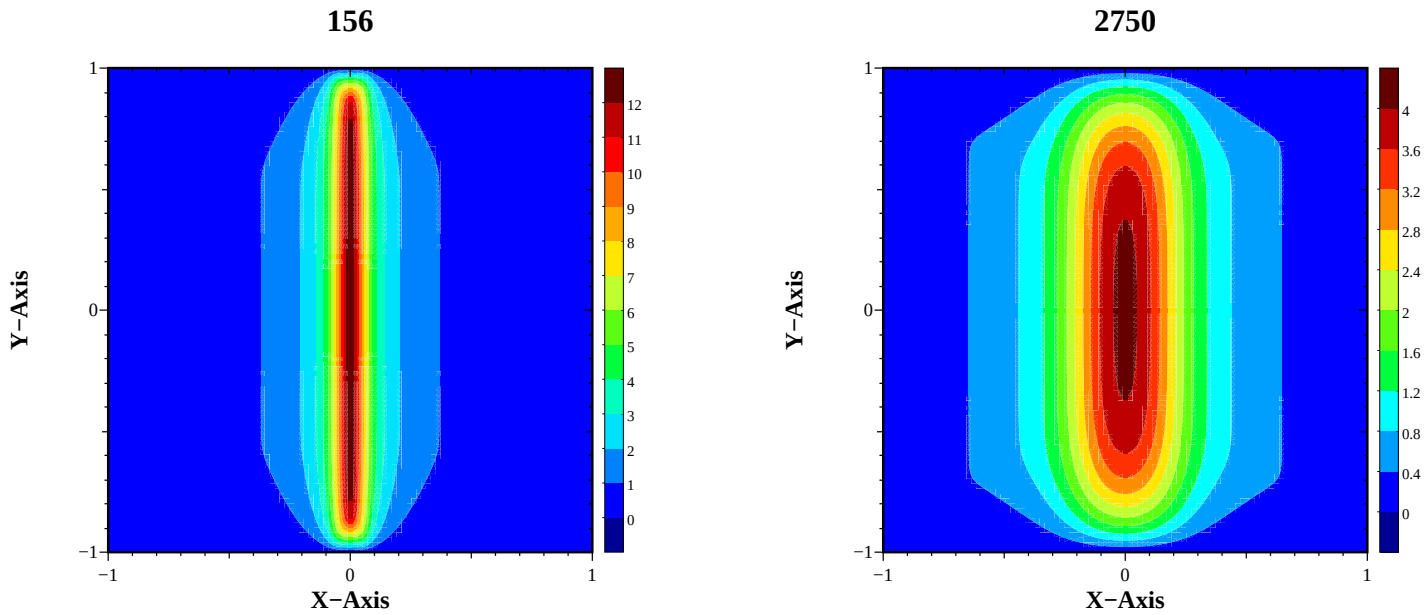


Figure 5: Optimisé Non-Optimisé

Cas extrême $\varepsilon = 0$, solution stationnaire de l’équation level-set

