Examen d'analyse
Correction

Problème 1. Equation de Darcy

Question 1. Analyse fonctionnelle

1.a Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $H_{\rm div}(\Omega)$. Cette suite est de Cauchy dans $(L^2(\Omega))^3$, donc converge vers $v \in (L^2(\Omega))^3$ dans $(L^2(\Omega))^3$. D'autre part, $(\operatorname{div} v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $L^2(\Omega)$ et converge donc vers $w \in L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. La convergence dans $L^2(\Omega)$ entraînant la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, il vient

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{div} v, \phi\rangle &= \sum_{i=1}^{3}\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \phi\rangle = -\sum_{i=1}^{3}\langle v_i, \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\rangle = -\sum_{i=1}^{3}\lim_{n\to+\infty}\langle (v_i)_n, \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\rangle \\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{3}\langle \frac{\partial (v_i)_n}{\partial x_i}, \phi\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle \operatorname{div} v_n, \phi\rangle = \langle w, \phi\rangle.\end{aligned}$$

Il en résulte que $\operatorname{div} v = w \in L^2(\Omega)$. La fonction v est donc dans $H_{\rm div}(\Omega)$ et en faisant tendre q vers l'infini dans l'assertion

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall q \geq p \geq N, \quad \|v_p - v_q\|_{H_{\rm div}(\Omega)} \leq \epsilon,$$

on vérifie que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers v dans $H_{\rm div}(\Omega)$. $H_{\rm div}(\Omega)$ est donc un espace de Hilbert.

1.b Soit $v \in H_{\rm div}(\Omega)$ et $q \in H^1(\Omega)$. Les fonctions $(\operatorname{div} v)q$ et $v \cdot \nabla q$ sont dans $L^1(\Omega)$, et on déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|l_v(q)| \leq \|\operatorname{div} v\|_{L^2}\|q\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}\|\nabla q\|_{L^2} \leq \|v\|_{H_{\rm div}}\|q\|_{H^1}.$$

Il en résulte que l_v définit une forme linéaire continue sur $H^1(\Omega)$.

1.c Soit $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$ et $q \in C^\infty(\overline{\Omega})$. En appliquant la formule d'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}(v\cdot n)\,q &= \int_{\partial\Omega}\left(\sum_{i=1}^{3} v_i n_i\right) q = \sum_{i=1}^{3}\int_{\partial\Omega} v_i\; q\; n_i \\ &= \sum_{i=1}^{3}\left(\int_\Omega \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\,q + \int_\Omega v_i\,\frac{\partial q}{\partial x_i}\right) = \int_\Omega (\operatorname{div} v)\;q + \int_\Omega v\cdot\nabla q = l_v(q).\end{aligned}$$

Il est clair que si $v \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$, alors $l_v(q) = 0$ pour tout $q \in C^\infty(\overline{\Omega})$, et donc $l_v = 0$ par densité de $C^\infty(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$. Réciproquement, si $l_v = 0$, on a

$$\forall q \in C^\infty(\overline{\Omega}), \qquad \int_{\partial\Omega}(v\cdot n)\,q = 0,$$

et donc $v \cdot n = 0$ en tout point de $\partial\Omega$.

1.d On a pour tout $v \in (C^\infty(\overline{\Omega}))^3$,

$$(v \cdot n = 0 \text{ sur } \partial\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad (l_v = 0)\,.$$

Comme $(C^\infty(\overline{\Omega}))^3$ est dense dans $H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ et qu'il résulte de l'inégalité établie à la question 1.b que $v \mapsto l_v$ est continue de $H_{\mathrm{div}}(\Omega)$ à valeurs dans le dual de $H^1(\Omega)$, la condition $l_u = 0$ s'interprète comme une formulation variationnelle de la condition au bord $u \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$. Cette condition au bord est une condition de non-pénétration du fluide dans la paroi de Ω : le champ de vitesse est tangentiel au bord.

Question 2. Formulation vitesse du problème de Darcy

2.a Pour tout $q \in H^1(\Omega)$, la forme linéaire $b_q\ ;\ v \mapsto \int_\Omega v \cdot \nabla q$ est continue sur $(L^2(\Omega))^3$ et donc $\mathrm{Ker}(b_q)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $(L^2(\Omega))^3$. En conséquence,

$$X = \bigcap_{q \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)} \mathrm{Ker}(b_q)$$

est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\mathbb{R}^3)^3$. Muni du produit scalaire de $(L^2(\Omega))^3$, X est donc un espace de Hilbert.

D'autre part, la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ coïncide avec le produit scalaire de $(L^2(\Omega))^3$ et est donc évidemment continue et coercive sur X. Enfin, c est continue sur $L^2(\Omega)^3$, donc sur X, puisque pour tout $v \in L^2(\Omega)^3$,

$$|c(v)| \leq \|f\|_{L^2}\ \|v\|_{L^2}.$$

En vertu du théorème de Lax-Milgram, le problème (3) est bien posé.

