Contrôle d'Analyse : corrigé

25 janvier 2008 – durée 3 heures

Exercice 1

Question 1. Application directe du théorème de Lax-Milgram.

Question 2. On considère le cas où $a(\cdot,\cdot)$ est le produit scalaire sur V, et $V_2 = V_1^{\perp}$. Pour tous $u \in V_1$ et $v \in V_2$, on a donc $(u, v) = 0$. Si u_1 est solution de (2), alors, pour tout $v \in V_2$,

$$\langle f, v\rangle = a(u_1, v) = (u_1, v) = 0.$$

Or il existe des formes f linéaires continues sur V ne vérifiant pas $\langle f, v\rangle = 0$ pour tout $v \in V_2$ (la forme f définie par $\langle f, v\rangle = (w, v)$ pour un élément $w \in V_2$ fixé non nul est un exemple). Pour un tel f, le problème (2) n'a pas de solution.

Question 3. On suppose que $V_1 = V_2$. Vérifions (3). Soit $u \in V_1$, avec $\|u\| = 1$. On a

$$\sup_{v\in V_1, \|v\|\leq 1} |a(u, v)| \geq |a(u, u)| \geq \alpha\|u\|^2 = \alpha,$$

donc (3) est vérifié avec $\beta = \alpha$.

Vérifions maintenant (4). Soit $v \in V_1$, $v \neq 0$. On a

$$\sup_{u\in V_1} |a(u, v)| \geq |a(v, v)| \geq \alpha\|v\|^2 > 0,$$

donc (4) est vérifié.

Question 4. V_2 est un sous-espace vectoriel fermé de V. Donc cet espace, muni de la norme $\|\cdot\|$, est un espace de Hilbert.

Soit $u \in V_1$. L'application $v \in V_2 \mapsto a(u, v)$ est linéaire et continue sur V_2. On applique le théorème de Riesz : il existe un unique élément de V_2, noté Ru, tel que

$$\forall v \in V_2, \quad (Ru, v) = a(u, v). \qquad (*)$$

R est ainsi une application de V_1 dans V_2. Comme a est linéaire de sa première variable, on vérifie aisément que R est linéaire.

Question 5. On choisit $v = Ru$ dans l'équation $(*)$ ci-dessus :

$$\|Ru\|^2 = (Ru, Ru) = a(u, Ru) \leq M\|u\|\|Ru\|,$$

donc $\|Ru\| \leq M\|u\|$. Montrons maintenant que $\|Ru\| \geq \beta\|u\|$. En utilisant à nouveau $(*)$, on écrit $|a(u, v)| = |(Ru, v)| \leq \|Ru\|\ \|v\|$, donc

$$\left|a\left(\frac{u}{\|u\|}, v\right)\right| \leq \frac{\|Ru\|}{\|u\|}\ \|v\|,$$

d'où

$$\sup_{v\in V_2, \|v\|\leq 1} \left|a\left(\frac{u}{\|u\|}, v\right)\right| \leq \frac{\|Ru\|}{\|u\|}.$$

On déduit de cette inégalité et de l'hypothèse (3) que $\|Ru\| \geq \beta\|u\|$.

Question 6. Montrons que $R(V_1)$ est fermé dans V_2. Soit w_n une suite de $R(V_1) \subset V_2$, convergente dans V_2 vers w. Montrons que $w \in R(V_1)$.

On écrit $w_n = Ru_n$, où $u_n \in V_1$. La suite $w_n = Ru_n$ converge dans V_2, donc elle est de Cauchy. Puisque $\|Ru\| \geq \beta\|u\|$ pour tout $u \in V_1$ (Question 5), on a donc que u_n est aussi de Cauchy dans V_1. Comme V est complet, u_n converge dans V, notons u sa limite. Comme V_1 est fermé, on a en fait $u \in V_1$. Par ailleurs, on déduit de l'inégalité $\|Ru\| \leq M\|u\|$ que R est continue sur V_1. Or u_n converge dans V_1 vers u : donc $w_n = Ru_n$ converge vers Ru.

La suite w_n converge donc vers Ru, et, par hypothèse, vers w : donc, par unicité de la limite, $w = Ru$, et $w \in R(V_1)$.

