Corrigé de l'examen d'Analyse

Mardi 24 janvier 2012

Documents autorisés - Durée **3 heures**

Problème 1.

Problème 2.

Préliminaire

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $V(\Omega)$. Cette suite est de Cauchy dans $L^4(\Omega)$ donc converge vers $u \in L^4(\Omega)$ dans $L^4(\Omega)$. D'autre part $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(L^4(\Omega))^3$ et converge donc vers $v \in (L^4(\Omega))^3$ dans $(L^4(\Omega))^3$. La convergence dans $L^4(\Omega)$ impliquant la convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, il vient :

$$\langle \nabla u_n, \phi \rangle = \sum_{i=1}^{3} \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial x_i}, \phi \right\rangle = -\sum_{i=1}^{3} \left\langle u_n, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\sum_{i=1}^{3} \left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right\rangle = \langle \nabla u, \phi \rangle$$

   Il en résulte que $\nabla u = v$ par unicité de la limite. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u \in V(\Omega)$ dans $V(\Omega)$. $V(\Omega)$ est donc un espace de Banach.

   D'autre part, $V_0(\Omega)$ est la fermeture de l'espace vectoriel $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $V(\Omega)$. Par conséquent, $V_0(\Omega)$ est un sous espace vectoriel fermé de $V(\Omega)$ et donc $V_0(\Omega)$ est un espace de Banach.

2. L'ouvert Ω étant borné, il existe $L > 0$ tel que $\Omega \subset [-L, L]^3$. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et ψ son prolongement par 0 à tout $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} |\psi(x)|^4 &= \left(\int_{-L}^{x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(t, x_2, x_3) dt \right)^4 \\ &\leq \int_{-L}^{x_1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(t, x_2, x_3) \right|^4 dt \left(\int_{-L}^{x_1} 1^{4/3} dt \right)^3 \\ &\leq 8L^3 \int_{-L}^{L} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_1}(t, x_2, x_3) \right|^4 dt \end{aligned}$$

   D'où

$$\|\phi\|_{L^4(\Omega)} \leq 2L \|\nabla \phi\|_{(L^4(\Omega))^3}.$$

   Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $V_0(\Omega)$, l'inégalité précédente reste valable pour tous les éléments de $V_0(\Omega)$.

Partie 1 : Un problème non-linéaire.

1. Soit u solution du problème (1). Soit $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \left\langle -\text{div}\left[|\nabla u|^2 \nabla u\right], \phi \right\rangle &= \langle f, \phi \rangle \\ \int_\Omega |\nabla u|^2 \nabla u \cdot \nabla \phi &= \int_\Omega f\phi. \end{aligned} \tag{1}$$

   On pose

$$a(u,v) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \nabla u \cdot \nabla v \quad \text{et} \quad b(v) = \int_\Omega fv.$$

   Les applications linéaires $a(u,\cdot)$ et $b(\cdot)$ sont continues, de plus $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $V_0(\Omega)$, donc l'égalité (1) reste valable pour tous les éléments de $V_0(\Omega)$.
   L'autre sens est évident, car $\mathcal{D}(\Omega) \subset V_0(\Omega)$.
   L'application $a(\cdot, v)$ est non liénaire.

Partie 2 : Une formulation équivalente.

1. Soit $v \in V_0(\Omega)$,

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{4}\|\nabla v\|^4_{(L^4(\Omega))^3} - \int_\Omega fv \\ &\geq \frac{1}{4}\|\nabla v\|^4_{(L^4(\Omega))^3} - \left(\int_\Omega f^{4/3}\right)^{3/4} \|v\|_{L^4(\Omega)} \\ &\geq \frac{1}{4}\|\nabla v\|^4_{(L^4(\Omega))^3} - \left(\int_\Omega f^{4/3}\right)^{3/4} \|v\|_{L^4(\Omega)} \\ &\geq \frac{1}{4}\frac{1}{1+C_\Omega^4}\|v\|_V^4 - |\Omega|^{1/4}\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_V \\ &\geq \|v\|_V\left(\frac{1}{4}\frac{1}{1+C_\Omega^4}\|v\|_V^3 - |\Omega|^{1/4}\|f\|_{L^2(\Omega)}\right) \end{aligned}$$