2.b Soit $v \in X$. On a $v \in (L^2(\Omega))^3$ et pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$,

$$\langle \mathrm{div}\, v, \phi\rangle = \sum_{i=1}^3 \langle \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \phi\rangle = -\sum_{i=1}^3 \langle v_i, \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\rangle = -\sum_{i=1}^3 \int_\Omega v_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega v \cdot \nabla\phi = 0.$$

Donc $\mathrm{div}\, v = 0$ (et *a fortiori* $\mathrm{div}\, v \in L^2(\Omega)$ et donc $v \in X$). Enfin, pour tout $q \in H^1(\Omega)$,

$$l_v(q) = \int_\Omega (\mathrm{div}\, v) q + \int_\Omega v \cdot \nabla q = 0.$$

Donc $l_v = 0$.

2.c On a

$$M^\perp = \left\{ v \in (L^2(\Omega))^3 \mid \forall w \in M,\ \int_\Omega v \cdot w = 0 \right\} = \left\{ v \in (L^2(\Omega))^3 \mid \forall q \in H^1(\Omega),\ \int_\Omega v \cdot \nabla q = 0 \right\} = X.$$

Comme M est fermé, il vient $X^\perp = (M^\perp)^\perp = M$.

2.d Comme u est solution de (3), on a

$$\forall v \in X, \quad \int_\Omega (f-u)\, v = c(v) - a(u,v) = 0,$$

ce qui s'écrit aussi $(f-u) \in X^\perp$. Comme $X^\perp = M$, on a donc $(f-u) \in M$. Il existe donc un champ $q \in H^1(\Omega)$ tel que $\nabla q = f - u$. Posons $p = q - |\Omega|^{-1} \int_\Omega q$. On a $p \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$ et $\nabla p = \nabla q = f - u$, ce qui montre que p est solution de (4). Soit p_1 et p_2 deux solutions de (4) et $r = p_1 - p_2$. On a $r \in H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$ et $\nabla r = 0$. L'ouvert Ω étant connexe, r est une fonction constante. Comme r est de moyenne nulle, $r = 0$. Le problème (4) admet donc une unique solution.

2.e Soit (u,p) une solution de (1). On a

$$\forall q \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega u\nabla q = \int_\Omega (\operatorname{div} u) q + \int_\Omega v \nabla\nabla q = l_u(q) = 0.$$

Donc $u \in X$. De plus, pour tout $v \in X$,

$$a(u,v) = \int_\Omega u \cdot \nabla v = -\int_\Omega \nabla p \cdot v + \int_\Omega f \cdot v = \int_\Omega f \cdot v = c(v).$$

Donc u est *la* solution de (3) et clairement, p est *la* solution de (4). Réciproquement, si u désigne la solution de (3) et p la solution de (4), alors $(u,p) \in L^2(\Omega)^3 \times (H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega))$, et (4) conduit immédiatement à $u + \nabla p = f$. Comme $u \in X$, on déduit de la question 2.b que $u \in H_{\mathrm{div}}(\Omega)$, $\operatorname{div} u = 0$ et $l_u = 0$ (ce qui, on l'a vu, est une formulation variationnelle de la condition au bord $u \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$). Donc (u,p) est solution de (1). Il en résulte que (1) admet une solution et une seule.

2.f Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de M qui tend vers un élément w de $(L^2(\Omega))^3$. Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $H^1(\Omega)$ telle que $w_n = \nabla q_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quitte à remplacer q par $q - |\Omega|^{-1}\int_\Omega q$, on peut supposer que $q \in L^2_0(\Omega)$. En utilisant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, on voit que $\|q_n - q_m\|_{H^1} \le (1 + C_\Omega^2)^{1/2} \|\nabla q_n - \nabla q_m\|_{L^2} = C\|w_n - w_m\|_{L^2}$, ce qui prouve que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc converge, dans $H^1(\Omega)$ vers un certain $q \in H^1(\Omega)$. Donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\nabla q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ∇q dans $(L^2(\Omega))^3$, et donc $w = \nabla q$. On en déduit que M est fermé dans $(L^2(\Omega))^3$.

Problème 2. Homogénéisation.

