Corrigé du contrôle d'Analyse

29 janvier 2013

1 Problème 1 (Décomposition de domaine)

1.1 Partie 1 (Conditions non homogènes)

On se donne un ouvert borné régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $f \in L^2(\Omega)$, $u_0 \in H^2(\Omega)$, et on considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Chercher } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\Delta u = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = u_0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Question 1. On introduit la fonction $w = u - u_0$. On vérifie que u est solution de (1) si et seulement si w est solution du problème

$$\begin{cases} \text{Chercher } w \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ -\Delta w = g \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ w = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

avec $g = f + \Delta u_0$.

Question 2. On sait par hypothèse que $f \in L^2(\Omega)$, et que $u_0 \in H^2(\Omega)$, ce qui implique que $\Delta u_0 \in L^2(\Omega)$. On a donc que $g \in L^2(\Omega)$.

En appliquant le cours (cf. la Section 9.3 du polycopié), on voit le problème (2) admet une unique solution. En utilisant la Question 1, on en déduit l'existence et l'unicité d'une solution à (1).

1.2 Partie 2 (Préliminaires)

Soit u la solution de

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad u = u_0 \text{ sur } \gamma. \end{cases} \tag{3}$$

Question 3a. Ce résultat découle directement du Théorème 4.46 du polycopié.

Question 3b. Soit $\psi \in \mathcal{D}(0,2)$. On voit que $\phi_n^2\,\psi$ est dans $L^1(\Omega)$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini (théorème 4.50 du polycopié) :

$$\int_0^2 F_n(x)\,\psi(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \phi_n^2(x,y)\,\psi(x)\,dxdy.$$

On sait que ϕ_n converge dans $L^2(\Omega)$ vers u, tandis que $\psi \in L^\infty(\Omega)$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 F_n(x)\,\psi(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_\Omega u^2(x,y)\,\psi(x)\,dxdy = \int_0^2 F(x)\,\psi(x)\,dx,$$

la dernière égalité venant à nouveau du théorème de Fubini, puisque $u^2\,\psi \in L^1(\Omega)$. Ce théorème donne aussi que $F \in L^1(0,2)$. On vient donc de démontrer que F_n converge vers F dans $\mathcal{D}'(0,2)$.

Question 3c. On utilise l'expression $F_n'(x) = \displaystyle\int_0^1 \phi_n(x,y)\,\partial_x\phi_n(x,y)\,dy$ établie à la Question 3a. Soit $\psi \in \mathcal{D}(0,2)$. On voit que $\phi_n\,\partial_x\phi_n\,\psi$ est dans $L^1(\Omega)$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini :

$$\int_0^2 F_n'(x)\,\psi(x)\,dx = \int_\Omega \phi_n(x,y)\,\partial_x\phi_n(x,y)\,\psi(x)\,dxdy.$$

On sait que ϕ_n et $\nabla\phi_n$ convergent dans $L^2(\Omega)$ vers u et ∇u, respectivement, tandis que $\psi \in L^\infty(\Omega)$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 F_n'(x)\,\psi(x)\,dx = \int_\Omega u(x,y)\,\partial_x u(x,y)\,\psi(x)\,dxdy = \int_0^2 G(x)\,\psi(x)\,dx,$$

avec $G(x) = \displaystyle\int_0^1 u(x,y)\,\partial_x u(x,y)\,dy$. La dernière égalité vient à nouveau du théorème de Fubini, puisque $u\,\partial_x u\,\psi \in L^1(\Omega)$. Ce théorème indique aussi que la fonction G est définie presque partout, et $G \in L^1(0,2)$.

On vient donc de démontrer que F_n' converge vers G dans $\mathcal{D}'(0,2)$.

