Corrigé du contrôle d'analyse

6 février 2009

Documents **autorisés** - Durée **3 heures**

Exercice (8 points)

1. On considère un voisinage compact K de $\mathrm{Supp}(u)$. On observe que

$$\begin{aligned} |v(\xi+h)-v(\xi)| &= |\langle u, \varphi(\cdot,\xi+h)-\varphi(\cdot,\xi)\rangle_{\mathcal{E}',C^\infty}| \\ &\leq C_K \max_{0\leq|\alpha|\leq p} \sup_{x\in K} |\partial^{(\alpha,0)}(\varphi(\cdot,\xi+h)-\varphi(\cdot,\xi))|. \end{aligned}$$

   Les dérivées de φ jusqu'à l'ordre p (fixé) étant uniformément continues sur le produit de K par un voisinage compact de ξ, le membre de droite tend vers zéro quand $h\to 0$, ce qui prouve la continuité de v.

2. On observe que

$$\frac{1}{h}(v(\xi+h)-v(\xi)) - \langle u, \partial^{(0,1)}\varphi(\cdot,\xi)\rangle_{\mathcal{E}',C^\infty} = \langle u, \delta_h(\cdot,\xi)\rangle_{\mathcal{E}',C^\infty},$$

   avec

$$\delta_h(x,\xi) = \frac{1}{h}(\varphi(x,\xi+h)-\varphi(x,\xi)) - \partial^{(0,1)}\varphi(x,\xi).$$

   Comme φ est régulière, δ_h ainsi que ses dérivées en x d'ordre $\leq p$ tendent uniformément vers 0 pour $x\in K$. On conclut comme ci-dessus.

3. Immédiate.

4. Posons

$$w(\zeta) = \langle u, \int_a^\zeta \varphi(\cdot,\xi)d\xi\rangle_{\mathcal{E}',C^\infty}.$$

   En appliquant la question 2, on déduit

$$\frac{d}{d\zeta}w(\zeta) = \langle u, \varphi(\cdot,\zeta)\rangle_{\mathcal{E}',C^\infty}.$$

   D'où la relation demandée en intégrant.

5. Soit $v(\xi) = \langle u, e^{-ix\xi}\rangle_{\mathcal{E}',C^\infty}$. De par la question 3, $v\in C^\infty(\mathbb{R})$. De plus, en utilisant l'estimation (1) donnée dans l'énoncé, il vient pour tout $\xi\in\mathbb{R}$,

$$|v(\xi)| \leq C_K \max_{0\leq|\alpha|\leq p} \sup_{x\in K} |\partial^\alpha(e^{-ix\xi})| \leq C'_K(1+|\xi|)^p.$$

   Enfin, pour $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, il vient

$$\langle v,\psi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \int v(\xi)\psi(\xi)d\xi \leq C''_K \mathcal{N}_{p+2}(\psi),$$

   ce qui montre que $v\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

6. D'après le théorème 10.23 du cours, une distribution à support compact est tempérée. On peut donc définir $\hat{u}$ comme une distribution tempérée. De plus, pour $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il vient en utilisant la question 4 sur un intervalle $]a,b[$ contenant le support de ψ,

$$\begin{aligned}
\langle v, \psi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} &= \int_a^b v(\xi)\psi(\xi)d\xi = \int_a^b \langle u, e^{-ix\xi}\rangle_{\mathcal{E}',C^\infty}\psi(\xi)d\xi \\
&= \int_a^b \langle u, e^{-ix\xi}\psi(\xi)\rangle_{\mathcal{E}',C^\infty} d\xi \\
&= \langle u, \int_a^b e^{-ix\xi}\psi(\xi)d\xi\rangle_{\mathcal{E}',C^\infty} \\
&= \langle u, \hat{\psi}\rangle_{\mathcal{E}',C^\infty} = \langle u, \hat{\psi}\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle \hat{u}, \psi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}},
\end{aligned}$$

car $\hat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. D'où $\hat{u} = v$ par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

7. Il est clair que le support de v_R est la sphère de rayon R dans $\mathbb{R}^3$. En utilisant la formule admise et le changement de variables, il vient

$$\begin{aligned}
\widehat{v_R}(\xi) &= \langle v_R, e^{-ix\cdot\xi}\rangle_{\mathcal{E}',C^\infty} \\
&= \int_{|x|=R} e^{-ix\cdot\xi} dx \\
&= 2\pi R^2 \int_0^\pi e^{-iR|\xi|\cos\theta}\sin\theta d\theta \\
&= 4\pi R \frac{\sin(R|\xi|)}{|\xi|},
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Problème (15 points)

1. Vérifier que $(\cdot,\cdot)_H$ est un produit scalaire est immédiat. La complétude de H se déduit de celle de $H_0^1(\Omega)$.

2. On utilise l'indication et l'inégalité de Cauchy–Schwarz pour obtenir

$$|a(u,v)| \leq 4(|\lambda| + 2|\mu|)\|u\|_H\|v\|_H,$$

ce qui prouve la continuité de a sur $H \times H$.

3. Par intégration par parties, il vient

$$\int_\Omega \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -\int_\Omega u_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_1} = \int_\Omega \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2},$$

car u_1 et u_2 sont nulles au bord.