Question 1. Estimations a priori

1.a D'après le cours (Proposition 9.4), le problème (5) est équivalent à la formulation variationnelle (6), avec, pour tout u et v dans $H^1_0(\Omega)$,

$$a_\epsilon(u,v) = \int_\Omega (\nabla v(x))^T A\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \nabla u(x)\, dx \quad \text{et} \quad b(v) = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx.$$

1.b La formulation variationnelle (6) vérifie les hypothèses du théorème de Lax-Milgram. Le problème (6) a donc une unique solution, notée u_ϵ. En prenant $v = u_\epsilon$ comme fonction test dans (6), et en utilisant l'hypothèse de coercivité de A, on obtient

$$m\|\nabla u_\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \le a_\epsilon(u_\epsilon, u_\epsilon) = b(u_\epsilon) = \int_\Omega f(x)\, u_\epsilon(x)\, dx \le \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1)$$

On utilise maintenant l'inégalité de Poincaré pour la fonction u_ϵ :

$$\|u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \le C_\Omega \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)}$$

pour une constante C_Ω indépendante de ϵ. Donc

$$\|u_\epsilon\|^2_{H^1(\Omega)} \le (1 + C_\Omega^2)\|\nabla u_\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

On déduit donc de (1) que

$$\frac{m}{1 + C_\Omega^2}\|u_\epsilon\|^2_{H^1(\Omega)} \le m\|\nabla u_\epsilon\|^2_{L^2(\Omega)} \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_\epsilon\|_{H^1(\Omega)},$$

et donc $\|u_\epsilon\|_{H^1(\Omega)} \le C$ avec la constante $C = \dfrac{1 + C_\Omega^2}{m}\|f\|_{L^2(\Omega)}$, indépendante de ϵ.

Question 2. Fonctions test oscillantes

2.a On obtient le résultat en observant que

$$\nabla v(x) = \left[\nabla\varphi(x) + \sum_{i=1}^{d} \partial_i\varphi(x)\ \nabla\psi_i\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right] + \epsilon\sum_{i=1}^{d} \partial_i\nabla\varphi(x)\ \psi_i\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

2.b On voit que

$$|s_\epsilon(\varphi)| \leq \epsilon\sum_{i=1}^{d} \|\psi_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_\Omega |f(x)\,\partial_i\varphi(x)|\ dx \leq \epsilon\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \sum_{i=1}^{d} \|\psi_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)},$$

et ainsi $\lim_{\epsilon\to 0} s_\epsilon(\varphi) = 0$. De même,

$$\begin{aligned}
|r_\epsilon(u_\epsilon, \varphi)| &\leq \epsilon\sum_{i=1}^{d} \|\psi_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_\Omega \left|(\partial_i\nabla\varphi(x))^T A\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\nabla u_\epsilon(x)\right| dx \\
&\leq \epsilon M\sum_{i=1}^{d} \|\psi_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \int_\Omega \left|(\partial_i\nabla\varphi(x))^T\ \nabla u_\epsilon(x)\right| dx \\
&\leq \epsilon M\|u_\epsilon\|_{H^1(\Omega)}\|\varphi\|_{H^2(\Omega)} \sum_{i=1}^{d} \|\psi_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq \epsilon MC\|\varphi\|_{H^2(\Omega)} \sum_{i=1}^{d} \|\psi_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)},
\end{aligned}$$

où on a utilisé à la dernière ligne la borne obtenue à la Question 1.b. On obtient donc $\lim_{\epsilon\to 0} r_\epsilon(u_\epsilon, \varphi) = 0$.

2.c En décomposant $\nabla\varphi$ sur la base canonique, puis en utilisant la symétrie de A, on obtient

$$\begin{aligned}
c_\epsilon(u,\varphi) &= \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \partial_i\varphi(x) e_i^T A\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\nabla u(x)\,dx + \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \partial_i\varphi(x)\left(\nabla\psi_i\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right)^T A\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\nabla u(x)\,dx \\
&= \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \partial_i\varphi(x)\left(e_i + \nabla\psi_i\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right)^T A\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\nabla u(x)\,dx \\
&= \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega (\nabla u(x))^T A\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\left(e_i + \nabla\psi_i\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right)\partial_i\varphi(x)\,dx.
\end{aligned}$$

On intègre maintenant par parties. Le terme de bord est nul car $u \in H_0^1(\Omega)$. Donc

$$c_\epsilon(u,\varphi) = -\sum_{i=1}^{d} \int_\Omega u(x)\ \mathrm{div}\left[A\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\left(e_i + \nabla\psi_i\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right)\partial_i\varphi(x)\right] dx.$$

Par définition, on a $\mathrm{div}\left[A\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\left(e_i + \nabla\psi_i\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right)\right] = 0$ dans $\mathbb{R}^d$. Donc

$$c_\epsilon(u,\varphi) = -\sum_{i=1}^{d} \int_\Omega u(x)\ \left[A\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\left(e_i + \nabla\psi_i\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right)\right]^T \nabla\left(\partial_i\varphi(x)\right)\,dx.$$

Question 3. Passage à la limite

3.a On pose $B(x) = A(x)\,(e_i + \nabla\psi_i(x))$, qui est bien $\mathbb{Z}^d$-périodique et dans $(L^2(Q))^d$, et $\chi(x) = u(x)\,\partial_i\nabla\varphi(x)$, qui est bien dans $(L^2(Q))^d$, puisque $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En appliquant le Lemme 1 au résultat de la Question 2.c, on obtient le résultat.