Question 3d. Comme F_n converge vers F dans $\mathcal{D}'(0,2)$, on sait que F_n' converge vers F'. On a aussi montré que F_n' converge vers G. Par unicité de la limite dans $\mathcal{D}'(0,2)$, on a donc

$$F'(x) = G(x) = \int_0^1 u(x,y)\,\partial_x u(x,y)\,dy.$$

On sait que $G \in L^1(0,2)$. L'égalité ci-dessus (au sens des distributions) est donc une égalité entre fonctions de classe $L^1(0,2)$.

Question 4a. Soit $0 \le a < b \le 2$, et $\omega(a,b) = (a,b)\times(0,1) \subset \Omega$. On multiple (3) par u et on intégre sur $\omega(a,b)$ (on rappelle que $u \in H^2(\Omega)$, donc Δu est mieux qu'une distribution, c'est une fonction !) : on a donc

$$-\int_{\omega(a,b)} \Delta u\,u = 0.$$

On utilise maintenant la formule de Green, qui donne que

$$\int_{\omega(a,b)} \Delta u\,u = -\int_{\omega(a,b)} \nabla u\cdot\nabla u + \int_{\partial[\omega(a,b)]} u\,\nabla u\cdot n.$$

Comme $u = 0$ sur les deux bords horizontaux de $\omega(a, b)$, on obtient que

$$0 = -\int_{\omega(a,b)} \nabla u \cdot \nabla u + \int_{\gamma(b)} u\, \partial_x u - \int_{\gamma(a)} u\, \partial_x u.$$

Question 4b. On voit, en utilisant la Question 3d, que

$$\int_{\gamma(a)} u\, \partial_x u = \int_0^1 u(a, y)\, \partial_x u(a, y)\, dy = F'(a).$$

On déduit donc de la question précédente que $\displaystyle\int_{\omega(a,b)} |\nabla u|^2 = F'(b) - F'(a)$, d'où $F'(b) \geq F'(a)$.

Question 4c. D'après la Question 3d, on a $F'(0) = \displaystyle\int_0^1 u(0, y)\, \partial_x u(0, y)\, dy$. Or, pour tout y, $u(0, y) = 0$. Donc $F'(0) = 0$.

Question 4d. Les Questions 4b et 4c impliquent que, pour tout $x \geq 0$, on a $F'(x) \geq F'(0) = 0$, donc F est croissante. Par conséquent, pour tout $0 < x < 2$, on a $F(x) \leq F(2)$, ce qui est exactement la propriété souhaitée.

1.3 Partie 3 (Algorithme en dimension un)

Question 5. Le domaine Ω est subdivisé entre deux sous-domaines, Ω_1 et Ω_2, qui se recouvrent. L'avantage de cet algorithme est de demander des résolutions d'EDP sur des domaines plus petits que le problème de référence, ce qui va coûter moins cher. Le prix à payer est qu'il faut itérer plusieurs fois. Plutôt que de résoudre *un gros* problème, on va résoudre *plusieurs petits* problèmes.

Question 6. On vérifie que $e_1^k(x) = \dfrac{x}{2} e_1^k(2)$ est solution du problème (7) (qui admet une unique solution). On a donc

$$\left|e_1^k(1)\right| = \frac{1}{2} \left|e_1^k(2)\right|,$$

et de même

$$\left|e_2^k(2)\right| = \frac{1}{2} \left|e_2^k(1)\right|.$$

Par conséquent, on a

$$\left|e_1^k(1)\right| = \frac{1}{2} \left|e_1^k(2)\right| = \frac{1}{2} \left|e_2^{k-1}(2)\right| = \frac{1}{4} \left|e_2^{k-1}(1)\right| = \frac{1}{4} \left|e_1^{k-1}(1)\right|.$$

Question 7. On voit donc que $\lim_{k\to\infty} e_1^k(1) = 0$. En utilisant la solution analytique $e_1^k(x) = \dfrac{x}{2} e_1^k(2)$ sur $(0, 2)$, on déduit que $\|e_1^k\|_{H^1(\Omega_1)}$ converge vers 0 quand $k \to \infty$. De la même manière, $\lim_{k\to\infty} \|e_2^k\|_{H^1(\Omega_2)} = 0$. L'erreur entre les solutions calculées u_1^k et u_2^k d'une part et la solution exacte u d'autre part converge vers 0. L'algorithme proposé converge donc.