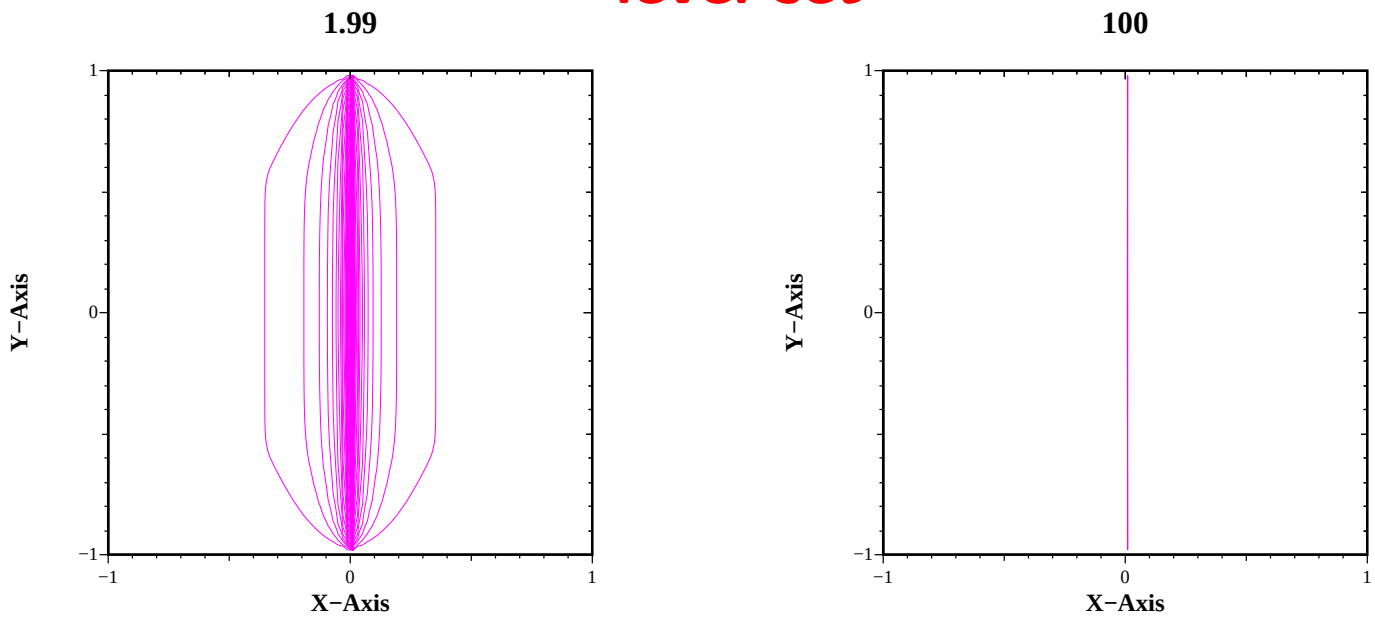
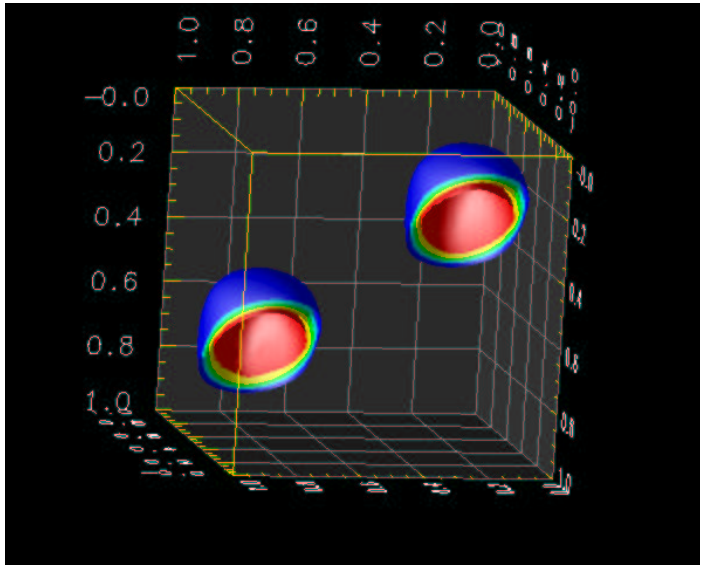
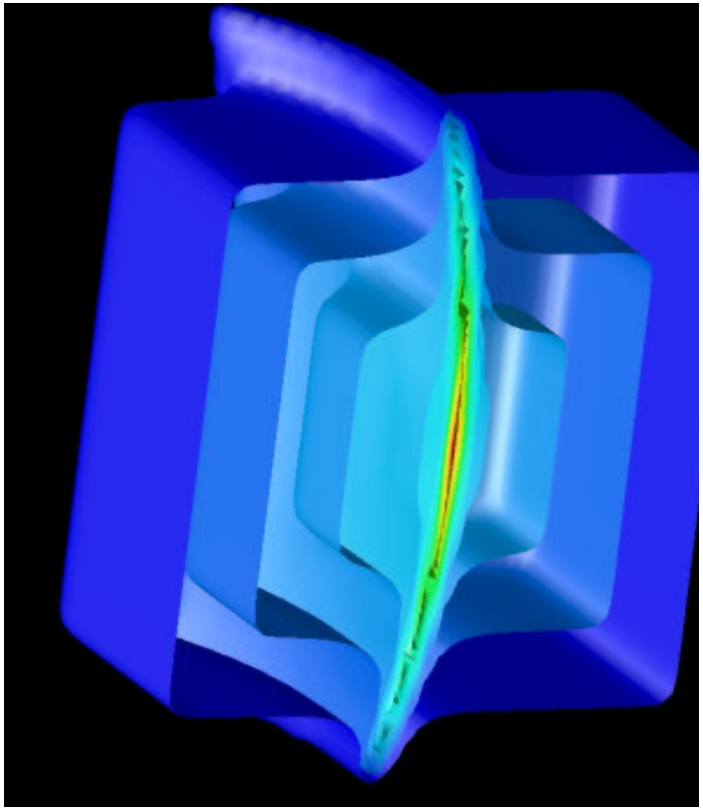


