Corrigé de l'examen d'analyse du 5 février 2010

Problème de l'obstacle

Question 1. Evident.

Question 2. Par définition, $\displaystyle\int |\nabla\varphi|^2 \leq \|\varphi\|_{H^1}^2$. Par ailleurs, l'inégalité de Poincaré indique que, pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, on a $\|\varphi\|_{L^2} \leq C_\Omega \|\nabla\varphi\|_{L^2}$. On a donc bien

$$\alpha\|\varphi\|_{H^1}^2 \leq J(\varphi) \leq \beta\|\varphi\|_{H^1}^2,$$

avec $\beta = 1/2$ et $\alpha = 1/(2(1+C_\Omega^2))$.

L'application $\varphi, \psi \mapsto \langle\varphi,\psi\rangle_J := \displaystyle\int_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla\psi$ est bilinéaire, symétrique, et positive. De plus, l'inégalité ci-dessus montre que, si $\langle\varphi,\varphi\rangle_J = 0$, alors $\varphi = 0$. Cette application est donc bien un produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$, qui induit une norme pour laquelle $H_0^1(\Omega)$ est encore un espace de Hilbert.

Question 3.

3a Il est clair que $g \in \mathcal{P}$. On vérifie facilement que $\mathcal{P}$ est convexe.

3b Par construction, φ_n converge vers φ^* dans $L^2(\Omega)$, donc

$$\left|\int_\Omega \varphi_n\phi - \int_\Omega \varphi^*\phi\right| \leq \int_\Omega |\varphi_n - \varphi^*|\ \ |\phi| \leq \|\varphi_n - \varphi^*\|_{L^2}\ \|\phi\|_{L^2} \to_{n\to\infty} 0.$$

Par conséquent,

$$\int_\Omega (\varphi^* - g)\phi = \lim_{n\to\infty}\int_\Omega (\varphi_n - g)\phi \geq 0,$$

qui est un nombre positif ou nul comme limite d'une suite de nombres positifs ou nuls. Soit maintenant φ_n une suite d'éléments de $\mathcal{P}$ qui converge vers $\varphi^* \in H_0^1(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. On vient donc de montrer que, pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant $\phi(x) \geq 0$ p.p. sur Ω, on a

$$\int_\Omega (\varphi^* - g)\phi \geq 0,$$

ce qui implique, en utilisant la propriété admise à la Question 1, que $\varphi^* \geq g$ presque partout. Donc $\varphi^* \in \mathcal{P}$, qui est donc un ensemble fermé dans $H_0^1(\Omega)$.

Question 4. On note $\|\cdot\|_J$ la norme associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_J$. On voit que $J(\varphi) = \dfrac{1}{2}\|\varphi\|_J^2$, donc le problème (1) s'écrit aussi $\inf\limits_{\varphi\in K} \|\varphi - u\|_J$, pour $u = 0$, $H = H_0^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_J$, et $K = \mathcal{P}$.

Le théorème rappelé dans l'énoncé donne l'existence et l'unicité d'une solution au problème (1), notée v^*.

Question 5. Par construction, on voit que $v^* + \alpha\phi$ est dans l'espace $\mathcal{P}$. Donc

$$J(v^* + \alpha\phi) \geq \inf\{J(\varphi);\ \varphi \in \mathcal{P}\} = J(v^*).$$

Or,

$$J(v^* + \alpha\phi) = J(v^*) + \frac{\alpha^2}{2}\int_\Omega |\nabla\phi|^2 + \alpha\int_\Omega \nabla v^*\cdot\nabla\phi.$$

Ainsi, pour tout $\alpha \geq 0$, on a

$$\frac{\alpha^2}{2} \int_\Omega |\nabla \phi|^2 + \alpha \int_\Omega \nabla v^* \cdot \nabla \phi \geq 0.$$

En divisant par α et en passant à la limite $\alpha \to 0$, on obtient l'inégalité démandée.

Question 6.