2 Problème 2 (Variations autour de l'inégalité de Poincaré)

Question 1. On écrit (en utilisant Cauchy-Schwarz) que

$$\begin{aligned}
\int_{I_1} (v-u)^2 \, dx &= \int_{-1}^{1} dx \, \left(\int_x^{2x} u'(y) \, dy \right)^2 \\
&\leq \int_{-1}^{1} dx \, \left(\int_x^{2x} u'^2(y) \, dy \right) \left(\int_x^{2x} 1^2 \, dy \right) \\
&= \int_{-1}^{1} dx \, \left(\int_x^{2x} u'^2(y) \, dy \right) x.
\end{aligned}$$

Question 2. En utilisant en particulier le fait que $|x| \leq 1$, on a

$$\int_{-1}^{1} dx \; x \left(\int_x^{2x} u'^2(y) \, dy \right) \leq \int_{-1}^{1} dx \; \mathrm{sign}(x) \, \left(\int_x^{2x} u'^2(y) \, dy \right).$$

Par ailleurs, en utilisant le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} dx \; \mathrm{sign}(x) \, \left(\int_x^{2x} u'^2(y) \, dy \right) &= \int\int_{\{(x,y) \in I_1 \times I_2, \; y \in J_x\}} u'^2(y) \, dxdy \\
&= \int\int_{\{(x,y) \in I_1 \times I_2\}} u'^2(y) \chi_{J_x}(y) \, dxdy.
\end{aligned}$$

Question 3. En utilisant les Questions 1 et 2 et le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
\int_{I_1} (v-u)^2 \, dx &\leq \int\int_{\{(x,y) \in I_1 \times I_2\}} u'^2(y) \chi_{J_x}(y) \, dxdy \\
&= \int_{I_2} dy \; u'^2(y) \left(\int_{I_1} \chi_{J_x}(y) \, dx \right) \\
&= \int_{I_2} dy \; u'^2(y) \left(\int_{I_1} \chi_{J_{y/2}}(x) \, dx \right) \\
&\leq \int_{I_2} dy \; u'^2(y).
\end{aligned}$$

Question 4. On a (en utilisant $2ab \leq a^2 + b^2$ et un changement de variable $y = 2x$)

$$\begin{aligned}
\int_{I_1} (v+u)^2 \, dx &= \int_{I_1} \left\{ v^2 + u^2 + 2uv \right\} dx \\
&\leq \int_{I_1} 2 \left\{ v^2 + u^2 \right\} dx \\
&= \int_{I_1} 2u^2(2x) \, dx + \int_{I_1} 2u^2(x) \, dx \\
&= \int_{I_2} u^2(y) \, dy + \int_{I_1} 2u^2(x) \, dx \\
&\leq \int_{I_2} 3u^2(y) \, dy.
\end{aligned}$$

Question 5. On calcule $K(1+\varepsilon\varphi)$ en développant les carrés :

$$\begin{aligned} K(1+\varepsilon\varphi) &= \frac{1}{|I_2|}\int_{I_2}(1+2\varepsilon\varphi+\varepsilon^2\varphi^2)\,dx - \frac{1}{|I_1|}\int_{I_1}(1+2\varepsilon\varphi+\varepsilon^2\varphi^2)\,dx - C\varepsilon^2\int_{I_2}\varphi'^2\,dx \\ &= K(1)+2\varepsilon\left\{\frac{1}{|I_2|}\int_{I_2}\varphi\,dx - \frac{1}{|I_1|}\int_{I_1}\varphi\,dx\right\}+\varepsilon^2K(\varphi), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{K(1+\varepsilon\varphi)-K(1)}{\varepsilon} = 2\left\{\frac{1}{|I_2|}\int_{I_2}\varphi\,dx - \frac{1}{|I_1|}\int_{I_1}\varphi\,dx\right\}+\varepsilon K(\varphi)$$

et donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{K(1+\varepsilon\varphi)-K(1)}{\varepsilon} = 2\left\{\frac{1}{|I_2|}\int_{I_2}\varphi\,dx - \frac{1}{|I_1|}\int_{I_1}\varphi\,dx\right\}.$$