Figure 6: Evolution de la ligne de niveau ZERO Temps Final (long)

Exemple en dimension 3

$$H(x,p) = |G^{-1/2}(x)p| - 1$$





Rajout du Sweeping : Itération Gauss Seidel

$$U_{ij}^{n+1} = \frac{-1}{(\frac{\alpha(M_{ij})}{\Delta x}+\frac{\beta(M_{ij})}{\Delta y})} \times \ldots \left(H(M_{ij}, \frac{U_{i+1j}^n - U_{i-1j}^n}{2\Delta x}, \frac{U_{ij+1}^n - U_{ij-1}^n}{2\Delta y}) - \frac{1}{2}(\frac{\alpha(M_{ij})}{\Delta x}(U_{i-1j}^s + U_{i+1j}^s) + \frac{\beta(M_{ij})}{\Delta y}(U_{ij-1}^s + U_{ij+1}^s)) \right) \quad (21)$$

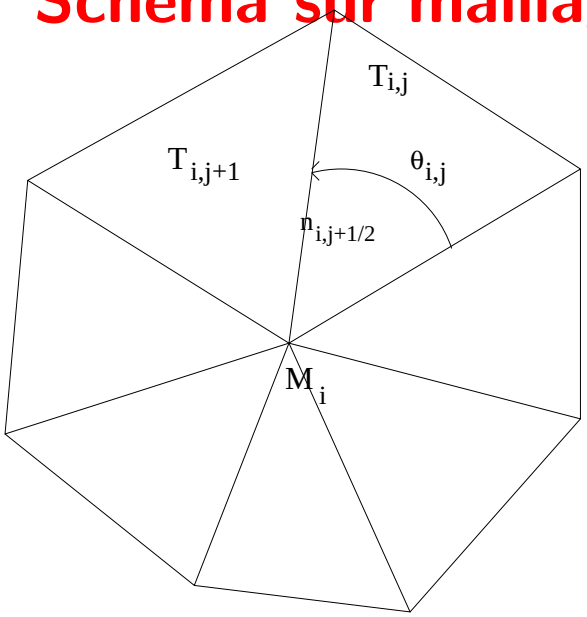
ou la valeur s pour U^s s'applique à n ou n+1 suivant la direction privilégiée (séléction du sens et direction des caractéristiques)

1. Gauche $\longrightarrow$ Droite i=1,nx ; j=1,ny : U_{i-1j}^{n+1} et autres au temps n
2. Sud $\uparrow$ Nord i=nx,1 ; j=1,ny : U_{ij-1}^{n+1}
3. Nord $\downarrow$ Sud i=1,nx ; j=ny,1 : U_{ij+1}^{n+1}
4. Droit $\longleftarrow$ Gauche i=nx,1 ; j=ny,1 : U_{i+1j}^{n+1}

Nombre d’itérations : Sweep(Non-Sweep) Optimisé

1. nx=50 : 61(310) nx=100 : 115(601) nx=200 : 216(1146)
2. nx=100 : 32(122) nx=200 : 46(218)
3. nx=100 : 29(156) nx=200 : 50(271)