6a En distinguant les cas $u(x) \geq 0$ ou $u(x) \leq 0$, on montre que $u_+(x)\, u_-(x) = 0$ presque partout. Donc

$$\int_\Omega u^2(x)\, dx = \int_\Omega (u_+ - u_-)^2 = \int_\Omega (u_+)^2 + \int_\Omega (u_-)^2 \geq \int_\Omega (u_+)^2,$$

ce qui montre que $u_+ \in L^2(\Omega)$.

6b En écrivant $u = u_+ - u_-$, on a

$$\begin{aligned} \|u - w\|_{L^2}^2 &= \|u_+ - w_+\|_{L^2}^2 + \|u_- - w_-\|_{L^2}^2 - 2 \int_\Omega (u_+ - w_+)\ (u_- - w_-) \\ &= \|u_+ - w_+\|_{L^2}^2 + \|u_- - w_-\|_{L^2}^2 + 2 \int_\Omega u_+ w_- + 2 \int_\Omega w_+ u_- \\ &\geq \|u_+ - w_+\|_{L^2}, \end{aligned}$$

en utilisant que les 3 derniers termes de la seconde ligne sont positifs ou nuls.

Question 7. Comme $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on peut se ramener à la manipulation de distributions. Donc

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \phi = \langle \nabla v, \nabla \phi \rangle = -\langle \Delta v, \phi \rangle = -\int_\Omega \phi \Delta v,$$

où on a utilisé à la dernière étape que $\Delta v \in L^2(\Omega)$. En utilisant la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, on généralise cette égalité à tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

Question 8.

8a En utilisant le résultat de la Question 7, on obtient que, pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega p^* \phi = -\int_\Omega \Delta v^* \phi = \int_\Omega \nabla v^* \cdot \nabla \phi.$$

On choisit maintenant $\phi \in H_0^1(\Omega)$ telle que $\phi(x) \geq 0$ p.p. dans Ω. La Question 5 indique que $\displaystyle\int_\Omega \nabla v^* \cdot \nabla \phi \geq 0$, donc $\displaystyle\int_\Omega p^* \phi \geq 0$.

8b On utilise à nouveau la réciproque admise à la Question 1 pour déduire de la question précédente que $p^*(x) \geq 0$ presque partout. On distingue maintenant deux cas.

Si $v^*(x) > g(x)$, l'énoncé indique que $-\Delta v^*(x) = 0$, soit $p^*(x) = 0$. Par ailleurs, $\max(0, p^*(x) + \mu(g(x) - v^*(x)) = \max(0, \mu(g(x) - v^*(x)) = 0$, donc on a bien, en un tel x, l'égalité $p^* = [p^* + \mu(g - v^*)]_+$.

Si $v^*(x) = g(x)$, alors $\max(0, p^*(x) + \mu(g(x) - v^*(x)) = \max(0, p^*(x)) = p^*(x)$, et à nouveau, en un tel x, on a l'égalité $p^* = [p^* + \mu(g - v^*)]_+$.

Question 9. On calcule

$$\mathcal{L}(\varphi, q) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 - \int_\Omega \varphi q + \int_\Omega g q.$$

On est exactement dans le cadre de la section 9.3 du polycopié. Minimiser $\mathcal{L}$ par rapport à φ (à q fixé) est équivalent à trouver $v \in H_0^1(\Omega)$ tel que $-\Delta v - q = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. On sait par le cours que ce problème admet une unique solution.

Le problème (9) est plus facile à résoudre que le problème (1) car il s'agit d'un problème d'optimisation *sans* contrainte.

Question 10.

10a Comme $p_0 \in L^2(\Omega)$, la fonction v_0 est bien définie dans $H_0^1(\Omega)$. On montre maintenant par récurrence que les fonctions v_n et p_n sont bien définies, respectivement dans $H_0^1(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$. C'est vrai pour $n = 0$.

On a $p_n + \mu(g - v_n) \in L^2(\Omega)$, donc, en utilisant la Question 6a et la définition (11), on obtient que $p_{n+1} \in L^2(\Omega)$. Par conséquent, le problème (10), à l'étape $n+1$, est bien posé et définit bien une unique fonction $v_{n+1} \in H_0^1(\Omega)$. Ceci conclut la récurrence.