4. On remarque simplement que

$$\int_\Omega \sum_{i,j\in\{1,2\}} |e_{ij}(u)|^2 = \int_\Omega \left\{ \left|\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right|^2 + \left|\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right|^2 + \frac{1}{2}\left[\left|\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right|^2 + \left|\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right|^2 + 2\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right] \right\}$$
$$= \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j\in\{1,2\}} \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2 \right\},$$

où on a utilisé la question précédente pour obtenir la première ligne.

5. De la question précédente, on déduit l'égalité pour tout $u \in C_0^\infty(\Omega)\times C_0^\infty(\Omega)$. Le résultat pour tout $u \in H$ provient de la densité de l'espace $C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega)$ dans H et du fait que a est continue sur H.

6. L'inégalité de Poincaré peut (par exemple) s'énoncer sous la forme : il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$C\int_\Omega f^2 \le \int_\Omega |\nabla f|^2. \tag{1}$$

7. De la question 5, on déduit que

$$a(u,u) \ge \mu \int_\Omega \sum_{i,j\in\{1,2\}} \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2$$
$$= \frac{\mu}{2}\int_\Omega \sum_{i,j\in\{1,2\}} \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2 + \frac{\mu}{2}\int_\Omega \sum_{i,j\in\{1,2\}} \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2$$
$$\ge \frac{\mu}{2}\int_\Omega \sum_{i,j\in\{1,2\}} \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2 + C\frac{\mu}{2}\int_\Omega \sum_{i\in\{1,2\}} |u_i|^2 \ge \frac{\mu}{2}\min(1,C)\,\|u\|_H^2,$$

où on a utilisé l'inégalité de Poincaré (1) pour obtenir la troisième ligne.

8. (question plus difficile). Remarquons que pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2 \le \alpha^2 + \beta^2 \tag{2}$$

et donc pour tout $\delta \in \,]0,1[$, on a (en décomposant $0 < \mu = \delta\mu + (1-\delta)\mu$ et en utilisant (2) avec $\alpha = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}$, $\beta = \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}$)

$$a(u,u) \ge \int_\Omega \left\{ \delta\mu \sum_{i,j\in\{1,2\}} \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2 + \left(\lambda + \mu\left(1 + \frac{(1-\delta)}{2}\right)\right)\left(\sum_{i\in\{1,2\}} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2 \right\}.$$

Vu que $3\mu + 2\lambda > 0$, on peut choisir $\delta > 0$ assez petit de sorte que

$$\lambda + \mu\left(1 + \frac{(1-\delta)}{2}\right) > 0.$$

Ainsi, on déduit comme à la question 7 que

$$a(u,u) \geq \frac{\delta\mu}{2} \min(1, C) \|u\|_H^2.$$

9. L'application ℓ est linéaire. Pour vérifier la continuité, on utilise l'inégalité de Cauchy–Schwarz

$$|\ell(v)| \leq \|f\|_{(L^2(\Omega))^2} \|v\|_{(L^2(\Omega))^2} \leq C\|v\|_H,$$

avec $C = \|f\|_{(L^2(\Omega))^2}$.

10. Lax–Milgram et questions précédentes.
11. Utiliser le fait que $u \in H$ pour remarquer que pour tout $i, j \in \{1,2\}$ on a

$$e_{ij}(u) \in L^2(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega),$$

d'où la représentation avec crochets de distributions annoncée.

12. En intégrant par parties au sens des distributions, on obtient pour tout $v \in C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega)$:

$$- < \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}, v_j >= \sum_{j \in \{1,2\}} < f_j, v_j >,$$

d'où le résultat.

13. On écrit

$$\hat{\sigma}_{kj} = i\lambda \left(\sum_{p \in \{1,2\}} \xi_p \hat{u}_p \right) \delta_{kj} + i\mu \left(\xi_k \hat{u}_j + \xi_j \hat{u}_k \right).$$

Donc,

$$\begin{aligned} - \sum_{k \in \{1,2\}} \widehat{\frac{\partial \sigma_{kj}}{\partial x_k}} &= \lambda \xi_j \left(\sum_{p \in \{1,2\}} \xi_p \hat{u}_p \right) + \mu \left(|\xi|^2 \hat{u}_j + \xi_j \left(\sum_{k \in \{1,2\}} \xi_k \hat{u}_k \right) \right) \\ &= \sum_{k \in \{1,2\}} M_{jk}(\xi) \hat{u}_k, \end{aligned}$$

avec

$$M_{jk}(\xi) = \mu |\xi|^2 \delta_{jk} + (\lambda + \mu) \xi_j \xi_k.$$

14. On obtient

$$\mu |\xi|^4 \left(\sum_{i \in \{1,2\}} |\hat{u}_i|^2 \right) + (\lambda + \mu) |\xi|^2 |\xi \cdot \hat{u}|^2 = |\xi|^2 \hat{f} \cdot \overline{\hat{u}}.$$

Ainsi, en intégrant sur $\mathbb{R}^2$, en conservant uniquement le premier terme du membre de gauche et en appliquant Cauchy–Schwarz au membre de droite, on déduit le résultat.

15. On utilise le fait que

$$\sum_{j,k\in\{1,2\}} |\xi_j \xi_k \hat{u}_i|^2 = |\xi|^4 |\hat{u}_i|^2$$

ainsi que l'égalité de Bessel–Parseval pour la transformée de Fourier.