Schéma sur maillages non-structurés triangulaire R. Abgrall



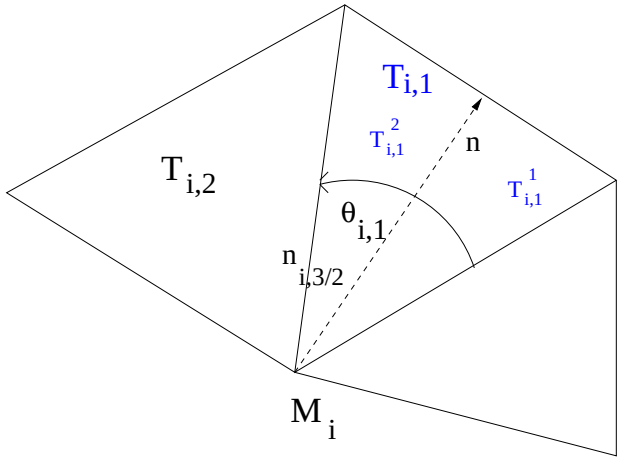
$$\partial_t u + H(x, \nabla u) = 0$$

Notations : M, T, le noeud et l'élément courant. M_i^T le i^{eme} noeud dans l'élément T, et $T_{i,j}$ le j^{eme} élément attaché à M_i (convention élément fini), on note $nsup(i)$, le nombre d'éléments dont M_i est un sommet. $n_{i,(j+1/2)}$ le vecteur unitaire partant de M_i et joignant son j^{eme} voisin. Enfin, $\theta_{i,j}$, l'angle incident en M_i formé par $n_{i,(j-1/2)}$ et $n_{i,(j+1/2)}$. Pour les points à l'interieur du domaine $\sum_j^{nsup(i)} \theta_{i,j} = 2\pi$.

Quoi de plus que le structuré

Chaque sommet n'a pas le même degré (nombre de noeuds voisins), il faut donc à priori une formule qui soit *intrinsèque* à la solution (indépendante du découpage).

$$H^{num}(M_i, \bar{P}^{T_{i,1}}, \ldots, \bar{P}^{T_{i,nsup(i)}}) = H^{num}(M_i, \bar{P}^{T^1_{i,1}}, \bar{P}^{T^2_{i,1}}, \ldots, \bar{P}^{T_{i,nsup(i)}}) \qquad (22)$$



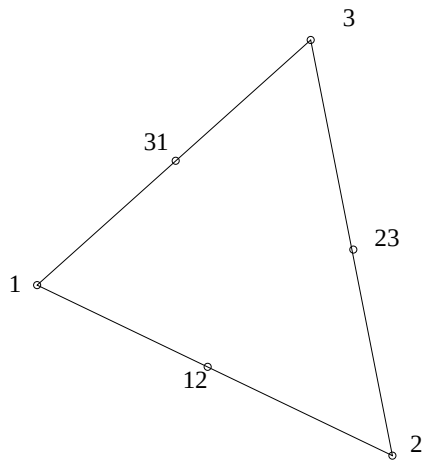
Calcul des gradients

NB : Pour la monotonie (ordre 1), il faut considérer, une donnée u, linéaire par morceaux.

1. approche éléments finis : calcul des fonctions de base $N_i(x)$ ($N_i(M_j^K) = \delta_{ij}$), la montée en ordre spatiale se fait en utilisant des éléments finis de haut degré (stencil compact).

$$u_T(x) = \sum_{i=1}^{ndl(k)} u_i^T N_i(x)$$

On peut les calculer directement dans l'espace réel x pour les éléments (P1,P2) :



(a) Gradients P1 : $\nabla u_T(x) = \sum_{i=1}^{3} u_i^T \nabla N_i(x)$, $\nabla N_i(x) = \frac{(M_{i++} - M_{i+})^{\perp}}{2aire(T)}$

(b) Gradients P2 : Fonctions de bases P2 : $N_i^{P2}(x) = (2N_i(x) - 1)N_i(x)$, i=1,2,3 et $N_{ij}^{P2}(x) = 4N_i(x)N_j(x)$, (ij)=(12),(23),(31).
$\nabla u_T(x) = \sum_{i=1}^{3} u_i^T (4N_i(x) - 1)\nabla N_i(x)) + \sum_{ij} 4(N_i(x)\nabla N_j(x) + N_j(x)\nabla N_i(x))u_{ij}^T$

2. approche de type ENO, WENO (Shu, Sethian, etc) : reconstruction d’ordre élevée se fait en utilisant l’information sur les mailles voisines.