Les équations (10) et (11) sont respectivement motivées par la définition (7) et la relation (8).

10b Pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \nabla v^* \cdot \nabla \phi = \int_\Omega p^* \phi \quad \text{et} \quad \int_\Omega \nabla v_n \cdot \nabla \phi = \int_\Omega p_n \phi.$$

On fait la différence entre ces deux équations, et on choisit $\phi = v^* - v_n$, ce qui donne

$$\int_\Omega (\nabla v^* - \nabla v_n) \cdot (\nabla v^* - \nabla v_n) = \int_\Omega (p^* - p_n)\ (v^* - v_n).$$

10c En utilisant (11) et (8) puis la Question 6b, on obtient

$$\begin{aligned} \|p_{n+1} - p^*\|_{L^2} &= \|\,[p_n + \mu(g - v_n)]_+ - [p^* + \mu(g - v^*)]_+\,\|_{L^2} \\ &\le \|\,(p_n + \mu(g - v_n)) - (p^* + \mu(g - v^*))\,\|_{L^2} \\ &\le \|(p_n - p^*) - \mu(v_n - v^*)\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|p_{n+1} - p^*\|_{L^2}^2 &\le \|(p_n - p^*) - \mu(v_n - v^*)\|_{L^2}^2 \\ &\le \|p_n - p^*\|_{L^2}^2 + \mu^2 \|v_n - v^*\|_{L^2}^2 - 2\mu \int_\Omega (p_n - p^*)\ (v_n - v^*) \\ &\le \|p_n - p^*\|_{L^2}^2 + \mu^2 \|v_n - v^*\|_{L^2}^2 - 2\mu \|\nabla v_n - \nabla v^*\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

en utilisant la Question 10b. L'inégalité de Poincaré donne

$$\|v_n - v^*\|_{H^1}^2 \le (1 + C_\Omega^2) \|\nabla v_n - \nabla v^*\|_{L^2}^2,$$

donc

$$\|p_{n+1} - p^*\|_{L^2}^2 \le \|p_n - p^*\|_{L^2}^2 + \mu^2 \|v_n - v^*\|_{H^1}^2 - \frac{2\mu}{1 + C_\Omega^2} \|v_n - v^*\|_{H^1}^2,$$

ce qui est la majoration demandée avec $C = 2/(1 + C_\Omega^2)$.

10d On pose $\mu_c = C/2$, si bien que, dès que $0 < \mu \le \mu_c$, on a $\mu^2 - \mu C < 0$, et donc la suite $\|p_n - p^*\|_{L^2}^2$ est décroissante. Cette suite converge donc vers un réel ℓ. La majoration obtenue à la question précédente s'écrit aussi

$$(\mu C - \mu^2) \|v_n - v^*\|_{H^1}^2 \le \|p_n - p^*\|_{L^2}^2 - \|p_{n+1} - p^*\|_{L^2}^2.$$

Comme $\mu C - \mu^2 > 0$, on obtient $\lim_{n \to \infty} \|v_n - v^*\|_{H^1} = 0$.

Principe d'incertitude d'Heisenberg

Question 1. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} -x\ \varphi^*(x)\frac{d\varphi}{dx}(x)\ dx\right) &= -\frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}}\left\{x\ \varphi^*(x)\frac{d\varphi}{dx}(x)+x\ \varphi(x)\frac{d\varphi^*}{dx}(x)\right\}\ dx\right)\\
&= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} x\ \frac{d|\varphi|^2}{dx}(x)\ dx\\
&= \int_{\mathbb{R}}\frac{|\varphi|^2}{2}(x)\ dx
\end{aligned}$$

où on a utilisé une intégration par partie à la troisième ligne.