Question 7. L'orthogonal de $R(V_1)$ dans V_2 est

$$R(V_1)^{\perp} = \{w \in V_2;\ (w, Ru) = 0 \text{ pour tout } u \in V_1\}.$$

Soit $w \in R(V_1)^{\perp}$. Pour tout $u \in V_1$, on a $0 = (w, Ru) = a(u, w)$. L'hypothèse (4) implique alors que $w = 0$. Donc $R(V_1)^{\perp} = \{0\}$.

Question 8. Montrons que $R(V_1) = V_2$. Soit P la projection orthogonale de V_2 sur $R(V_1) \subset V_2$. Cette projection est bien définie car V_2 est un espace de Hilbert et $R(V_1)$ est un sous-espace vectoriel fermé de V_2 (Question 6). Soit $v \in V_2$. On écrit $v = Pv + \bar{v}$, où $(\bar{v}, z) = 0$ pour tout $z \in R(V_1)$. Donc $\bar{v} \in V_2$ vérifie $(\bar{v}, Ru) = 0$ pour tout $u \in V_1$. Donc $\bar{v} \in R(V_1)^{\perp}$, et, d'après la Question 7, $\bar{v} = 0$, donc $v = Pv$. Autrement dit, $R(V_1) = V_2$.

Le problème (2) s'écrit donc de manière équivalente comme

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_1 \in V_1 \text{ tel que} \\ \forall v \in R(V_1), \quad \langle f, v\rangle = a(u_1, v) = (Ru_1, v). \end{cases} \tag{$**$}$$

Appliquons le théorème de Lax-Milgram dans $R(V_1)$, qui est bien un espace de Hilbert pour $\|\cdot\|$ car c'est un sous-espace fermé de V_2 (Question 6), qui est lui même fermé dans V.

L'application $v \in R(V_1) \mapsto \langle f, v\rangle$ est linéaire et continue, tandis que l'application qui à v et w dans $R(V_1)$ associe (v, w) est bilinéaire, continue et coercive.

Appliquant le théorème de Lax-Milgram, on déduit qu'il existe un unique $w \in R(V_1)$ tel que

$$\forall v \in R(V_1), \quad \langle f, v\rangle = (w, v).$$

Comme $w \in R(V_1)$, il existe $u_1 \in V_1$ tel que $w = Ru_1$, et cet élément u_1 est solution de $(**)$.

Montrons que le problème $(**)$ admet une unique solution. Soit $\bar{u}_1$ une autre solution de $(**)$. On a donc que $0 = (R(u_1 - \bar{u}_1), v)$ pour tout $v \in R(V_1) = V_2$. En choisissant $v = R(u_1 - \bar{u}_1)$, on voit que $R(u_1 - \bar{u}_1) = 0$. Comme $\|Ru\| \geq \beta\|u\|$ (Question 5), ceci implique $u_1 = \bar{u}_1$.

Donc le problème $(**)$ admet une unique solution.

Exercice 2

Question 1. Car $||1||_{\dot{H}^1(\Omega)} = 0$.

Question 2. Car si $||u||_{\dot{H}^1(\Omega)} = 0$ avec $u \in C_c^\infty(\overline{\Omega})$ alors $\nabla u = 0$ et donc $u = 0$.

Question 3. Il suffit d'écrire $A = (A_1, A_2)$ avec $A_1 = 0$ et $A_2(x_1, x_2) = v(x_1, x_2)g(x_1)\psi(x_2)$ et de remarquer que

$$\int_{\partial\Omega} A \cdot n = \int_{\Omega} \sum_{i=1,2} \frac{\partial}{\partial x_i} A_i$$

Question 4. Faire simplement une IPP en x_1 en utilisant la question précédente avec $g(x_1) = \frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1)$.

Question 5. Appliquer Cauchy-Schwarz et Fubini.

Question 6. Il s'agit simplement de l'extension par continuité d'une application bilinéaire continue définie sur un sous-espace vectoriel dense.

Question 7. Appliquer Lax-Milgram (ou bien le théorème de Riesz).

Question 8. Applquer l'estimation de la question 5.

Question 9. Procéder comme à la question 3, en faisant une IPP en x_1 comme à la question 4. Conclure comme à la question 6.

Question 10. Il suffit d'appliquer la question 9 et la question 8.