Hamiltonien numérique de type “Lax-Friedrichs ” : R. Abgrall

$$\mathbf{H^{LFX}(x_i, \bar{P}^{T_{i,1}}, \bar{P}^{T_{i,2}}, \ldots, \bar{P}^{T_{i,nsup(i)}}) = H(x_i, \tilde{P}_i) - \rho\nu \sum_{j=1}^{nsup(i)} \beta_{j+1/2} \frac{(\bar{P}^{T_{i,j}} + \bar{P}^{T_{i,j+1}}}{2} . n^{j+1/2}} \quad (23)$$

$\tilde{P}_i = \frac{\sum_{j=1}^{nsup(i)} \theta_j \bar{P}^{T_{i,j}}}{2\pi}$, avec nsup(i) : nombre de mailles contenant i, $T_{i,j}$: numéro de la j eme maille contenant le noeud i.

$\beta_{j+1/2} = \tan(\frac{\theta_j}{2}) + \tan(\frac{\theta_{j+1}}{2})$, $\nu = \frac{C(L)}{\rho\pi}$, $\rho = \min_i d(x_i, \partial\mathcal{V}_0(i)))$, .
$V_0(i)$ le voisinage des éléments contenant M_i.
Schéma : intrinsèque, consistant, et monotone sous CFL $\Delta t \leq \frac{\rho}{2C(L)}$