Question 6. Raisonnons par contradiction. Si l'inégalité indiquée est vraie, cela signifie que $K(u)\le 0$. Cela implique $K(1+\varepsilon\varphi)\le 0$, et vu que $K(1)=0$, on déduit que

$$\frac{K(1+\varepsilon\varphi)-K(1)}{\varepsilon}\le 0.$$

Ceci implique que

$$G(\varphi)\le 0,$$

ce qui est faux pour un choix de $\varphi\in C^\infty(I_2)$ non identiquement nul et vérifiant

$$\varphi\ge 0 \quad \text{sur } I_2, \quad \operatorname{supp}\varphi\subset I_2\setminus I_1.$$

Question 7. Remarquons que l'inégalité voulue (contenant C_0) reste vraie si on multiplie u par une constante. Quitte à normaliser u (par multiplication par une constante appropriée), on peut supposer que $\int_{I_2} u'^2\,dx=1$, i.e. $F(u)=0$. Remarquant que

$$E(u)=2\left(\frac{1}{|I_2|}\sqrt{\int_{I_2}u^2\,dx}-\sqrt{\frac{1}{|I_1|}\int_{I_1}u^2\,dx}\right)^2,$$

on voit que si C_0 est telle que l'inégalité (11) est satisfaite, alors

$$C_0^2\ge\frac{1}{2}E(u) \quad \text{pour tout } u\in H^1(I_2^0) \text{ tel que } F(u)=0 \text{ et } \int_{I_2}u^2\,dx>2\int_{I_1}u^2\,dx.$$

Avec le choix $u=u_*$, on tire que

$$C_0^2\ge\frac{1}{2}E(u_*).$$

Question 8. On calcule

$$F(u+v)=F(u)+\int_{I_2}u'v'\,dx+\frac{1}{2}\int_{I_2}v'^2\,dx \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2}\int_{I_2}v'^2\,dx=O\left(\|v\|^2_{H^1(I_2^0)}\right),$$

ce qui montre que $F'(u)\cdot v=\int_{I_2}u'v'$.

Question 9. Le théorème de minimisation sous contrainte montre qu'il existe un multiplicateur de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}$ de la contrainte $F(u) = 0$ tel que

$$E'(u_*) = \lambda F'(u_*).$$

Cela signifie en particulier, pour $\varphi \in \mathcal{D}(I_2^0) \subset H^1(I_2^0)$, que

$$E'(u_*) \cdot \varphi = \lambda F'(u_*) \cdot \varphi,$$

soit

$$\lambda \int_{I_2} u_*' \varphi' \, dx = \left(A_0 - \sqrt{2} B_0 \right) \left\{ \frac{\int_{I_2} u_* \varphi \, dx}{A_0} - \sqrt{2} \frac{\int_{I_2} u_* \varphi \chi_{I_1}(x) \, dx}{B_0} \right\}$$

avec

$$A_0 = \sqrt{\int_{I_2} u_*^2 \, dx}, \quad B_0 = \sqrt{\int_{I_1} u_*^2 \, dx}.$$

On introduit $\mu = -\lambda \left(A_0 - \sqrt{2} B_0 \right)^{-1}$, et on a donc

$$\langle \mu u_*'', \varphi \rangle = \langle -\mu u_*', \varphi' \rangle = \langle \frac{u_*}{A_0} - \sqrt{2} \frac{u_* \chi_{I_1}}{B_0}, \varphi \rangle$$

soit

$$\mu u_*'' = \frac{u_*}{A_0} - \sqrt{2} \frac{u_* \chi_{I_1}}{B_0} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(I_2^0).$$