Question 2. On a

$$\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{d\varphi}{dx}(x)\right|^2\ dx=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|\widehat{\frac{d\varphi}{dx}}(\xi)\right|^2\ d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|i\xi\widehat{\varphi}(\xi)|^2\ d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\xi^2|\hat{\varphi}(\xi)|^2\ d\xi.$$

Question 3. Pour deux fonctions à valeurs complexes $f,g\in L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$, on rappelle que

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f^*g\right|\leq\left(\int_{\mathbb{R}}|f|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}}|g|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\frac{|\varphi|^2}{2}(x)\ dx &= \mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} -x\ \varphi^*(x)\frac{d\varphi}{dx}(x)\ dx\right)\\
&\leq \left|\left(\int_{\mathbb{R}} -x\ \varphi^*(x)\frac{d\varphi}{dx}(x)\ dx\right)\right|\\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}}|x\varphi(x)|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{d\varphi}{dx}(x)\right|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}}|x\varphi(x)|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\xi^2|\hat{\varphi}(\xi)|^2\ d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Cela donne

$$\left(\int_{\mathbb{R}}\xi^2|\hat{\varphi}(\xi)|^2\ d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}}x^2|\varphi(x)|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}}\geq\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ \left(\int_{\mathbb{R}}|\varphi|^2\right),$$

qui est exactement l'inégalité recherchée.

Question 4. Soit $\varphi\in F$ et une suite $\varphi_n\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ de fonctions telles que

$$\|\varphi-\varphi_n\|_F\to 0\quad\text{quand}\quad n\to+\infty.$$

Pour tout $\psi\in F$, on a

$$\begin{aligned}
\|\psi\|_F^2 &= \int_{\mathbb{R}}\left|\frac{d\psi}{dx}(x)\right|^2\ dx+\int_{\mathbb{R}}|\psi(x)|^2\ dx+\int_{\mathbb{R}}x^2|\psi(x)|^2\ dx\\
&= \sum_{i=1,2,3}a_i(\psi,\psi)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} a_1(\psi,\zeta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \xi^2 \hat{\psi}^*(\xi)\hat{\zeta}(\xi)\ d\xi \\ a_2(\psi,\zeta) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \psi^*(x)\zeta(x)\ dx \\ a_3(\psi,\zeta) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^2\psi^*(x)\zeta(x)\ dx \end{cases}$$

Les formes hermitiennes a_i vérifient l'inégalité de Cauchy-Schwarz et donc leurs semi-normes associées $N_i(\psi) = \sqrt{a_i(\psi,\psi)}$ vérifient l'inégalité triangulaire. Par conséquent,

$$|N_i(\varphi) - N_i(\varphi_n)| \leq N_i(\varphi - \varphi_n) \leq \|\varphi - \varphi_n\|_F .$$

Or l'inégalité vérifiée par φ_n s'écrit

$$N_1(\varphi_n)N_3(\varphi_n) \geq \frac{1}{2}(N_2(\varphi_n))^2.$$

On obtient donc simplement le résultat en passant à la limite.

Question 5. En utilisant l'indication, on montre que

$$\int_{\mathbb{R}} \psi^2(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-ax^2}\ dx = 1.$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}} x^2\psi^2 = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-ax^2} = -\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{da}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\right) = -\left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{da}\left(\left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2a}.$$

D'après le cours, on a $\hat{\psi}(\xi) = \left(\frac{a}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\xi^2/(4\alpha)}$ avec $\alpha = a/2$, c'est-à-dire

$$\hat{\psi}(\xi) = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\xi^2/(2a)}.$$

Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} \xi^2|\hat{\psi}|^2 = 2\left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} \xi^2 e^{-\xi^2/a} = 2\left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2\beta^{\frac{3}{2}}} = \pi a,$$

avec $\beta = 1/a$. On a donc égalité dans l'inégalité démontrée à la Question 4.