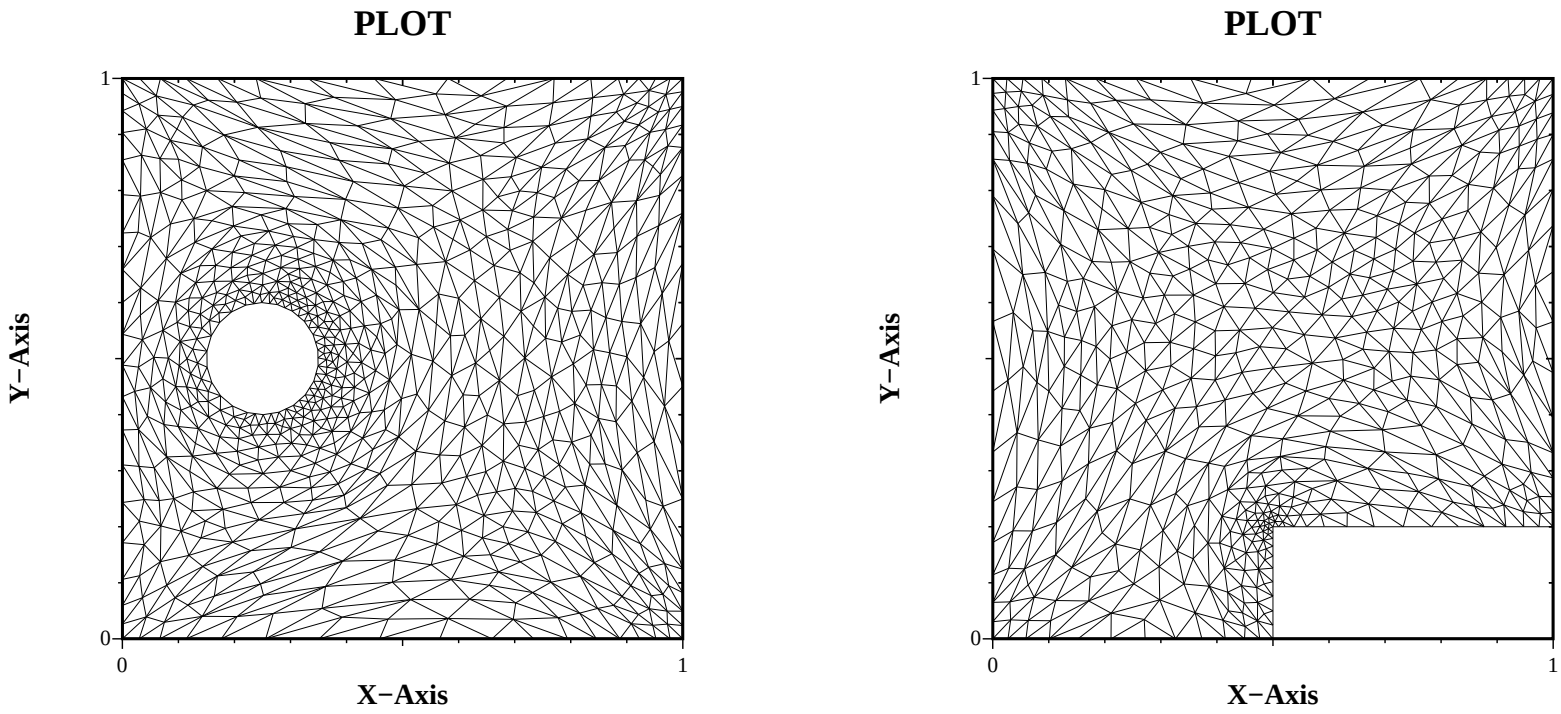


Figure 7: maillage non structuré ; sommet et ses mailles supports

Perspectives

1. Maillages mixtes (triangles, quandrangles).
2. Extensions à d’autres éléments finis P1 bulle, Q1.

GO++ (NS) : Logiciel modulaire Lagrangien/Eulerien

pour équations de Hamilton-Jacobi en maillage structuré et non-structuré

Rappel et synthèse

H(s,y,p) Hamiltonien décrit la physique

Problèmes Lagrangiens

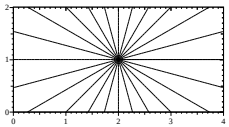
$$\begin{cases} \dot{y}(s,y^0) = H_p(s,y,p), \quad y(0,y^0) = y^0 \\ \dot{p}(s,y^0) = -H_y(s,y,p), \quad p(0,y^0) = \phi^0_{y^0}(y^0) \\ \dot{\phi}(s,y^0) = p.H_p(s,y,p) - H(s,y,p) \\ \phi(0,y^0) = \phi^0(y^0) \end{cases}$$

problèmes Euleriens

$$\text{evolution} \quad \{u_t + H(t,x,\nabla u) = 0 + CI + CL,$$

$$\text{stationnaire} \quad \{H(x,\nabla u) = 0 \quad + CL.$$

Chemins “Optimaux” (multi-valuée)

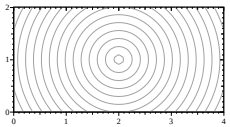


“Caracterisation” (H Convexe)

$$u(t,x) = \min_{y^0; y(t,y^0)=x} \phi(t,y^0),$$

$$\text{if} \quad u(t,y(t,y_0)) = \phi(t,y^0)$$

Solutions de viscositée (univaluée)



OBJECTIFS et CONTRAINTES

1. Logiciel Modulaire pour résoudre à la fois les modes Eulerien et Lagrangiens en 2D.
   $\longrightarrow$ Modules Indépendents sous la forme de classes C++.
2. Compatibilité avec d'autres librairies libres.
   $\longrightarrow$ Tableaux (+ avec produits scalaires) sont implémentée avec les classes RNM (F. Hecht).
   $\longrightarrow$ Visualisation simple avec plotmtv ou gnuplot (rien à connaitre).
3. Facile à utiliser et pour ajouter les contributions de chercheurs (pas nécessairement experts) e.g. rajouter de nouvelles méthodes numériques, nouvelles applications, comparaisons ...
4. Rapide pour les problèmes 2D/3D avec des applications réalistes.
5. Etre capable de simuler simultanément les 2 modes Lagrangien/Eulerien (avec le même Hamiltonien).

STRUCTURE PRINCIPALE

But : définir une UNIQUE structure de données ISH pour les problèmes Lagrangiens /Euleriens :

Chacun s'écrit $\dot{X}(s) = RHS(X(s))$ (ou $X^{n+1} = RHS(X^n)$)

$$i = 1...nx \times ny \quad \begin{cases} \dot{y}_i(s) = H_p(s, y, p), \\ \dot{p}_i(s) = -H_y(s, y, p), \\ \dot{\phi}_i(s) = p.H_p(s, y, p) - H(s, y, p) \end{cases} \qquad i = 1...nx, j = 1...ny \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} x_{ij} = 0, ajoute \\ \frac{d}{dt} \nabla u_{ij} = 0, ajoute \\ \frac{d}{dt} u_{ij} + H^{num}(t, x_{ij}, \nabla u_{ij}) = 0 \end{cases}$$