3.b En utilisant le résultat de la Question 2.c, on a

$$\begin{aligned}
|c_\epsilon(u,\varphi) - c_\epsilon(v,\varphi)| &\leq \sum_{i=1}^d \left| \int_\Omega (u(x)-v(x)) \left[A\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \left(e_i + \nabla \psi_i \left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right)\right] \cdot \partial_i \nabla \varphi(x)\, dx \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^d M \left(1 + \|\nabla \psi_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\right) \ \|u-v\|_{L^2(\Omega)} \|\partial_i \nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C \ \|u-v\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{H^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

avec $C = \sum_{i=1}^d M \left(1 + \|\nabla \psi_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\right)$, qui est bien indépendante de ϵ, u, v et φ. On calcule ensuite que

$$\begin{aligned}
|c_\epsilon(u_\epsilon,\varphi) - c(u_0,\varphi)| &\leq |c_\epsilon(u_\epsilon,\varphi) - c_\epsilon(u_0,\varphi)| + |c_\epsilon(u_0,\varphi) - c(u_0,\varphi)| \\
&\leq C \ \|u_\epsilon - u_0\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{H^2(\Omega)} + |c_\epsilon(u_0,\varphi) - c(u_0,\varphi)| \, .
\end{aligned}$$

Quand ϵ tend vers 0, on sait que la sous-suite extraite $u_{\epsilon'}$ converge en norme $L^2(\Omega)$ vers u_0 (c'est la définition de u_0), et que $c_\epsilon(u_0,\varphi)$ converge vers $c(u_0,\varphi)$, d'après la Question 3.a. Donc $c_{\epsilon'}(u_{\epsilon'},\varphi)$ converge vers $c(u_0,\varphi)$.

3.c A la Question 2.a, on a montré que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$c_\epsilon(u_\epsilon,\varphi) + r_\epsilon(u_\epsilon,\varphi) = b(\varphi) + s_\epsilon(\varphi),$$

et de même pour la suite extraite :

$$c_{\epsilon'}(u_{\epsilon'},\varphi) + r_{\epsilon'}(u_{\epsilon'},\varphi) = b(\varphi) + s_{\epsilon'}(\varphi).$$

La limite de chaque terme, quand $\epsilon \to 0$, a été identifiée aux Questions 3.b et 2.b. On obtient ainsi que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$c(u_0,\varphi) = b(\varphi).$$

3.d Par définition de la forme bilinéaire c, et en utilisant que $u_0 \in H^1_0(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}
c(u_0,\varphi) &= -\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_\Omega u_0(x) \left[A^\star e_i\right]_j \partial_{ij}\varphi(x)\, dx \\
&= -\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_\Omega u_0(x) \left[A^\star\right]_{ji} \partial_{ij}\varphi(x)\, dx \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \int_\Omega \partial_j u_0(x) \left[A^\star\right]_{ji} \partial_{i}\varphi(x)\, dx \\
&= \int_\Omega (\nabla u_0(x))^T A^\star \nabla \varphi(x)\, dx
\end{aligned}$$

3.e Comme $A^\star$ est symétrique, on déduit des Questions 3.c et 3.d que u_0 est tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega (\nabla \varphi)^T A^\star \nabla u_0 = \int_\Omega f\, \varphi.$$

Ainsi, u_0 vérifie l'équation $-\text{div}\, A^\star \nabla u_0 = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Cette équation a une unique solution (Section 9.3 du cours), donc toutes les sous-suites $u_{\epsilon'}$ convergent vers la même limite u_0 : ainsi, toute la suite u_ϵ converge, quand $\epsilon \to 0$, vers u_0.

Question 4. Cas de la dimension un

En intégrant l'équation vérifiée par ψ, on obtient

$$\psi'(y) + 1 = \frac{C}{A(y)}$$

où C est une constante d'intégration. Comme ψ est 1-périodique, on a $\displaystyle\int_0^1 \psi'(y)\, dy = 0$, donc C est telle que

$$\frac{1}{C} = \int_0^1 \frac{1}{A(y)}\, dy.$$

En insérant ceci dans la définition de $A^\star$, on obtient

$$A^\star = C = \left[\int_0^1 \frac{1}{A(y)}\, dy\right]^{-1}.$$

Ainsi, $A^\star$ est la *moyenne harmonique* de A sur une cellule de périodicité.