   D'où

$$\lim_{\|v\|_V \to \infty} J(v) = \infty$$

2. Soit $(u,v) \in V_0(\Omega) \times V_0(\Omega)$ et $\theta \in (0,1)$. $\theta u + (1-\theta)v \in V_0(\Omega)$.

$$J(\theta u + (1-\theta)v) = \|\theta \nabla u + (1-\theta)\nabla v\|^4_{L^4(\Omega)} - \theta \int_\Omega fu + (1-\theta)\int_\Omega fv$$

Or l'application $\|\cdot\|_{L^4(\Omega)}$ et l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe x^4 sont convexes et continues. On en déduit que

$$\|\theta\nabla u+(1-\theta)\nabla v\|^4_{L^4(\Omega)} \leq (\theta\|\nabla u\|_{L^4(\Omega)}+(1-\theta)\|\nabla v\|_{L^4(\Omega)})^4 \leq \theta\|\nabla u\|^4_{L^4(\Omega)}+(1-\theta)\|\nabla v\|^4_{L^4(\Omega)}$$

Donc J est convexe et continue.

3. On applique le théorème donné dans l'énnoncé.

Partie 3 : Retour au problème (1)

1. Soit $(u,v) \in V_0(\Omega)\times V_0(\Omega)$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$J(u+tv)-J(u) = \frac{1}{4}\int_\Omega |\nabla u|^4+4t|\nabla u|^2\nabla u\cdot\nabla v+6t^2|\nabla u|^2|\nabla v|^2+4t^3|\nabla v|^2\nabla u\cdot\nabla v+t^4|\nabla v|^4-|\nabla u|^4$$

D'où

$$L_u(v) = \lim_{t\to 0}\frac{J(u+tv)-J(u)}{t} = a(u,v)-b(v).$$

L'application $L_u(v)$ est linéaire et continue.

2. Soient x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

(a)

$$\begin{aligned}
\left\langle |x|^2x-|y|^2y, x-y\right\rangle &= \left(|x|^2+|y|^2\right)|x-y|^2+\left(|x|^2\langle y,x-y\rangle-|y|^2\langle x,x-y\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(|x|^2+|y|^2\right)|x-y|^2+\frac{1}{2}\left(|x|^4+|y|^4+2|x|^2|y|^2\right.\\
&\qquad \left.-2(|x|^2+|y|^2)\langle x,y\rangle-4|x|^2|y|^2+2(|x|^2+|y|^2)\langle x,y\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[\left(|x|^2+|y|^2\right)|x-y|^2+\left(|x|^2-|y|^2\right)^2\right]
\end{aligned}$$

(b) Il suffit de remarquer que

$$|x|^2+|y|^2 = \frac{1}{2}|x-y|^2+\frac{1}{2}|x+y|^2 \geq \frac{1}{2}|x-y|^2$$

3. Existence c'est une conséquence directe des questions précédentes. Soit $(u_1,u_2) \in V_0(\Omega)\times V_0(\Omega)$ deux solutions du problème (1), on a

$$\begin{aligned}
a(u_1-u_2,u_1-u_2) &= 0\\
\int_\Omega \left(|\nabla u_1|^2\nabla u_1-|\nabla u_2|^2\nabla u_2\right)\cdot(\nabla u_1-\nabla u_2) &= 0\\
\int_\Omega |\nabla u_1-\nabla u_2|^4 &\leq 0
\end{aligned}$$

Donc il existe une constante $C\in\mathbb{R}$ telle que $u_1-u_2=C$. Or $u_1-u_2=0$ sur $\partial\Omega$, donc $C=0$.