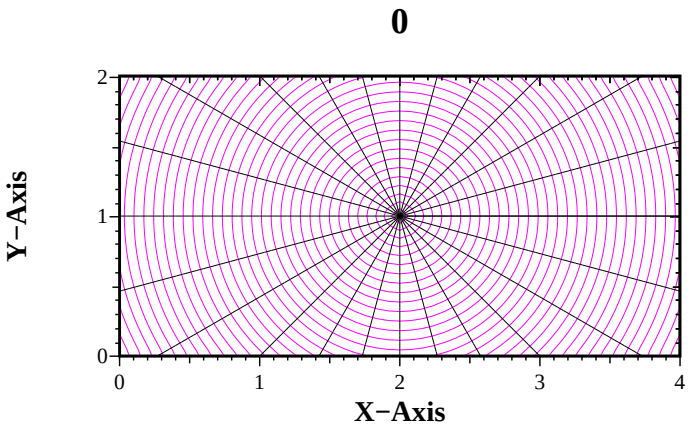
$\longrightarrow$ à t fixé, l'inconnue X est soit (y, p, ϕ) (Lag.) soit $(x, \nabla u, u)$ (Eul.), peut aussi servir à (H_y, H_p, H) (même dimension).

GO++.hpp et GO++NS.hpp : Liste

```
#include "RNM.hpp"            // Definition of arrays R, Rn, Rnm, Rnmk (F.Hecht)
#include "typedef.hpp"        // Definitions of mathematical and special fonctions
#include "geom.hpp"           // Definition geometry
#include "discret.hpp"        // Definition discretisation (cartesian regular)
#include "ish.hpp"            // Data Structure of the unknowns at time t fixed (y,p,phi)
#include "condlim.hpp"        // Boundary Conditions (Dirichlet, Neumann, mixt, ...)
#include "interpolation.hpp"  // Functions interpolation on regular cartesian grids (semi-analytical Hamiltonian)
#include "XFunction.hpp"      // Spatials Fonctions (F(x))
#include "approx_grad.hpp"    // Numerical Methods to computed derivatives : Monotone, TVD, ENO ...
#include "hamiltonian.hpp"    // Definitions of hamitonians (continuous et numerical) to define ((H_y, H_p, H))
#include "application.hpp"    // Definition des applications (=1 Hamiltonian + 1 BC) to define the RHS.
#include "timesolveur.hpp"    // Time Solveur
```

Tests : Maillages Structurés

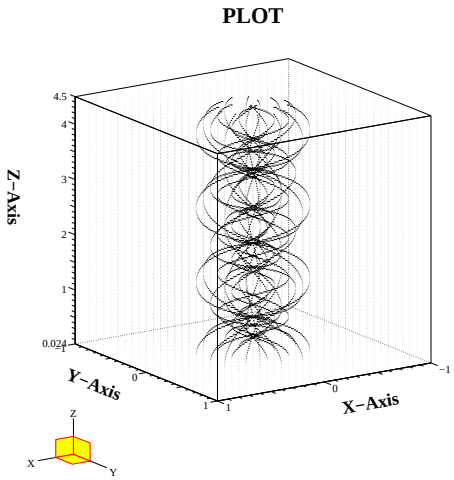
Hamiltonian $H(x,p) = |p|^2/2$ Burgers Equation

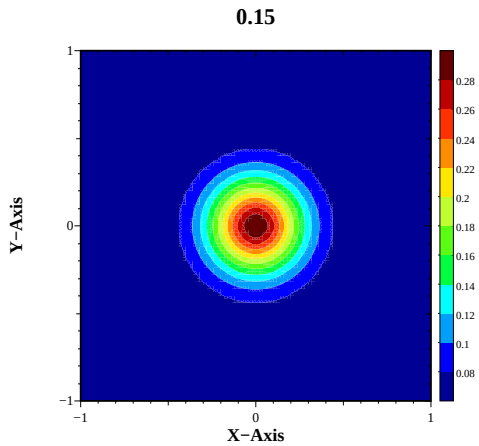


Lagrangian / Eulerian Solutions

Tests

Hamiltonien $H(x,p) = (|p|^2 - n^2(x))/2$ $(n(x)$ Analytique) Wave Guide





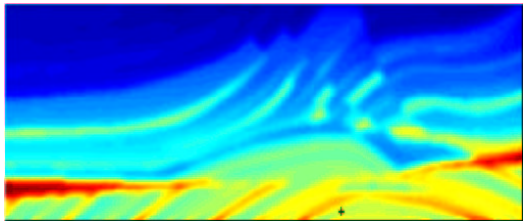
Pb Lagrangien (121 rayons)