Question 11. On calcule

$$\begin{aligned}
&- < \Delta\tilde{u}, \varphi > \\
&=< \nabla\tilde{u}, \nabla\varphi > \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla\tilde{u} \cdot \nabla\varphi \\
&= \sum_{\pm} \int_{\{\pm x_2 > 0\}} \nabla\tilde{u} \cdot \nabla\varphi \\
&= \sum_{\pm} \int_{\{\pm x_2 > 0\}} -\varphi \ \Delta\tilde{u} + \int_{\partial\{\pm x_2 > 0\}} \varphi \frac{\partial\tilde{u}}{\partial n} \\
&= \int_{\{x_2 = 0\}} 2g(x_1)\varphi(x_1, 0) \ dx_1
\end{aligned}$$

Question 12. Il suffit de remarquer que

$$< \widehat{\Delta\tilde{u}}, \varphi >=< \Delta\tilde{u}, \widehat{\varphi} >$$

et que

$$\widehat{\Delta\tilde{u}}(\xi) = -\xi^2\hat{\tilde{u}}(\xi)$$

Question 13. On calcule

$$\int_{\mathbb{R}} dx_1 \; g(x_1)\hat{\varphi}(x_1, 0)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dx_1 \; g(x_1) \left(\int_{\mathbb{R}^2} d\xi_1 d\xi_2 \; e^{-i\xi_1 x_1} \varphi(\xi_1, \xi_2) \right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} d\xi_1 d\xi_2 \; \varphi(\xi_1, \xi_2) \left(\int_{\mathbb{R}} dx_1 \; e^{-i\xi_1 x_1} g(x_1) \right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} d\xi_1 d\xi_2 \; \varphi(\xi_1, \xi_2)\hat{g}(\xi_1)$$

Ceci implique le résultat.

Question 14. On a

$$\tilde{u}(x_1, 0)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d\xi_1 d\xi_2 \; e^{i\xi_1 x_1} \hat{\tilde{u}}(\xi)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d\xi_1 d\xi_2 \; e^{i\xi_1 x_1} \frac{2\hat{g}(\xi_1)}{\xi_1^2 + \xi_2^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} d\xi_1 \; 2\hat{g}(\xi_1) e^{i\xi_1 x_1} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} d\xi_1 \; 2\hat{g}(\xi_1) e^{i\xi_1 x_1} \left(\frac{1}{|\xi_1|} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\bar{\xi}_2}{1 + \bar{\xi}_2^2} \right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} d\xi_1 \; 2\hat{g}(\xi_1) e^{i\xi_1 x_1} \left(\frac{\pi}{|\xi_1|} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\xi_1 \; \frac{\hat{g}(\xi_1)}{|\xi_1|} e^{i\xi_1 x_1}$$

Or par ailleurs on a

$$\tilde{u}(x_1, 0) = = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\xi_1 \; e^{i\xi_1 x_1} \hat{f}(\xi_1)$$

d'où par transformée de Fourier inverse, on déduit que

$$\hat{f}(\xi_1) = \frac{\hat{g}(\xi_1)}{|\xi_1|}$$

Question 15. Soit $v \in C_c^\infty(\overline{\Omega})$. Alors par IPP et en utilisant que $\Delta u = 0$ dans Ω, on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} = \int_{\partial\Omega} vg$$

Si $g(x_1) = \dfrac{\partial h}{\partial x_1}(x_1)$ avec $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, alors on peut appliquer l'estimation de la question 5 et la densité de $C_c^\infty(\overline{\Omega})$ dans $\dot{H}_0^1(\Omega)$ pour déduire l'égalité pour tout $v \in \dot{H}_0^1(\Omega)$. De plus

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_1}}(\xi_1) = i\xi_1 \hat{f}(\xi_1), \quad \hat{g}(\xi_1) = \widehat{\frac{\partial h}{\partial x_1}}(\xi_1) = i\xi_1 \hat{h}(\xi_1)$$

D'où

$$\widehat{Th}(\xi_1) = \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_1}}(\xi_1) = i\xi_1 \hat{f}(\xi_1) = -|\xi_1|\hat{h}(\xi_1)$$

Question 16. Si $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\xi_1 \mapsto |\xi_1|\hat{h}(\xi_1)$ est intégrable, et donc $\widehat{Th} \in L^1(\mathbb{R})$. Ainsi on a

$$\widehat{T(Th)}(\xi_1) = -|\xi_1|\hat{Th}(\xi_1) = \xi_1^2 \hat{h}(\xi_1) = -\widehat{\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2}}(\xi_1)$$

ce qui donne le résultat par transformée de Fourier inverse.