Question 6. On a

$$\int_{\mathbb{R}} x|\psi(x)|^2\ dx = \int_{\mathbb{R}} (x-c)|\varphi(x)|^2\ dx = c - c\left(\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2\ dx\right) = 0.$$

De plus, $\hat{\psi}(\xi) = e^{i\xi c}\hat{\varphi}(\xi)$, donc $|\hat{\psi}(\xi)| = |\hat{\varphi}(\xi)|$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x^2|\psi(x)|^2\ dx &= \int_{\mathbb{R}} (x-c)^2|\varphi(x)|^2\ dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2|\varphi(x)|^2\ dx - 2c\left(\int_{\mathbb{R}} x|\varphi(x)|^2\ dx\right) + c^2\left(\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2\ dx\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2|\varphi(x)|^2\ dx - 2c^2 + c^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2|\varphi(x)|^2\ dx - \left(\int_{\mathbb{R}} x|\varphi(x)|^2\ dx\right)^2. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité (11) de l'énoncé à la fonction ψ, on obtient alors :

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi^2|\hat{\varphi}(\xi)|^2\ d\xi\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{\int_{\mathbb{R}} x^2|\varphi(x)|^2\ dx - \left(\int_{\mathbb{R}} x|\varphi(x)|^2\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}.$$

Question 7. De la même façon qu'à la Question 6, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi|\hat{\theta}(\xi)|^2\ d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(\xi-p)|\hat{\varphi}(\xi)|^2\ d\xi = p - p\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|\hat{\varphi}(\xi)|^2\ d\xi\right) = 0.$$

De plus, $\theta(x) = e^{-ixp}\varphi(x)$, donc $|\theta(x)| = |\varphi(x)|$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi^2|\hat{\theta}(\xi)|^2\ d\xi &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}(\xi-p)^2|\hat{\varphi}(\xi)|^2\ d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\xi^2|\hat{\varphi}(\xi)|^2\ d\xi - 2p\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\xi|\hat{\varphi}(\xi)|^2\ d\xi\right) + p^2\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|\hat{\varphi}(\xi)|^2\ d\xi\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\xi^2|\hat{\varphi}(\xi)|^2\ d\xi - 2p^2 + p^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\xi^2|\hat{\varphi}(\xi)|^2\ d\xi - \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\xi|\hat{\varphi}(\xi)|^2\ d\xi\right)^2.
\end{aligned}$$

Question 8. En appliquant le résultat de la Question 6, on a

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \xi^2|\hat{\varphi}(\xi)|^2\ d\xi\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{\int_{\mathbb{R}} x^2|\varphi(x)|^2\ dx - \left(\int_{\mathbb{R}} x|\varphi(x)|^2\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}.$$

En appliquant alors cette nouvelle inégalité à la fonction θ de la Question 7, on tire immédiatement le résultat demandé.

Question 9. On a directement

$$\left(\int_{\mathbb{R}}\widetilde{\rho}^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq B_p^2\left(\int_{\mathbb{R}}\rho^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

On remarque alors que $\alpha/(\alpha-1) = \beta/(1-\beta)$ et on élève les deux membres de l'inégalité à cette puissance.

Question 10. On a

$$\frac{1}{\alpha-1}\ln\left(\int_{\mathbb{R}}\widetilde{\rho}^{\alpha}\right) + \frac{1}{\beta-1}\ln\left(\int_{\mathbb{R}}\rho^{\beta}\right) \leq \frac{2\alpha}{\alpha-1}\ln B_p,$$

et donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha-1}\left[\ln\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\widetilde{\rho}^{\alpha}\right) - \ln\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\widetilde{\rho}\right)\right] + \frac{1}{\beta-1}\left[\ln\left(\int_{\mathbb{R}}\rho^{\beta}\right) - \ln\left(\int_{\mathbb{R}}\rho\right)\right] \\
\leq \frac{2\alpha}{\alpha-1}\ln B_p - \frac{1}{\alpha-1}\ln(2\pi).
\end{aligned}$$

On remarque que

$$\int_{\mathbb{R}}\widetilde{\rho}^{\alpha}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}}\widetilde{\rho}(x)\,dx + (\alpha-1)\int_{\mathbb{R}}\widetilde{\rho}(x)\ln\widetilde{\rho}(x)\,dx + o(\alpha-1).$$

D'où en passant à la limite $\alpha \to 1$, $\beta \to 1$, on tire l'inégalité demandée.