Eulerien Evol(nx=ny=101)

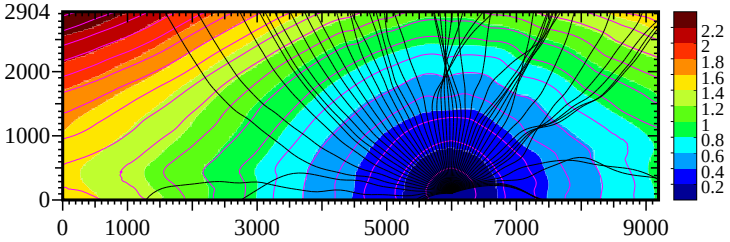
Tests

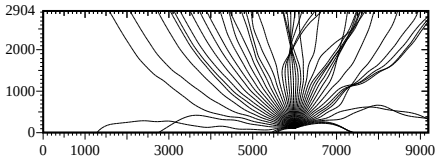
Hamiltonian $H(x,p) = c(x)|p|$ ($c(x)$ **Discret**) “Eikonal” equation

. indice de réfraction

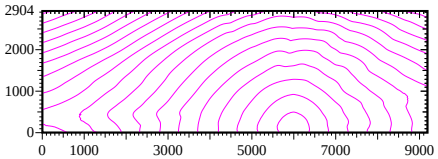


Marmousi Test Problem

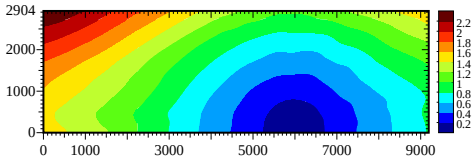




Pb Lagrangien (49 rayons)

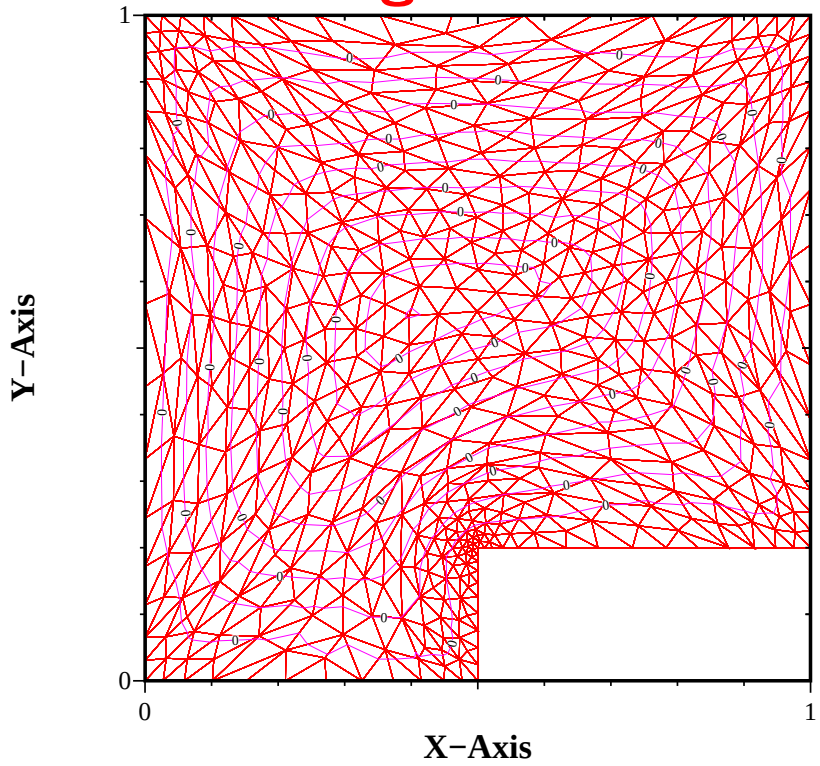


Eulerien Evol (18 zero Level curves)



Eulerien Static (15 level curves)

Tests : Maillages Non-Structurés



Perspectives

- Maillages non-structurés Etendre le solveur à des polyèdres quelconques.
- Maillages de type AMR.
- Développer une version 3d structurée/non-structurée (S.Delpino), pilotée par un langage.